数理解析研究所講究録
1107 巻 1999 年 63-69

GO 空間に関する問題とその周辺

東京家政学院大学　細渕昌美　(Masami Hosobuchi)

1 序

全順序集合に区間位相（順序位相）を入れたものを順序空間 (linearly ordered topological space、略して LOTS) とよぶ。位相空間 X が、ある順序空間 Y の部分空間になっているとき、一般順序空間 (generalized ordered space、略して GO 空間) とよぶ。その場合、X の順序として、Y の順序の制限を考える。従って、基本的な問題は、

問題 1 性質 P をもつ GO 空間は、性質 P をもつ順序空間 (LOTS) の部分空間になるか？

ということである。paracompactness、metrizability、quasi-developability については正しいことが知られている。ここで、

定義 1 空間 X が quasi-developable であるとは、open sets の collection の列 $\{\mathcal{G}(n) : n \in N\}$ が存在して、$p \in G$、G は open、に対して $\exists n \in N$ such that $p \in \mathrm{St}(p, \mathcal{G}(n)) \subset G$ が成り立つことをいう。$\mathrm{St}(p, \mathcal{G}(n)) = \cup\{G : p \in G, G \in \mathcal{G}(n)\}$ であり、$\mathcal{G}(n)$ は必ずしも covering とは限らない。

定義 2 空間 X が perfect であるとは、任意の閉集合が G_δ 集合になるときである。
(注) 空間 X が perfect で quasi-developable のとき、developable である。(H. Bennett).

D. Lutzer は、

問題 2 perfect な GO 空間は、ある perfect な LOTS に位相的部分空間として embed されるか？[BL1].

を提出した。位相的部分空間という意味は、部分空間の順序はそれを含む LOTS の順序の制限でなくてもよい。この問題に関して、W-X. Shi, T. Miwa, Y-Z. Gao

[SMG] の貢献があるが依然として未解決である。この問題は非常にむずかしいようである。

2　4つの性質

ここでは、今日の主題となる4つの性質を定義する。これは、H. Bennett、D. Lutzer、S. Purisch の preprint [BLP] に述べられている。GO 空間の場合、4つのうちいずれかをみたせば、density = cellularity となる。

性質 I 空間 X に σ-closed discrete な dense subset が存在する。すなわち、dense subset $D = \cup\{D(n) : n \in N\}$、各 $D(n)$ は closed discrete、が存在する。

性質 II 空間 X に dense metrizable subspace が存在する。

性質 III 各 $n \in N$ に対して、open set $U(n)$ と、その中で relatively closed な discrete subset $D(n) \subset U(n)$ が存在して、$p \in G$、G は open、に対して $\exists n \in N$ such that $p \in U(n)$ かつ $G \cap D(n) \neq \phi$ が成り立つ。

性質 IV 空間 X に σ-discrete dense subset が存在する。すなわち、dense subset $D = \cup\{D(n) : n \in N\}$、各 $D(n)$ は discrete、が存在する。$D(n)$ は closed とは限らない。
（注）性質 III は、H. Bennett、D. Lutzer の paper [BL3] で導入され、「point countable base をもつ GO 空間が性質 III をもてば、quasi-developable である」を示すのに利用された。

容易にわかる関係は、I $\Rightarrow$ III $\Rightarrow$ IV、II $\Rightarrow$ IVである。[BLP] では、GO 空間の場合にI $\Rightarrow$ II を示しているが、これはもう少し一般の空間で成り立つ。

定理 1 X を、第1可算性をみたす strongly collectionwise Hausdorff な正則空間とする。X が性質 I をもてば、性質 II をもつ。
（注）定理1の仮定をみたす空間は GO 空間とは限らないし、また実際そのような空間は存在する。

系 1 GO 空間が性質 I をみたせば、性質 II をみたす。

また、性質 I に関して、つぎが成り立つ。

定理 2 densely-ordered な LOTS が性質 I をみたせば、metrizable である。こ

こで、densely-ordered とは、任意の 2 点 x, y $(x < y)$ に対して、$]x, y[\neq \emptyset$ となるときである。

(注) 定理 2 において、LOTS を GO 空間に弱めることはできない。H. Bennett、D. Lutzer は別の論文で、「perfect な densely-ordered LOTS が σ-minimal base をもてば、metrizable である」を示した。perfect で σ-minimal base をもつ GO 空間は性質 I をもつので、彼らの結果は定理 2 の系として得られる。

3　GO 空間が quasi-developable になるための条件

ここでは、point countable base をもつ GO 空間およびそれを弱めた $\delta\theta$ -base をもつ GO 空間を考える。

定義 3 $\mathcal{B} = \cup\{\mathcal{B}(n) : n \in N\}$ が $\delta\theta$ -base であるとは、$p \in G$、G は open、に対して $\exists n \in N$、$\exists B \in \mathcal{B}(n)$ such that $p \in B \subset G$ かつ $\mathrm{ord}(p, \mathcal{B}(n)) \leq \omega$ が成り立つことをいう。ここで、$\mathrm{ord}(p, \mathcal{B}(n)) = \sharp\{B : p \in B, B \in \mathcal{B}(n)\}$ である。

つぎの 3 つは H. Bennett、D. Lutzer により証明された。

定理 3 [BL2] point countable base をもつ GO 空間が性質 I をみたせば、metrizable である。

定理 4 [BL3] point countable base をもつ GO 空間 X が性質 III をみたせば、X は quasi-developable である。

定理 5 [BL4]$\delta\theta$ -base をもつ GO 空間が性質 III をみたせば、quasi-developable である。

(注)　定理 4、5 において、更に perfectness を仮定すれば、GO 空間は metrizable になる。

証明の方針はどれも同じなので、定理 4 の場合を紹介する。GO 空間の場合、quasi-developable であることと σ-disjoint base をもつこととが同値なので、実際に σ-disjoint base を構成する：

定理 4 の証明の sketch : point countable base を $\mathcal{P}$ で表し、$U(n)$、$D(n)$、$(n \in N)$ を性質 III で述べられたものとする。$U(n) - D(n)$ は開集合であるから、open convex components の union になる：$U(n) - D(n) = \cup\{C(n, \alpha) : \alpha \in A\}$.　X は paracompact になるので、各 $C(n, \alpha)$ の中に relatively closed、discrete-in-itself な部分集合 $E(n, \alpha)$ で cofinal in $C(n, \alpha)$ かつ coinitial in $C(n, \alpha)$ となるものが存

在する。X は point countable base をもつから第 1 可算であり、

$$Y = (\cup\{D(n) : n \in N\}) \cup (\cup\{E(n,\alpha) : n \in N, \alpha \in A\})$$

とおくと、Y 上で「σ-disjoint な open sets の collections で、Y の各点で local base を含むもの」を作るのは容易である。$X-Y$ 上でそのようなものを作るために、n, α, H を固定する。ただし、H は $C(n,\alpha) - E(n,\alpha)$ の中の 1 つの convex component である。

$$\mathcal{R}(n,\alpha,H) = \{P \cap H : P \in \mathcal{P}, P \cap C(n,\alpha)\ \text{は cofinal in}\ C(n,\alpha)\}$$

とおき、cofinal を coinitial で置き換えたものを $\mathcal{R}'(n,\alpha,H)$ とおく。$\mathcal{P}$ の point countability により、$\mathcal{R}(n,\alpha,H), \mathcal{R}'(n,\alpha,H)$ は countable である。従って、$\mathcal{R}(n,\alpha,H) = \{R(n,\alpha,H,k) : k \in N\}$ とかける。$\mathcal{R}'(n,\alpha,H)$ も同様。

$$\mathcal{G}(n,k) = \{\mathcal{R}(n,\alpha,H,k) : \alpha \in A, H\ \text{は}\ C(n,\alpha) - E(n,\alpha)\ \text{の convex component}\}、$$

$\mathcal{G}'(n,k)$ も同様、と定義すれば、これらは disjoint な open sets の collections で $X - Y$ の各点で local base を含む。以上で、X 上の σ-disjoint base が構成される。

問題 3 point countable base をもつ GO 空間が性質 II をみたせば、quasi-developable であるか？

性質 II と性質 III の間には implication はない。例えば、ω_1は性質 II をみたすが、性質 III はみたさない。逆の例に関しては、H.Bennett、D.Lutzer、S.Purisch が興味ある例を構成している（次節）。それは、どの点でも第 1 可算ではないが性質 III をもつ LOTS である。彼らは、GO 空間 Xが dense metrizable subspace D をもてば、X は D の各点で第 1 可算であることを証明し、その結果性質 II をみたさないことを示している。

問題 4 paracompact な GO 空間が性質 II をみたせば性質 III をみたすか？

問題 5 第 1 可算な GO 空間が性質 III をみたせば性質 II をみたすか？

4 LOTS および Sorgenfrey 空間

全順序集合には区間位相の他に Sorgenfrey 位相が自然に入る。$\mathcal{I}$ で区間位相を表し、$\mathcal{S}$ で Sorgenfrey 位相を表すとする。P を I ∼ IV のいずれかとするとき、$(X,\mathcal{I})$ が 性質 P をみたせば $(X,\mathcal{S})$ も性質 P をみたすか、また逆はどうか、と

いうのは自然な問題である。肯定的な結果として、

定理 6 $(X,\mathcal{I})$ が性質 IV をみたせば $(X,\mathcal{S})$ も性質 IV をみたす。

証明は、$(X,\mathcal{I})$ に対する性質 IV で与えられる dense subset を D とし、

$$D(0)=\{x\in X-D : x \text{は直前の元はもたないが、直後の元をもつ}\}$$

とすれば、$D\cup D(0)$ が $(X,\mathcal{S})$ に対する性質 IV の dense subset である。

問題 6 $(X,\mathcal{I})$ が性質 II をみたすとき、 $(X,\mathcal{S})$ は性質 II をみたすか？ $(X,\mathcal{I})$ が性質 III をみたすとき、$(X,\mathcal{S})$ も性質 III をみたすか？

上記以外は反例がある。ここで、Bennett-Lutzer-Purisch が構成した LOTS を説明する。各 $n\in N$ に対して、

$$Y(n)=\{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\omega_1,\omega_1,\cdots):\alpha_i<\omega_1, 1\leqq i\leqq n\}$$

とおく。また、$Y(0)=\{(\omega_1,\omega_1,\cdots)\}$ （一点）とする。$Y=\cup\{Y(n):n\geq 0\}$ とおき、Y に辞書式順序を入れると LOTS になる。Y は、どの点でも第 1 可算ではなく、従って性質 II をみたさないが、性質 III をみたす LOTS である。

定理 7 $(Y,\mathcal{S})$ は性質 I をみたす。

5 weakly perfect な GO 空間

L. Kočinac [K] は、perfectness を弱めた性質として、weak perfectness を導入した。

定義 4 空間 X が、weakly perfect であるとは、任意の閉集合 C に対して、$\exists D\subset C$、D は dense in C、D は X の G_δ 集合、となることである。

例えば、ω_1 は perfect でない weakly perfect な (Kočinac 空間とよぶ) LOTS である。その後、R. Heath は、λ'-set を用いて compact な Kočinac 空間を構成した。しかし、GO 空間ではなかった。ここで、$L\subset \mathbf{R}$ が λ'-set であるとは、任意の可算集合 $C\subset\mathbf{R}$ に対して、C が $C\cup L$ の中で G_δ 集合となるときである。我々は、[BHoL] において、単位閉区間 $[0,1]$ の中の perfectly meager set を用いて compact LOTS で Kočinac 空間となるものを構成した。

定義 5 $P\subset[0,1]$ とする。P が perfectly meager set であるとは、任意の dense-in-itself な閉集合 $C\subset[0,1]$ に対して、$P\cap C$ が C の中で第 1 類集合となること

である。

定理 8. [BHoL] $P \subset [0,1]$ とする。$X = ([0,1] \times \{0\}) \cup (P \times \{0,1\})$ とおき、辞書式順序を入れる。このとき、X が Kočinac 空間であるための必要十分条件は P が非可算な perfectly meager set であることである。

6 perfectness と σ-closed discrete dense subsets

現在までに知られている perfect な GO 空間の例はすべて、(Souslin line を除いて) 性質 I をみたしている。従って、性質 I と perfectness の間に ZFC で差があるかどうか (M. Maurice and J. van Wouwe、R. Heath) は、興味のある問題である。H. Bennett、R. Heath、D. Lutzer は、最近の preprint [BHeL] の中で性質 I と perfectness の間の差、および、性質 I をみたす GO 空間の新しい metrization について述べている。集合論の公理系によっては、point countable base をもつ Souslin line が存在するので、定理 3 により、性質 I と perfectness の間には差がある。しかし、ZFC では、彼らの結果にもかかわらず、わからない。また、この問題は、問題 2 とも密接に関係している。(W-X. Shi).

定理 9 [BHeL] perfect な GO 空間 X についてつぎは同値である。
(1) X が性質 I をもつ。
(2) X は、G_δ-diagonal をもつ可算個の部分空間の和である。
(3) X の open covers の列 $\{\mathcal{G}(n) : n \in N\}$ が存在して、各点 p に対して $\cap\{\mathrm{St}(p, \mathcal{G}(n)) : n \in N\}$ が separable である。
(4) G_δ-diagonal をもつ位相空間 Y と連続 s 写像 $f : X \to Y$ が存在する。

定義 6 $\mathcal{B}$ が weak monotone ortho-base であるとは、「任意の (包含に関する) monotonic subcollection $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$ に対して、$\cap\mathcal{M}$ が開集合であるか、または、$\cap\mathcal{M}$ が一点 q から成り、$\mathcal{M}$ が q における local base である」が成り立つときである。

定理 10 [BHeL] 性質 I をみたす GO 空間が、weak monotone ortho-base をもてば、metrizable である。

参考文献

[BL1] H. R. Bennett and D. J. Lutzer, *Problems in perfect ordered spaces*, Open problems in topology, North-Holland (1990), 223-236.

[BL2] H. R. Bennett and D. J. Lutzer, *Generalized ordered spaces with capacities*, Pacific J. of Math., 112 (1984), 11-19.

[BL3] H. R. Bennett and D. J. Lutzer, *Point countability in generalized ordered spaces*, Top. and its Appl., 71 (1996), 149-165.

[BL4] H. R. Bennett and D. J. Lutzer, *A note on Property* III *in generalized ordered spaces*, Top. Proc., 21 (1996), 15-24.

[BHeL] H. R. Bennett, R. W. Heath, D. J. Lutzer, *GO-spaces with σ-closed discrete dense subsets*, Preprint.

[BHoL] H. R. Bennett, M. Hosobuchi, D. J. Lutzer, *Weak perfectness of GO-spaces*, Preprint.

[BLP] H. R. Bennett, D. J. Lutzer, S. D. Purisch, *On dense subspaces of generalized ordered spaces*, Preprint.

[K] L. Kočinac, *Some generalizations of perfect normality*, Facta Univ. Ser. Math. Inform., No. 1 (1986), 57-63.

[SMG] W-X. Shi, T. Miwa and Y-Z. Gao, *A perfect GO-space which cannot densely embed in any perfect orderable space*, Top. and its Appl., 66 (1995), 241-249.