数理解析研究所講究録
1110巻 1999年 36-63

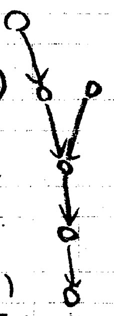
ヒルベルト双加群について(I)
— bimodule と groupoid —

九大数理 綿谷安男
Watatani, Yasuo

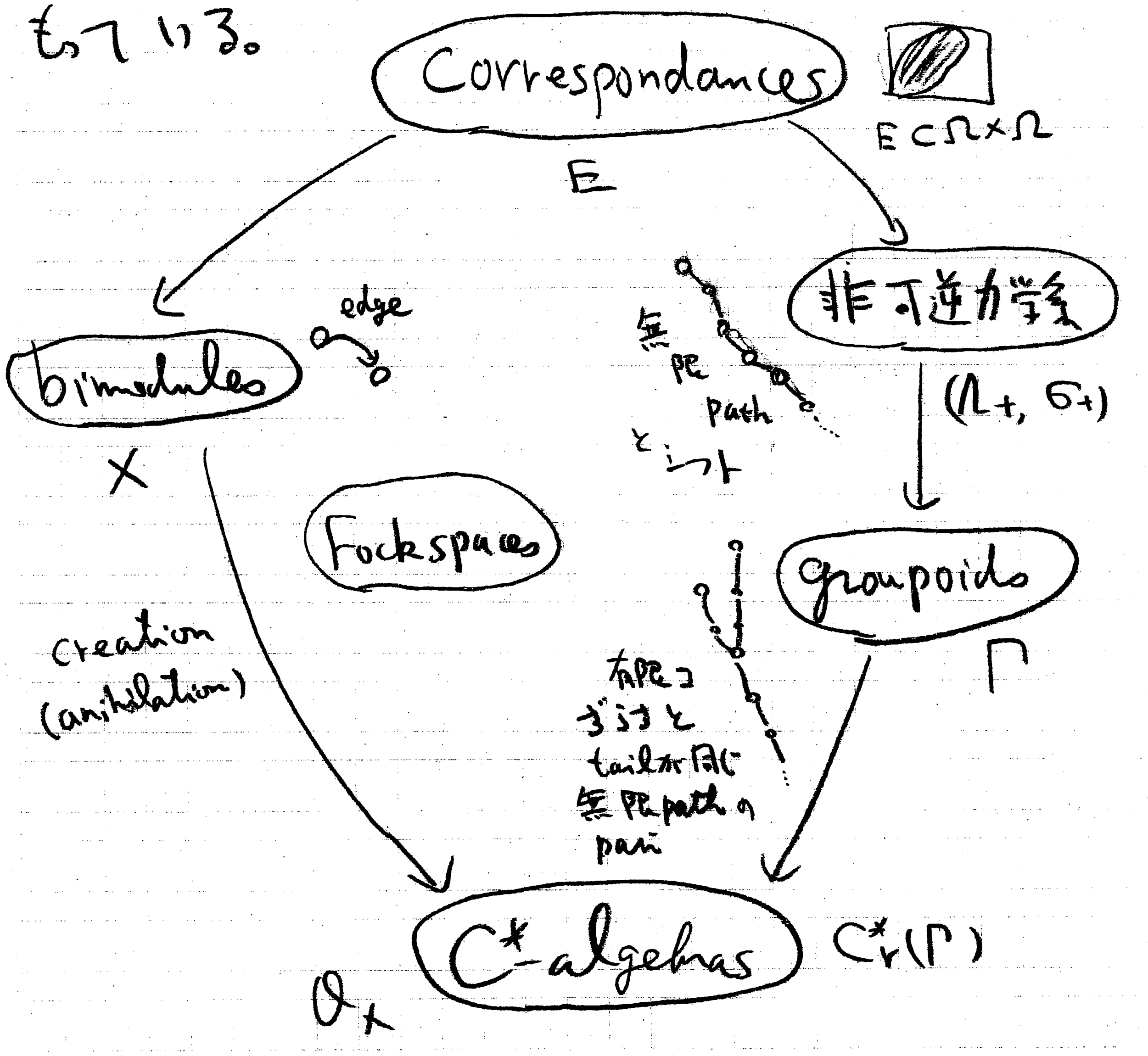
⓪ はじめに

私の担当する「ヒルベルト双加群について(I)」では主に有限生成のヒルベルト双加群について扱い，梶原氏の担当する「ヒルベルト双加群について(II)」では主に可算無限生成のヒルベルト双加群について考察するように分担している。

まず、最初に、ヒルベルト双加群 X からつくられる C^*環 $\mathcal{O}_X$ と groupoid Γ からつくられる C^*-環 $C^*_r(\Gamma)$ の2つを比較する。そして作用素環を構成する方法としてどちらがすぐれているかを勝負させ、私の判断に基づき、「勝ち」と「負け」をつけよう。

	bimodules	groupoids
具体例の構成	負 いろんな例がこれでつくれるとは限らない	勝 重要な例は大ていこれでつくれる
与えるべきデータ	与えるのは 勝 力学系を生成する「ルール」みたいなものでよい。$G \rightleftarrows$ で十分。	与えるのは力学系を無限 負 くり返した長いひも (path) の pair の全体みたいなものをつくる必要あり。 

"局所的に homeomorphism になっている" より correspondance E からは bimodule X も groupoid Γ もつくれるが、それらが生成する C^*-環 $\mathcal{O}_X$ と $C^*_r(\Gamma)$ は同型になるという意味で2つの構成法はこの場合は同じ価値をもっている。



$\boxed{1}$ Hilbert C^*-bimodules

Cuntz 環 $\mathcal{O}_n$ [C] や Cuntz-Krieger 環 $\mathcal{O}_A$ [C-K] と $\mathbb{Z}$ の接合積 $B \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ の両方を含む新しい C^*-環の構成法として，Pimsner [P] は Hilbert C^*-bimodule X からつくられる C^*環 $\mathcal{O}_X$ を導入した。これとは独立に片山 [K] は Subfactor $N \subset M$ から同様な C^*環 $\mathcal{O}_N^M$ を導入した。C^*環 $\mathcal{O}_X$ の単純性については [KPW] で考察した。

$\boxed{\text{Def}}$ A を C^*環とする。ここでいう Hilbert C^*-bimodule X とは，X は右 A 値内積をもつ Hilbert 右 A-module であり，かつ左 A-module の作用は $\phi: A \to \mathcal{L}_A(X_A)$ という * homo で与えられているものとする。X は full かつ ϕ は 1:1 を仮定する

この(Ⅰ)ではすべて X は右 Hilbert-module として有限生成を仮定する。つまりある有限集合 $\{u_i \mid i=1,\cdots,n\} \subset X$ が存在して

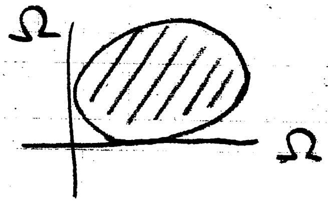
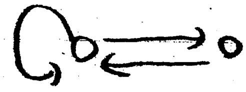
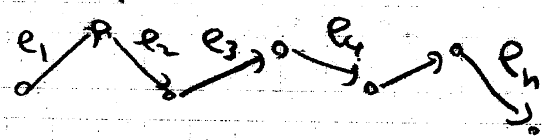
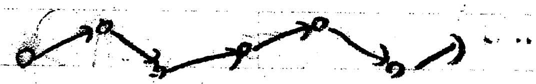
$$\forall x \in X \qquad x = \sum_{i=1}^{n} u_i (u_i \mid x)_A$$

この時 $\{u_i \mid i=1,\cdots,n\}$ を X の <u>basis</u> とよぶ。

$\boxed{\text{Def}}$ X を C^* 環 A 上の有限生成の Hilbert module とする。X が生成する C^* 環 $\mathcal{O}_X$ とは、A と $\{S_x \mid x \in X\}$ から生成される universal な C^* 環で次の交換関係をもつものである。

$$\begin{cases} S_{x+y} = S_x + S_y \\ S_{xa} = S_x \cdot a & x \in X \\ a S_x = S_{\phi(a)x} & a \in A \\ S_x^* S_y = (x \mid y)_A \\ \sum_{i=1}^{n} S_{u_i} S_{u_i}^* = I \end{cases}$$

登場してくるものを Cuntz-Krieger 環で例示すると：

bimodule X のつくる $\mathcal{O}_X$	Cuntz-Krieger 環 $\mathcal{O}_B$
E は correspondance  $E\subset\Omega\times\Omega$	B は 0-1 行列  $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ のように有向グラフ
C^*環 $A=C(\Omega)$	Ω は頂点のなす集合
bimodule $X=C(E)$	E は辺のなす集合
bimodule X の n コの テンソル積 $X\otimes_A X\otimes_A\cdots\otimes_A X$	n コの辺からなる paths の全体 
可換 C^*環 $D=C^*(A,\sigma(A),\sigma^2(A),\cdots)$ と *end $\sigma(T)=\sum_{i=1}^{n}S_{u_i}TS_{u_i}^*$	頂点からなる無限 paths のつくるマルコフシフト (Λ_B,σ) 
$S_{x_1}\cdots S_{x_n}S_{x_n}^*\cdots S_{x_1}^*$ $x_1,\cdots,x_n\in X$	辺からなる無限 paths のつくるマルコフシフトの $(e_1,\cdots,e_n)$ のきめる cylinder 集合

$\boxed{2}$ Correspondance から bimodule をつくる

Compact T_2-space Ω 上の homeomorphism

$h:\Omega\to\Omega$ は $A=C(\Omega)$ 上の接合積

$A\rtimes_\alpha\mathbb{Z}$ を導く。このhをそのグラフ

$G(h)=\{(x,h(x))\in\Omega\times\Omega \mid x\in\Omega\}$ と同一視する

ことで、homeomorphism の代わりに $\Omega\times\Omega$ の subset

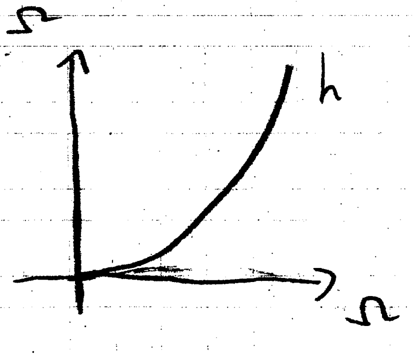
E (つまり集合論的 correspondance) をとるという

一般化が自然に考えられる。もっとも E には

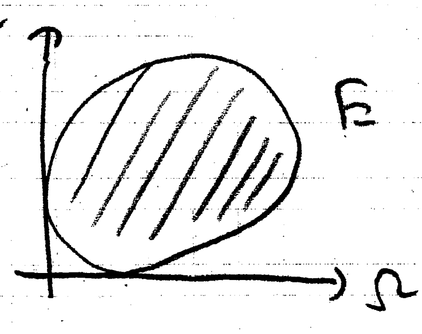
元の $\Omega\times\Omega$ からくるものとは一般に別の位相を

入れる必要があるが、ここでは有限生成の場合

に限っているのであまり気にしないでおく。



を



([KW])

$\boxed{\text{Def}}$ Ω を compact T_2-空間とする。

(E, μ) が <u>correspondance</u>

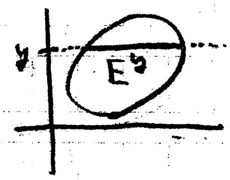
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ E は $\Omega\times\Omega$ の closed subset

$\mu = (\mu^y)_{y\in\Omega}$ は Ω 上の正則な Borel 測度の族

で次をみたすもの：

① (faithfulness) μ^y の support は E の y-切片 E^y に等しい

ここで $E^y = \{x\in\Omega \mid (x,y)\in E\}$



② (continuity) $\forall f \in C(E)$

$$\left\{\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ y & \longmapsto & \int_{E^y} f(x,y)\,d\mu^y(x) \end{array}\right.$$ は連続

さて Ω 上の correspondance が与えられると，次のようにして Hilbert C^*-bimodule X がつくれる：

C^*-環としては $A = C(\Omega)$ をとり，$X_0 \equiv C(E)$ とおくと X_0 は自然に A-A bimodule になる

$$(a\cdot f\cdot b)(x,y) = a(x)\, f(x,y)\, b(y)$$

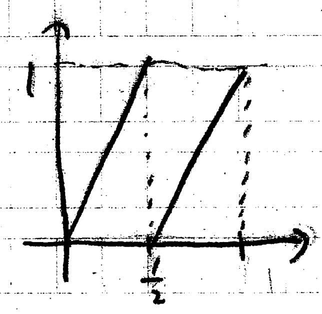
ここで $a, b \in A = C(\Omega)$, $f \in X_0 = C(E)$

X_0 にある A値内積 $(\ |\ )_A$ を積分で入れる:

$$(f|g)_A(y) = \int_{E^y} f(x,y)\, g(x,y)\, d\mu^y(x)$$

X_0 の完備化を X とすると X は Hilbert C^*-bimodule になる。特に左作用 $\phi : A \to \mathcal{L}_A(X_0)$ はかけそのもの $\phi(a)f = af$ である。

$\boxed{\text{例1}}$ $\Omega = [0,1]$



E は $y=2x$ と $y=2x-1$ のグラフを $\Omega\times\Omega$ の中で制限したもの。

μ^y は E^y 上の counting measure

この時 $\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_2$

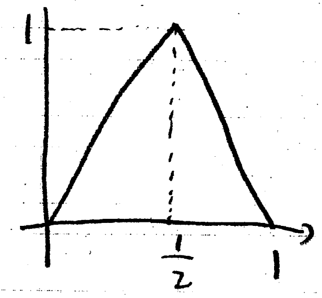
gauge action による fixed point alg は $\mathcal{O}_X^{\mathbb{T}} \cong M_{2^\infty}$

だがそれは $B_n = C([0,1], M_{2^n}(\mathbb{C})) \ni f \xmapsto{\varphi_n} \varphi_n(f) \in B_{n+1}$

$$(\varphi_n(f))(t) = \begin{pmatrix} f(\frac{1}{2}t) & 0 \\ 0 & f(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$ とうめこんだ

極限 $\varinjlim_n B_n$ になっている。

$\boxed{例2}$ $\Omega = [0,1]$



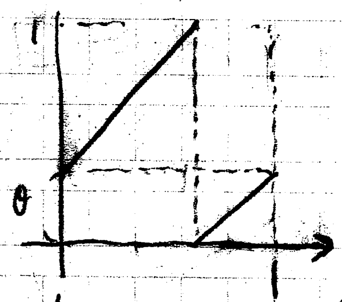
Eは左の図のようなテント写像のグラフとする。

$$\begin{cases} \mu^y = \delta_{\frac{y}{2}} + \delta_{1-\frac{y}{2}} & (y \neq 1) \\ \mu^1 = 2\delta_{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$X = C(E)$ は右Hilbert A-module として有限生成ではない。テントの頂点が local homeo になっていないのが原因である。

$\boxed{例3}$ $\Omega = \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

homeo. $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ を θ 回転とする; $h(x) = x + \theta \pmod 1$



E を h のグラフとする。

h がひきおこす $A = C(\mathbb{T})$ 上の自己同型を α とすると、$X = {}_\alpha A$ で $\mathcal{O}_X \cong A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ は無理数回転環である。

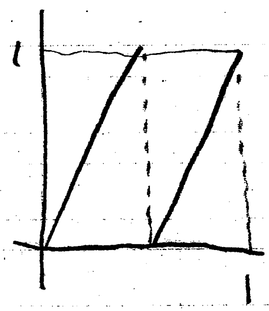
$\boxed{例4}$ $\Omega = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $n \geq 2$.

連続関数 $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ を $h(z) = z^n$ とするとこれは local homeo である。μ^y は E^y の counting measure.

$\mathcal{O}_X^{\mathbb{T}}$ は n^∞ 型の Bunce-Deddens algebra で,

$K_0(\mathcal{O}_X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$, $K_1(\mathcal{O}_X) \cong \mathbb{Z}$

注 $n=2$ の時



$\boxed{\text{例4}}$ と $\boxed{\text{例1}}$ は $\Omega=[0,1]$ か $\Omega=\mathbb{T}$ を使うか違うだけで h はほとんど同じ写像であるが構成した $\mathcal{O}_X$ も $\mathcal{O}_X^{\mathbb{T}}$ もかなり違ってくるのは、$A=C[0,1]$ か $A=C(\mathbb{T})$ かが反映するわけである。

$\boxed{\text{例5}}$ (例4の conjugate bimodule)

$\Omega=\mathbb{T}$

$E^*=\{(z^n, z)\in\Omega\times\Omega \mid z\in\Omega\}$

$X^*=C(E^*)$ は $\boxed{\text{例4}}$ の bimodule X の conjugate

$\mathcal{O}_X^{\mathbb{T}}\cong C(\text{Solenoid})$ で $\mathcal{O}_X\cong \underset{\text{ずらし}}{C(\text{Solenoid})\rtimes\mathbb{Z}}$

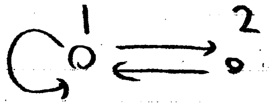
この $\mathcal{O}_X$ は simple にならず多くの ideal をもつ

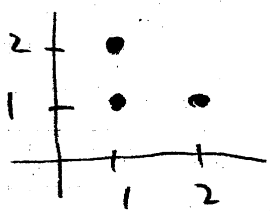
$K_0(\mathcal{O}_X)\cong\mathbb{Z}$, $\quad K_1(\mathcal{O}_X)\cong\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$

注 一般に correspondence $E\subset\Omega\times\Omega$ の座標を入れかえた $E^*=\{(y,x)\in\Omega\times\Omega \mid (x,y)\in E\}$ からは bimodule $X=C(E)$ の conjugate bimodule $X^*=C(E^*)$ ができる。しかしそれらからつくられた $\mathcal{O}_X$ と $\mathcal{O}_{X^*}$ は一般にひどく違うものであるが K-理論的な duality は期待される。

例6 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Omega = \{1, 2\}$

$E = \{(1,1), (1,2), (2,1)\} \subset \Omega \times \Omega$





$A \sim C(\Omega) = \mathbb{C}^2$

$X = C(E)$

この時 $\mathcal{O}_X$ は Cuntz-Krieger 環 $\mathcal{O}_{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$ と同型

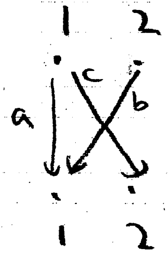
ただし $\mathcal{O}_X$ と $\mathcal{O}_{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$ の生成元は次のようにとりかえることで同一視できている

$\mathcal{O}_{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = C^*(S_1, S_2)$, $P_i = S_i S_i^*$

$a = (1,1)$, $b = (1,2)$, $c = (2,1)$ とおくと

$\mathcal{O}_X = C^*(T_a, T_b, T_c)$

$$T_a = T_{(1,1)} = S_1 P_1$$
$$T_b = T_{(1,2)} = S_1 P_2$$
$$T_c = T_{(2,1)} = S_2 P_1$$



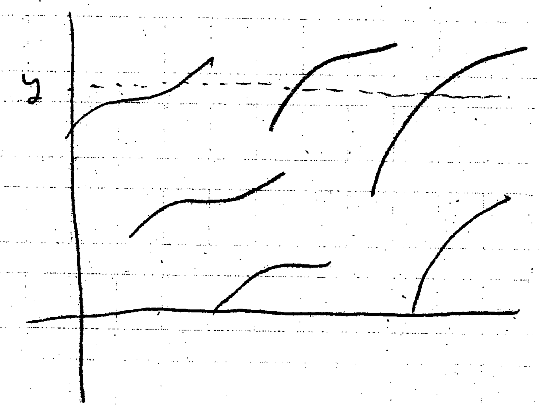
例7 上と同様に考えて $\Omega = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ で $E = \Omega \times \Omega$　$X = C(E)$ とすると $\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_n$

ここで Ω を一般の位相空間にかえることで連続的な Cuntz 環ができる。$\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_{\{1,2,\cdots,n\}}$ とかくなら、$\mathcal{O}_{\mathbb{T}}$ や $\mathcal{O}_{[0,1]}$ や $\mathcal{O}_{S^1}$ も考えられる。

$\boxed{\text{Lemma 1}}$ Ωを compact T_2-空間, (E, μ^y)を Ω上の correspondance とする。$E \ni (x,y) \longmapsto x \in \Omega$ と $E \ni (x,y) \longmapsto y \in \Omega$ が local homeomorphism と仮定する。μ^yとして y切片 E^y 上の counting measure をとる

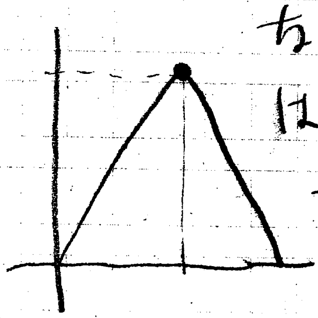
$\Longrightarrow$ $X = C(E)$ は右 Hilbert C^*-module として有限生成になる。

注



この時 y切片 E^y は有限 discrete になっているから basis がとれる。

注 テント写像のように local homeomorphism にならない点がある時は有限 basis はとれないが、可算 basis ならとれる。

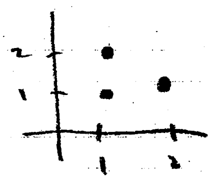


その具体的な構成は梶原氏のヒルベルト双加群について (II) を参照してください。

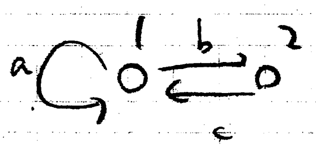
$\boxed{3}$ bimodules と path algebras

$\mathcal{O}_X$ の gauge action による不動点環 $\mathcal{O}_X^{\mathbb{T}}$ は subfactor の議論にでてきた path algebra 風の記述ができる。以下 Ω を compact T_2-空間 (E, μ) を Ω 上の correspondence で $\boxed{2}$ の Lemma 1 にあるような "local homeo." の仮定をおく。そうでなくても成り立つものももちろんあるが。頭の中では最も簡単な例である Cuntz-Krieger 環 $\mathcal{O}_{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)}$ のようなものを描いてくれればよいが必ずしもそんな離散的なものでない連続的な場合にこそ興味がある。

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \Omega = \{1, 2\}$



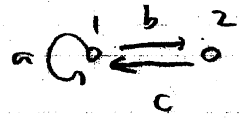
$A = C(\Omega) \cong \mathbb{C}^2$

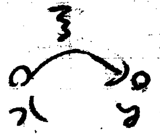


$E = \{ \underset{a}{(1,1)}, \underset{b}{(1,2)}, \underset{c}{(2,1)} \} \subset \Omega \times \Omega$

● 点 Ω には, C^*-環 $A = C(\Omega)$ を対応させる.

● 辺 $E \subset \Omega \times \Omega$ には, bimodule $X = C(E)$ を対応させる



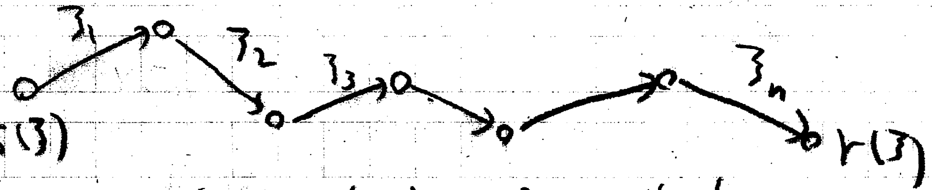


$\xi = (x, y) \in E$
の時 $x = s(\xi)$, $y = r(\xi)$ とおく

● 長さ n の path の空間 P_n には bimodule X の n コのテンソル積が対応する

$$C(P_n) \cong \underbrace{X \otimes_A \cdots \otimes_A X}_{n\text{コ}}$$

$$P_n \underset{\mathrm{def}}{\equiv} \{\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in E^n \mid r(\xi_1) = s(\xi_2), \cdots, r(\xi_{n-1}) = s(\xi_n)\}$$



は長さ n の(辺がつながる) path の空間だが,
$C(P_n)$ 上には次のようにして自然に A-A bimodule の構造が入る

$$(a \cdot f \cdot b)(\xi) = a(s(\xi)) f(\xi)\, b(r(\xi))$$

$$(f \mid g)_A(x) = \sum_{\substack{\xi \in P_n \\ r(\xi) = x}} \overline{f(\xi)}\, g(\xi)$$

ここで $f, g \in C(P_n)$,
$a, b \in A = C(\Omega)$, $x \in \Omega$

$\boxed{\text{Lemma 2}}$ 右Hilbert A-moduleとして

$$C(P_n) \cong \underbrace{X \otimes_A \cdots \otimes_A X}_{n^2}$$

__Proof.__ $\varphi : X \otimes_A \cdots \otimes_A X \longrightarrow C(P_n)$ を

$$\begin{array}{ccc} \Psi & & \Psi \\ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n & \longmapsto & f \end{array}$$

を $f(\xi_1, \cdots, \xi_n) \underset{\mathrm{def}}{=} f_1(\xi_1) \cdots f_2(\xi_n)$

で与えればよい。relative tensorの性質

$f_1 a \otimes f_2 = f_1 \otimes a f_2$ はちょうど

pathでいうところの道がうまくつながれて

いるという $r(\xi_1) = s(\xi_2)$ という条件に対応して,

うまく整合している。■

㊟ このφのonto性をいうのに，今の所，Eが

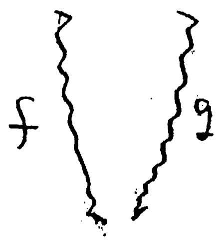
"local homeo"の性質からでる Xが有限生成

であることを本質的に(今の所)使っている。

連続なcorrespondanceにもpath algebraを定義したい。

Def (n段目のpath algebra)

$$\mathcal{F}_n = K_A(\underbrace{X\otimes_A \cdots \otimes_A X}_{n\text{つ}}{}_A)$$



$$f = f_1\otimes\cdots\otimes f_n \in X^{\otimes n} \cong C(P_n)$$
$$g = g_1\otimes\cdots\otimes g_n \in X^{\otimes n} \cong C(P_n)$$

$$\theta_{f,g} = S_f S_g^* = S_{f_1}S_{f_2}\cdots S_{f_n}S_{g_n}^*\cdots S_{g_1}^*$$

ここで $\theta_{f,g}$ は $\theta_{f,g}(h) = f(g|h)_A$ となる $X^{\otimes n}$上の"rank one" operatorである。

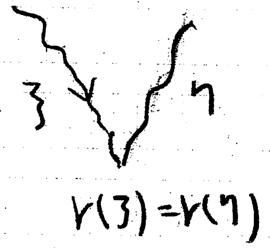
注 有限グラフの時のようにdiscreteでないので、各 $f_i, g_i \in X = C(E)$ は もはや辺ではなくそれらを"平均化"した辺上の関数でしかない。同様に $f, g \in X^{\otimes n}$ も もはや長さnのpathではなくそれらを"平均化"したpath上の関数でしかない。それでもpath algebraのような《絵》をかいてウソをついているが誤解はないでしょう。

n段目の path algebra $\mathfrak{F}_n \equiv K(X^{\otimes n})$ を

groupoid C*-環としても実現しておこう。

Def 長さnのpathの空間 $\mathcal{P}_n$ に同値関係〜を

先っぽが同じでいれる。



$$\xi \sim \eta \underset{\text{def}}{\iff} r(\xi) = r(\eta)$$

この同値関係からきまる $\mathcal{P}_n$ 上のgroupoidを

$\mathcal{R}$ とかく。つまり

$$\begin{cases} \mathcal{R} \underset{\text{def}}{=} \{(\xi,\eta) \in \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n \mid \xi \sim \eta\} \\ (\xi,\eta)\cdot(\eta,\zeta) = (\xi,\zeta) \\ (\xi,\eta)^{-1} = (\eta,\xi) \end{cases}$$

すると reduced group C*-algebra $C^*_r(\mathcal{R})$ が

考えられるが それは $f, g \in C(\mathcal{R}) \subset C^*_r(\mathcal{R})$

に対し
$$(f * g)(\xi,\zeta) = \sum_\eta f(\xi,\eta)\, g(\eta,\zeta)$$
$$(f^*)(\xi,\eta) = \overline{f(\eta,\xi)}$$

Lemma 3 Path algebra $\mathfrak{F}_n = K(X^{\otimes n})$ は上でつくった groupoid C^* 環 $C_r^*(R)$ と同型になる。$K(X^{\otimes n}) \cong C_r^*(R)$

<u>Proof</u> $X^{\otimes n} \cong C(P_n)$ より

$\mathfrak{F}_n = K(X^{\otimes n}) \cong C(P_n) \otimes_A C(P_n)^*$

$f_1, f_2 \in X^{\otimes n} \cong C(P_n)$ とみなす

$f \in C(R) \subset C_r^*(R)$ を

$f(\xi, \eta) = f_1(\xi) \overline{f_2(\eta)}$ できめる

$\beta : K(X^{\otimes n}) \longrightarrow C_r^*(R)$ を上できめた

$\beta(\theta_{f_1, f_2}) = f$ とおくと、これは

全体に well-defined に拡張できる。簡単なので例えば β が積を保つことをみてみよう

$g_1, g_2 \in X^{\otimes n} \cong C(P_n)$ に対し同様に

$g(\xi, \eta) = g_1(\xi) \overline{g_2(\eta)}$ できめると

$\beta(\theta_{f_1,f_2}\cdot\theta_{g_1,g_2}) = f*g$ を示せばよい

実際

$$\theta_{f_1,f_2}\cdot\theta_{g_1,g_2} = \theta_{f_1(f_2|g_1)_A,\, g_2}$$ なので

$\beta(\theta_{f_1,f_2}\cdot\theta_{g_1,g_2})(\xi,\eta)$ (ここで $(\xi,\eta)\in R$ つまり $r(\xi)=r(\eta)$)

$$= (f_1(f_2|g_1)_A)(\xi)\,\overline{g_2(\eta)}$$

$$= f_1(\xi)(f_2|g_1)_A(r(\xi))\,\overline{g_2(\eta)}$$

$$= \sum_{\{\alpha\in P_n \mid r(\alpha)=r(\xi)\}} f_1(\xi)\overline{f_2(\alpha)}g_1(\alpha)\overline{g_2(\eta)}$$

一方

$(f*g)(\xi,\eta)$

$$= \sum_{\{\alpha\in P_n \mid \xi\sim\alpha,\ \alpha\sim\eta\}} f(\xi,\alpha)g(\alpha,\eta)$$

$$= \sum_{\{\alpha\in P_n \mid r(\alpha)=r(\xi)\}} f_1(\xi)\overline{f_2(\alpha)}g_1(\alpha)\overline{g_2(\eta)}$$

④ bimodule X からつくられた C^*-環 $\mathcal{O}_X$ と groupoid Γ からつくられた C^*-環 $C_r^*(\Gamma)$

ここでは $\mathcal{O}_X$ が groupoid C^*-環 $C_r^*(\Gamma)$ と同型になるような groupoid Γ の構成を考えよう。

$\mathcal{O}_X$ の gauge action による fixed point algebra $\mathcal{O}_X^{\mathbb{T}}$ は ③ でやった path algebra の極限と一致する

$$\mathcal{O}_X^{\mathbb{T}} \cong \varinjlim_n \mathcal{F}_n$$

ここで $\mathcal{F}_n = \mathcal{K}(X^{\otimes n})$。

よって ③ でつくった長さ n の path 空間 P_n 上の同値関係のつくる groupoid R_n の極限も考えられ，

$$\mathcal{O}_X^{\mathbb{T}} \cong C_r^*\left(\bigcup_n R_n\right)$$

となり，さらに 3つ組として次は同型にできる

$$(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X^{\mathbb{T}}, A) \cong \left(C_r^*(\Gamma), C_r^*\left(\bigcup_n R_n\right), A\right)$$

以下でもΩはcompact T_2-空間とし，(E,μ)をΩ上のcorrespondanceでLemma 1のような"local homeo"の条件を仮定する。

$\boxed{\text{Def}}$ $E \subset \Omega\times\Omega$を辺とみて，(片側) shift力学系$(\Lambda_+, \sigma_+)$をつくろう。まず$\Lambda_+$は無限片側pathのつくる空間とする

$$\Lambda_+ = \{ \xi = (\xi_n)_n \in E^{\mathbb{N}} \mid r(\xi_n) = s(\xi_{n+1}),\ n \in \mathbb{N} \}$$

これはcompact T_2-spaceになり，このΛ_+上の片側shift $\sigma_+ : \Lambda_+ \longrightarrow \Lambda_+$を通常通り

$$(\sigma_+(\xi))_n = \xi_{n+1}$$

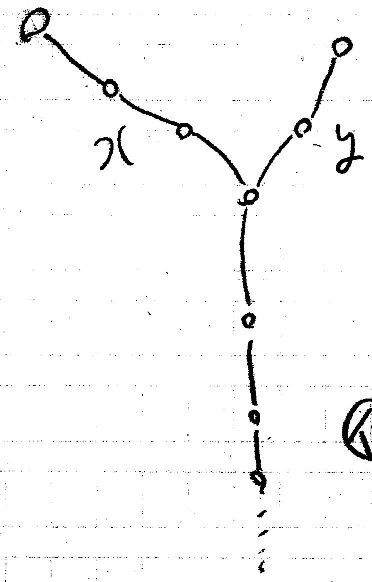
で入れると，σ_+はlocal homeomorphismになる。

例　$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$で$\Omega = \{1,2\}$，$E = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$とすれば，$(\Lambda_+, \sigma_+)$は普通のBからきまる片側のMarkov shiftそのもの。よって連続のEでも何か力学系をきめる《ルール》とみなせる。

$\boxed{\text{Def}}$ 力学系 (Λ_+, σ_+) から r-discrete groupoid

$\Gamma = \Gamma(\Lambda_+, \sigma_+)$ を次できめる：

$$\Gamma \underset{\text{def}}{\equiv} \left\{ (x, n, y) \in \Lambda_+ \times \mathbb{Z} \times \Lambda_+ \;\middle|\; \begin{matrix} \exists k, l \geqq 0, n = k - l \\ \sigma_+^{k}(x) = \sigma_+^{l}(y) \end{matrix} \right\}$$



nだけずらすと tailが同じになるような無限pathのpairの全体

(例) $\sigma_+^{3}(x) = \sigma_+^{2}(y)$

$n = 1 = 3 - 2$

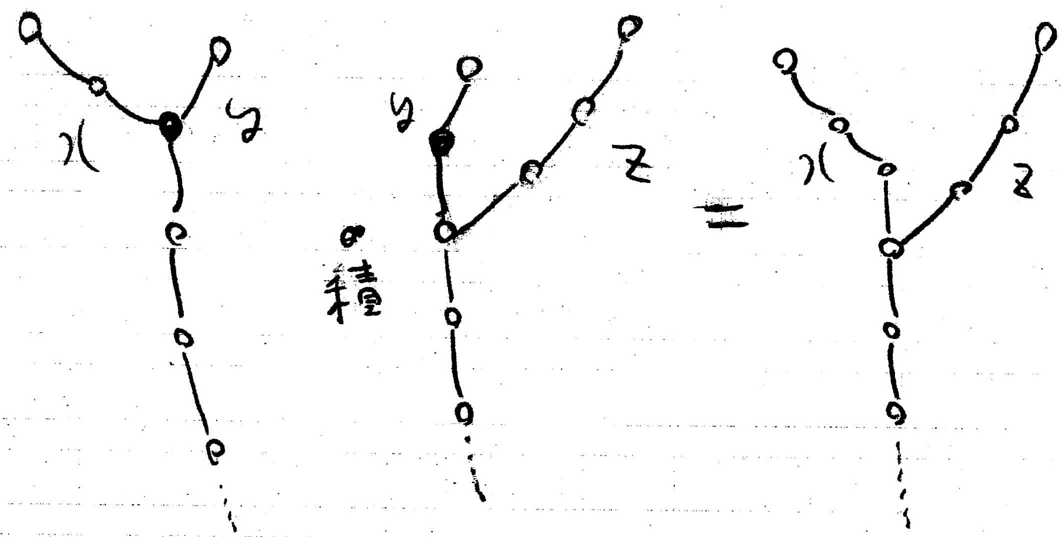
$\sigma_+^{1}(x)$ と y は tailが同じ

groupoidの構造は次で入れる

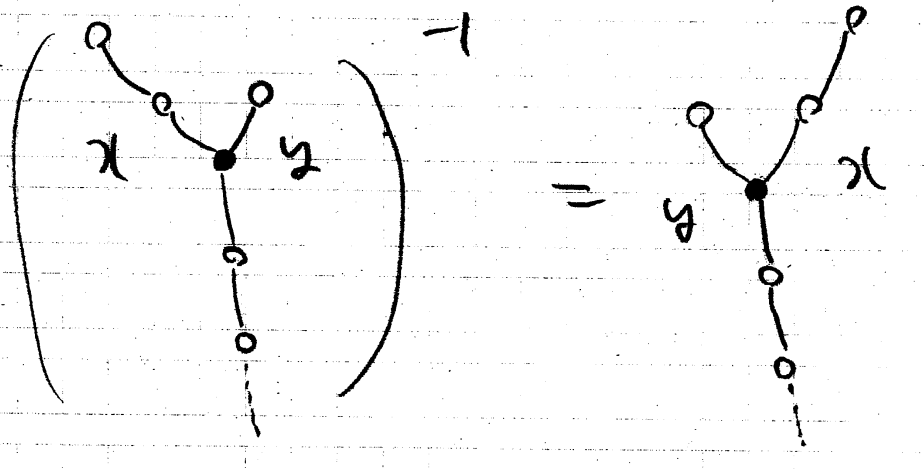
$$\begin{cases} r(x, k, y) = x \\ s(x, k, y) = y \\ (x, k, y) \cdot (y, l, z) = (x, k+l, z) \\ (x, k, y)^{-1} = (y, -k, x) \end{cases}$$

ここで，$(x, k, y),\ (y, l, z) \in \Gamma$

演算はpathの絵でかける：



$$(x, 1, y) \cdot (y, -2, z) = (x, -1, z)$$

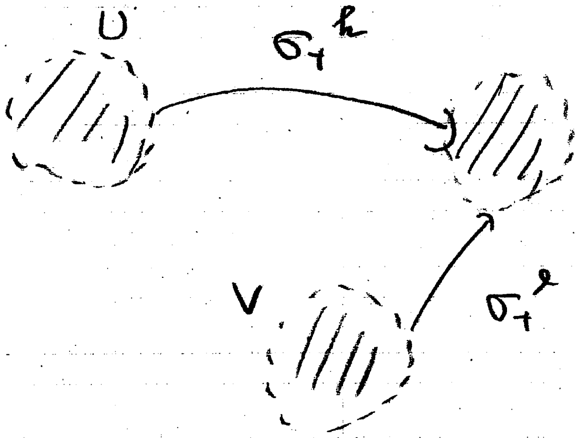


$$(x, 1, y)^{-1} = (y, -1, x)$$

これをみればずらさずにtailが同じものはsubgroupoidを R をつくりその中にさらに R_n が入っている；$R_n \coloneqq \{(x, 0, y) \in \Gamma \mid \sigma_+^n(x) = \sigma_+^n(y)\}$

Γ に位相は open set の basis を次で与えて

きめよう。



$k, l = 0, 1, 2, 3,$ とし

$U, V \subset \Lambda_+$: open set で

$\sigma_+^k(U) = \sigma_+^l(V)$ となるものに対し,

$$\mathcal{U}(U, V, k, l) = \left\{ (x, k-l, y) \in \Gamma \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in U,\ y \in V \\ \sigma_+^k(x) = \sigma_+^l(y) \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ (x, k-l, (\sigma_+^l|_U)^{-1} \sigma_+^k(x)) \;\middle|\; x \in U \right\}$$

また Γ の Haar system は counting measure

で与える。

この時 reduced groupoid C^*-環 $C_r^*(\Gamma)$ の演算はその中の dense な subalgebra $C_{00}(\Gamma)$ の元 f と g に対して次のように与えられる；

$$\begin{cases} (f * g)(\gamma) = \sum_{\gamma_1 \gamma_2 = \gamma} f(\gamma_1) g(\gamma_2) \\ f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Theorem}}$ (梶原-綿谷, Deaconu [D])

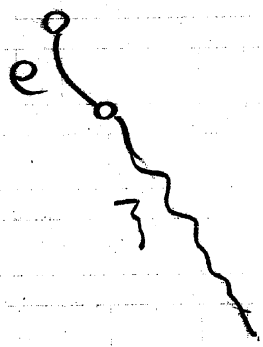
$\varphi : \mathcal{O}_X \longrightarrow C_r^*(\Gamma)$ という

同型写像が存在する。

<u>Proof</u>. $f \in X = C(E)$ に対し S_f は $\mathcal{O}_X$ の生成元なので $\varphi(S_f) \in C_{00}(\Gamma) \subset C_r^*(\Gamma)$ をきめればよい。ここで注意が必要なのは E は連続なので S_f は辺 $e \in E$ の creation operator "S_e" を関数 f でならして「積分形」"$S_f = \int_{e \in E} f(e) S_e \, de$" のようなものになっていることである。

きめ方は

$$\varphi(S_f)(x,k,y)=\begin{cases} f(e) & \left(\begin{array}{l}(x,k,y)=(e\cdot\gamma,1,\gamma)\\ e\in E\\ \text{という形}\end{array}\right)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$



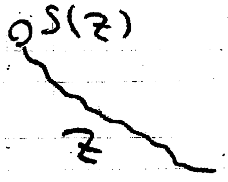
$x=e\cdot\gamma$

$y=\gamma$

$\varphi(S_f)$は 辺eの creation operatorに 対応するものを はりあわせたようになっている

また $a\in A=C(\Omega)\subset\mathcal{O}_\lambda$ においては

$$\varphi(a)(x,k,y)=\begin{cases} a(s(z)) & \left(\begin{array}{l}(x,k,y)=(z,0,z)\\ \text{という形}\end{array}\right)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$



≪References≫

[C] J. Cuntz, Simple C^*-algebras generated by isometries, Comm. Math. Phys. 57 (1977), 173–185

[C-K] J. Cuntz and W. Krieger, A class of C^*-algebras and topological Markov chains, Invention. Math. 56 (1980), 251–268

[D] V. Deaconu, Generalized solenoids and C^*-algebras to appear in Pacific J. Math.

[K] Y. Katayama, Generalized Cuntz algebra $\mathcal{O}_N^M$, R.I.M.S. kokyuroku 858 (1994), 87–90.

[KPW] T. Kajiwara, C. Pinzari and Y. Watatani, Ideal structure and simplicity of the C^*-algebras generated by Hilbert bimodules J. Funct. Anal. 159 (1998), 295–322.

[KW] T. Kajiwara and Y. Watatani, Hilbert C^*-bimodules and continuous Cuntz-Krieger algebras considered by Deaconu, preprint.

[P] M. Pimsner, A class of C^*-algebras generalizing both Cuntz-Krieger Algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$, Free Probability theory, Fields Institute Communications 12 (1997), AMS