

Note on the semantics of logic programming

島根大学総合理工学部 近藤通朗 (Michiro Kondo)

1 はじめに

Logic Programming の理論において, Ginsberg [12, 13] により導入された bilattice の概念は意味論を展開する上において非常に重要かつ有用である. その後 Fitting [10] により logic programming の多くの言語に対して統一的な意味論を与えることが示され, bilattice の理論が注目を浴びるようになった. Arieli と Avron は bilattice B とその prime filter F による logical bilattice と呼ばれる matrix (B, F) で特徴付けられる論理の公理化をおこなったが ([1]), これについて, 次のような問題が生じる:

問題 1 その論理は決定可能か?

[1] では bilattice $FOUR$ に新たに演算を導入して代数的な意味論を与えているため決定可能性はこの代数的意味論から得られる. しかし, これでは本来の bilattice による論理の特徴づけとは言い難く, この論理と bilattice による代数的な意味論との関係が不明である.

問題 2 prime bifilter は常に存在するか?

一般的に bilattice においては prime bifilter は存在しないので, この代数的意味論による特徴付けはあまり意味がない. したがって, より強い意味論を展開して論理の特徴付けをおこなう必要がある.

ここでは問題 2 について考察していく. すなわち, bilattice に対応する論理の (代数的意味論による) 公理化に必要な概念を展開していく. 具体的には, bifilter についての性質を調べていく.

2 interlaced bilattice の定義

最初に, bilattice を定義する. 2つの順序を持つ構造 $\langle B, \leq_t, \leq_k \rangle$ が bilattice とは,

1. B は空でない集合,
2. \leq_t と \leq_k は B 上の順序関係であり, これらにより B は完備束となる.
3. 写像 $\neg: B \rightarrow B$ は次の条件を満たす
 - (a) $x \leq_t y \implies \neg y \leq_t \neg x$
 - (b) $x \leq_k y \implies \neg x \leq_k \neg y$
 - (c) $\neg\neg x = x$

0 (1) で順序 \leq_t についての最小元 (最大元) を, また \perp (\top) で順序 \leq_k に関する最小元 (最大元) を表すことにする. したがって, 任意の $x \in L$ に対して,

$$0 \leq_t x \leq_t 1, \perp \leq_k x \leq_k \top$$

が成り立つ. ここで, 4つの元 $0, 1, \perp, \top$ はすべて相異なるものと仮定する. また, 順序 \leq_t (\leq_k) に関する積, 和をそれぞれ \wedge, \vee (\otimes, \oplus) で表すことにする. したがって,

1. $a \wedge b \leq_t a, b$ and $(x \leq_t a, b \implies x \leq_t a \wedge b)$
2. $a, b \leq_t a \vee b$ and $(a, b \leq_t x \implies a \vee b \leq_t x)$
3. $a \otimes b \leq_k a, b$ and $(x \leq_k a, b \implies x \leq_k a \otimes b)$
4. $a, b \leq_k a \oplus b$ and $(a, b \leq_k x \implies a \oplus b \leq_k x)$

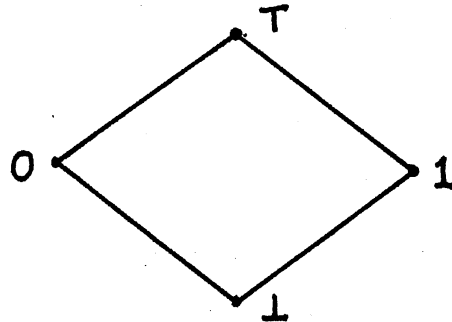
が成り立つ.

今後, 演算を明示するために bilattice B を $\langle B, \wedge, \vee, \otimes, \oplus, 0, 1, \perp, \top \rangle$ と表すこともある.

次に, *interlaced bilattice* とは bilattice $B = \langle B, \leq_t, \leq_k \rangle$ において積・和の演算が順序に関して単調な, すなわち, 次の条件を満たすものと定義する: 任意の $c \in B$ に対して,

1. $a \leq_t b \implies a \otimes c \leq_t b \otimes c$ かつ $a \oplus c \leq_t b \oplus c$
2. $a \leq_k b \implies a \wedge c \leq_k b \wedge c$ かつ $a \vee c \leq_k b \vee c$.

例 FOUR



有界な束 $L = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ に対して, それらの直積 $L \times L$ 上の演算 $\wedge, \vee, \otimes, \oplus, \neg$ を次のように定義する: 任意の $(a, b), (c, d) \in L \times L$ について

$$\begin{aligned} (a, b) \wedge (c, d) &= (a \wedge c, b \vee d) \\ (a, b) \vee (c, d) &= (a \vee c, b \wedge d) \\ (a, b) \otimes (c, d) &= (a \wedge c, b \wedge d) \\ (a, b) \oplus (c, d) &= (a \vee c, b \vee d), \\ \neg(a, b) &= (b, a) \end{aligned}$$

このとき,

Proposition 1. $L \odot L = \langle L \times L, \wedge, \vee, \otimes, \oplus, \neg \rangle$ は *interlaced bilattice* である

逆に,

Proposition 2. 任意の *interlaced bilattice* B に対して, 有界な束 L が存在して $B = L \odot L$ となる

ことも示される ([2], [4]).

代数系, 特に束の様々な性質を調べるのに有用な概念として *filter* がある. 例えば, X を任意の *Boolean algebra*, U : *maximal filter* とすると

$$X/U \cong 2 = \{0, 1\}$$

となり, これは古典論理の2値性を反映しており, また Y : *Kleene algebra*, U : *maximal filter* とすると

$$Y/U \cong 3 = \{0, 1/2, 1\}$$

となり *Kleene algebra* の3値性を表している. このように *filter* を考えることは, 代数系の最も簡単な model を与えることになり, 対応する論理の特徴付けにつながる. したがって, *bilattice* においても *filter* に対応するもの (*bifilter*) を考えることが有用になるであろう.

B を任意の *bilattice*, F を B の空でない部分集合とすると, 任意の $a, b \in B$ について,

$$a \wedge b \in F \iff a, b \in F$$

$$a \otimes b \in F \iff a, b \in F$$

となるときに F が *bifilter* であると定義する. $F \neq B$ である *bifilter* F を *proper bifilter* と呼ぶ. また, *proper bifilter* F が次の条件を満たすときに *prime* であるという: 任意の $a, b \in B$ について,

$$a \vee b \in F \iff a \in F \text{ または } b \in F$$

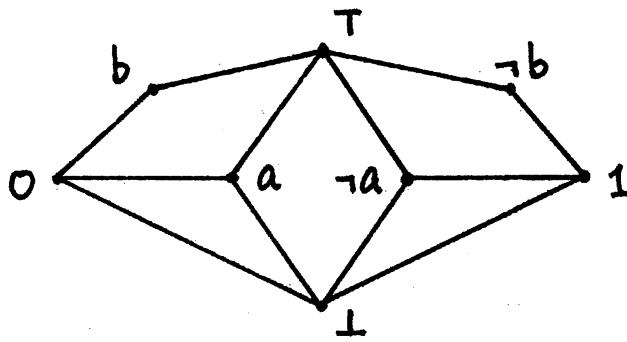
$$a \oplus b \in F \iff a \in F \text{ または } b \in F$$

このとき次のことが成り立つ.

Proposition 3. F : *proper bifilter* ならば $1, \top \in F$ かつ $0, \perp \notin F$

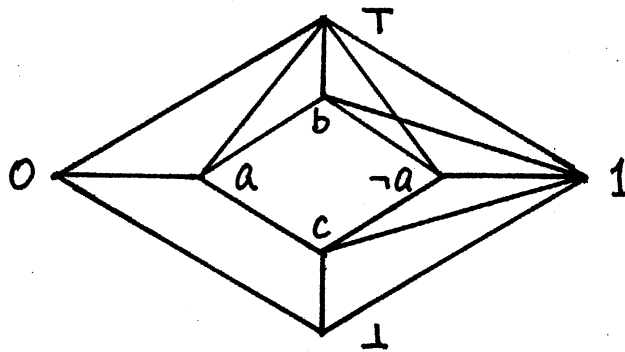
次の例が示すように, 一般に *proper bifilter* は存在するとは限らない. また, 通常束であれば常に $\{1\}$ は *filter* であるが, *bilattice* においてはそれに対応すると考えられる $[1, \top]_k = \{x \in B \mid 1 \leq_k x \leq_k \top\}$ や $[\top, 1]_t = \{x \in B \mid \top \leq_t x \leq_t 1\}$ は必ずしも *bifilter* とは限らない.

例:



$[T, 1]_t = \{\neg a, \neg b, T, 1\}$ について $\neg a \otimes 1 = \perp \notin [T, 1]_t$ だから $[T, 1]_t$ は *bifilter* ではない。また, $[1, T]_k = \{1, \neg b, T\}$ について, $T \wedge \neg a = T \in [1, T]_k$ であるが, $\neg a \notin [1, T]_k$. したがって, $[1, T]_k$ も *bifilter* ではない。さらに, 任意の *bifilter* F に対して, $1, T \in F$ より $T \leq_t \neg a$ だから $\neg a \in F$. よって $\neg a \otimes 1 = \perp \in F$. これは *proper bifilter* が存在しないことを示している。

例:



$[T, 1]_t = \{\neg a, T, 1\}$ について $\neg a \otimes 1 = c \notin [T, 1]_t$ だから $[T, 1]_t$ は *bifilter* ではない。また, $[1, T]_k = \{1, b, T\}$ についても $b \wedge T = a \notin [1, T]_k$ だから $[1, T]_k$ は *bifilter* ではない。ここで $F = \{a, \neg a, b, c, T, 1\}$ を考えると F は *proper bifilter* となる。すなわち, *proper filter* が存在するような場合でも一般に $[T, 1]_t, [1, T]_k$ は *bifilter* とはならないので, $[T, 1]_t, [1, T]_k$ は最小 (あるいは極小) の *bifilter* とは限らない。これについては次のことが成り立つ。

Proposition 4. $[T, 1]_t \cup [1, T]_k$ で生成される *bifilter* Γ は最小の *bifilter* である。

Corollary 1. $0, \perp \notin \Gamma$ ならば Γ は最小の *proper bifilter* である。

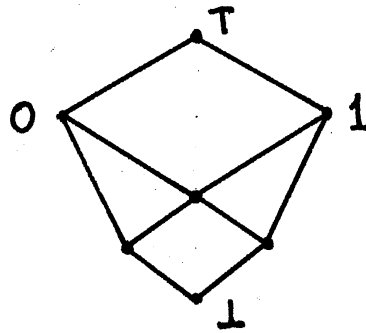
また,

Proposition 5. $[T, 1]_t = [1, T]_k$ ならば $[T, 1]_t (= [1, T]_k)$ は *proper bifilter* である。

Corollary 2. 特に, B が *interlaced bilattice* であれば, $[T, 1]_t = [1, T]_k$ となり, したがって $[T, 1]_t (= [1, T]_k)$ は *proper bifilter* である。

注意: 上の系について次の例が示すように, その逆は成り立たない。

例



したがって, proper bifilter の存在を保証するには, 例えば interlaced bilattice というようなより強い条件を追加する必要がある.

bilattices 全体は, 明らかに variety を成すから congruence による商代数を考えるとまた bilattices となる. ここで, F を任意の prime bifilter とするとき, 次のような分割が考えられる:

$$B_0 = \{x \in B \mid x \notin F, \neg x \in F\}$$

$$B_1 = \{x \in B \mid x \in F, \neg x \notin F\}$$

$$B_T = \{x \in B \mid x \in F, \neg x \in F\}$$

$$B_\perp = \{x \in B \mid x \notin F, \neg x \notin F\}$$

ここで分割から作られる関係 \sim_F を次のように定義する: 任意の $x, y \in B$ について,

$$x \sim_F y \iff \exists B_i; x, y \in B_i$$

この関係 \sim_F は分割から作られているので明らかに B 上の同値関係であるが, F が prime bifilter であることから

Theorem 1. \sim_F は congruence である.

Theorem 2. F : prime bifilter ならば $B / \sim_F \cong FOUR$

したがって,

Corollary 3. \sim_F : congruence ならば F : prime bifilter である.

すなわち,

Proposition 6. F を bifilter とするとき,

$$F : \text{prime bifilter} \iff \sim_F : \text{congruence}$$

以上のことから prime bifilter の存在が示されるような条件があれば bilattice による代数的意味論は容易に展開できる. そのためにこれまでの議論から interlaced bilattice における prime bifilter の性質について調べることにする.

3 interlaced bilattice における bifilter の性質

任意の *negation* を持たない interlaced bilattice B に対して, $B \cong L_1 \odot L_2$ となる有界な束 L_1, L_2 が存在する. 特に, B が *negation* を持つとき, $B \cong L \odot L$ となる有界な束 L が存在し, $a = (a_1, a_2) \in L \odot L = B$ に対して $\neg a = (a_2, a_1)$ となることが知られている ([1, 4]). この節では, interlaced bilattice における bifilter の性質について調べる.

B を任意の *negation* を持たない interlaced bilattice とすると, $B \cong L_1 \odot L_2$ となる束 L_1, L_2 が存在するので, 今後 B の元と $L_1 \odot L_2$ の元を同一視する. このとき,

Proposition 7. F_1 が L_1 の filter ならば $F_1 \odot L_2$ は bifilter である.

逆に,

Proposition 8. F が bifilter ならば $F = F_1 \odot L_2$ となる filter F_1 が存在する.

したがって, B が interlaced bilattice ならば任意の bifilter F は $F_1 \odot L_2$ と表現されるが, これについて逆も成り立つ, すなわち,

Proposition 9. B を bilattice とするとき, 任意の bifilter F が $F_1 \odot L_2$, (ただし F_1 は filter) と分解されるならば, B は interlaced bilattice である.

Corollary 4. F : prime bifilter $\iff F_1$: prime filter

Corollary 5. F : maximal bifilter $\iff F_1$: maximal filter

Corollary 6. $[\top, 1]_t = [1, \top]_k = \{1\} \odot L_2$

Theorem 3. $S \subseteq B$ とするとき, S で生成される bifilter $[S]$ は

$$[S] = \{x \mid \exists s_i \in S, \exists u \in B; \square_i s_i \leq_t u \leq_k x \text{ または } \square_i s_i \leq_k u \leq_t x\}$$

と表現できる. ここで, $\square_i s_i$ は S の有限個の元 s_i を \wedge, \otimes で結んだものを表す.

したがって,

Corollary 7. $[x] = \{y \mid x \leq_t u \leq_k y \text{ または } x \leq_k u \leq_t y \text{ となる } u \in B \text{ が存在する}\}$

ここで, $x = (x_1, x_2) \in B = L_1 \odot L_2$ とすると,

Corollary 8. $[x] = [x_1] \odot L_2$

となる.

特に, B が distributive bilattice ならば $B \cong L \odot L$ となる分配束 L が存在するから,

Proposition 10. F を任意の *bifilter* とするとき,
 $x \notin F$ ならば $x \notin F^*$ かつ $F \subseteq F^*$ となる *prime bifilter* F^* が存在する.

これは論理の代数的特徴づけにおいて重要な役割を果たす.

参考文献

- [1] O. Arieli and A. Avron, *Reasoning with logical bilattices*, Jour. of Logic, Language, and Information, 5 (1996), 25-63.
- [2] A. Avron, *The structure of interlaced bilattices*, Math. Struct. in Comp. Science, 6 (1996), 287-299.
- [3] S.Burris and H.P.Sankappanavar, *A course in universal algebra*, GTM 78, Springer.
- [4] M. Kondo, *Representation theorem of interlaced bilattice with conflation*, submitted
- [5] M. Fitting, *A Kripke/Kleene semantics for logic programs*, Jour. of Logic Programming, vol. 2 (1985), 295-312.
- [6] M. Fitting, *Notes on the mathematical aspects of Kripke's theory of truth*, Notre Dame Jour. of Formal Logic, vol. 27 (1986), 75-88.
- [7] M. Fitting, *Bilattices and the theory of truth*, Jour. of Philosphical Logic, vol. 18 (1989), 225-256.
- [8] M. Fitting, *Negation as refutation*, Proc. 4th Symp. on Logic in Computer Science, IEEE (1989), 63-70.
- [9] M. Fitting, *Bilattices in logic programming*, Proc. 20th. Inter. Symp. on Multi-Valued Logic, IEEE (1990), 238-246.
- [10] M. Fitting, *Bilattices and the semantics of logic programming*, Jour. of Logic Programming, vol. 11 (1991), 91-116.
- [11] M. Fitting, *Kleene's logic, generalized*, J. Logic Computat., vol. 1 (1991), 797-810.
- [12] M.L. Ginsberg, *Multivalued logics : a uniform approach to reasoning in artificial intelligence*, Computational Intelligence, vol. 4 (1988), 265-316.

- [13] M.L. Ginsberg, *Multi-valued logics*, Proc. AAAI-86 5th. national conference on artificial intelligence, Morgan Kaufmann Publishers (1988), 243-247.

近藤通朗

e-mail:kondo@cis.shimane-u.ac.jp

690-8504 松江市西川津町 1060

島根大学総合理工学部数理情報システム学科