数理解析研究所講究録
1111 巻 1999 年 34-46

2次元Wu方程式と準超幾何関数の特異点

名大多元数理　青本和彦
三菱財団研究員　井口和基

§1. Wu方程式と準超幾何関数(QHGF) ([8],[5])

Wu方程式は，統計物理学における異種粒子の分数排他統計を支配する方程式として導入されたものである([1],[2],[3],[4].)

$$\beta' = \begin{pmatrix} \beta_{11}' , & \beta_{12}' \\ \beta_{21}' , & \beta_{22}' \end{pmatrix}$$

を 2×2 の実行列とするとき，Wuの方程式は

$$\begin{cases} w_1 - 1 = z_1 w_1^{\beta_{11}'} w_2^{\beta_{21}'} \\ w_2 - 1 = z_2 w_1^{\beta_{12}'} w_2^{\beta_{22}'} \end{cases} \tag{1.1}$$

と表わされる。$z = (z_1, z_2)$ の原点での正則解

$$\begin{cases} w_1 = F_1(z_1, z_2) \\ w_2 = F_2(z_1, z_2) \end{cases} \tag{1.2}$$

がただひとつ存在する。

$$\varphi(w) = B - (B-\beta_{11}')w_2 - (B-\beta_{22}')w_1 + G\,w_1 w_2$$

$$B = \beta_{11}'\beta_{22}' - \beta_{12}'\beta_{21}' \ , \quad G = (1-\beta_{11}')(1-\beta_{22}') - \beta_{12}'\beta_{21}'$$

とおく． QHGF（ [4], [5], [6] ）

$$F_{\beta'}(\alpha_1, \alpha_2; z_1, z_2) = \sum_{\nu_1,\nu_2 \geq 0} \frac{\Gamma(\alpha_1+\beta_{11}'\nu_1+\beta_{12}'\nu_2)\,\Gamma(\alpha_2+\beta_{21}'\nu_1+\beta_{22}'\nu_2)}{\Gamma(\alpha_1+\beta_{11}\nu_1+\beta_{12}\nu_2)\,\Gamma(\alpha_2+\beta_{21}\nu_1+\beta_{22}\nu_2)} \frac{z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2}}{\nu_1!\,\nu_2!}$$

(1.3)

は，原点の近傍で収束するベキ級数である．このとき，次の恒等式が得られる．

$$\frac{w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2}}{\varphi(w)} = F_{\beta'}(\alpha_1, \alpha_2; z_1, z_2) \qquad (1.4)$$

$$w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} = B F_{\beta'}(\alpha_1,\alpha_2; z_1, z_2) - (B-\beta_{11}')F_{\beta'}(\alpha_1,\alpha_2+1; z_1, z_2)$$
$$-(B-\beta_{22}')F_{\beta'}(\alpha_1+1,\alpha_2; z_1, z_2) + G F_{\beta'}(\alpha_1,$$

(1.5)

(1.1) は，又，写像 $T: R^2_{>0} \to R^2$

$$T\begin{cases} z_1 = \dfrac{w_1 - 1}{w_1^{\beta_{11}'} w_2^{\beta_{21}'}} \\[2ex] z_2 = \dfrac{w_2 - 1}{w_1^{\beta_{12}'} w_2^{\beta_{22}'}} \end{cases} \qquad (1.6)$$

を定義する．逆関数 (1.2) を求めることは，写像 T の逆

を求めることに他ならない。Φのヤコビアンが 0 になることと

$$\varphi(w) = 0 \tag{1.7}$$

は同値である. $\beta_{12}'\beta_{21}'G \neq 0$ のとき, (1.7)は点 $\left(\frac{B-\beta_{11}'}{G}, \frac{B-\beta_{22}'}{G}\right)$ を中心とする双曲線を表す。

以下 次の問題を考察する.

Q1. 写像Φ の特異点の形状について. Φの逆像の点の個数について.

Q2. 関数 (1.2) 及び $F_{\beta'}(\alpha_1,\alpha_2;z_1,z_2)$ の特異点でのふるまいとモノドロミーの構造について.

Q3. $F_{\beta'}(\alpha_1,\alpha_2;z_1,z_2)$ の対称性について.

§2. W_u の方程式の対称性

W_u の方程式に働らく群 $\mathcal{G}$ は, $\mathfrak{S}_3$ を3次の対称群として, $\mathfrak{S}_3\times\mathfrak{S}_3$ と $\mathbb{Z}_2$ との半直積に同型である.

$$\mathcal{G} \cong (\mathfrak{S}_3\times\mathfrak{S}_3)\rtimes\mathbb{Z}_2$$

$\mathcal{G}$ の位数は 72. 各 $\mathfrak{S}_3$, $\mathbb{Z}_2$ の生成元は

$\mathfrak{S}_3 = \langle \sigma_1, \tau_1 \rangle$, $\langle \sigma_2, \tau_2 \rangle$

$\mathbb{Z}_2 = \langle \sigma_0 \rangle$

$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2$ は 行列 β' に働らく変換であって，次で与えられる.

$$\sigma_0 \beta' = \begin{pmatrix} \beta_{22}' & \beta_{21}' \\ \beta_{12}' & \beta_{11}' \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 \beta' = \begin{pmatrix} 1-\beta_{11}', & -\beta_{12}' \\ \beta_{21}', & \beta_{22}' \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 \beta' = \begin{pmatrix} \beta_{11}', & \beta_{12}' \\ -\beta_{21}', & 1-\beta_{22}' \end{pmatrix}, \quad \tau_1 \beta' = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\beta_{11}'}, & \dfrac{\beta_{12}'}{\beta_{11}'} \\ -\dfrac{\beta_{21}'}{\beta_{11}'}, & \dfrac{B}{\beta_{11}'} \end{pmatrix}$$

$$\tau_2 \beta' = \begin{pmatrix} \dfrac{B}{\beta_{22}'}, & -\dfrac{\beta_{12}'}{\beta_{22}'} \\ \dfrac{\beta_{21}'}{\beta_{22}'}, & \dfrac{1}{\beta_{22}'} \end{pmatrix}$$

(但し $\sigma_2 = \sigma_0 \sigma_1 \sigma_0$, $\tau_2 = \sigma_0 \tau_1 \sigma_0$)

$G_0 = \langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$ は 位数 8 の部分群である.

$G = \langle \sigma_0, \sigma_1, \tau_2 \rangle$ であって，基本関係式は,

$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \tau_2^2 = e$,

$(\sigma_0 \sigma_1)^4 = (\sigma_0 \tau_2)^4 = (\sigma_1 \tau_2)^2 = e$

又 $(\sigma_1 \tau_1)^3 = (\sigma_2 \tau_2)^3 = e$

§3. β'の符号と群Gによる同値類

$$h_1 = B - \beta'_{11}, \quad h_2 = B - \beta'_{22}$$ とおく.

以下，次の非退化条件をおく.

(ND) $\quad BG\beta'_{11}\beta'_{22}(\beta'_{11}-1)(\beta'_{22}-1)h_1h_2 \neq 0$

<u>Lemma 1.</u> (ND)の下に，ある元$\sigma \in G$が存在して，

$$\sigma\beta' = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}'_{11}, & \tilde{\beta}'_{12} \\ \tilde{\beta}'_{21}, & \tilde{\beta}'_{22} \end{pmatrix} \quad \text{は}$$

$\tilde{\beta}'_{11} > 0, \ \tilde{\beta}'_{22} > 0, \ \tilde{\beta}'_{12} > 0, \ \tilde{\beta}'_{21} > 0$ をみたす.

そこで，

$$\beta'_{11} > 0, \ \beta'_{22} > 0, \ \beta'_{12} > 0, \ \beta'_{21} > 0 \qquad (3.1)$$

を仮定してよい.

(i) $\beta'_{11} > 1, \ \beta'_{22} > 1$ $\qquad$ (ii) $\beta'_{11} > 0, \ 1 > \beta'_{22}$

(iii) $1 > \beta'_{11}, \ \beta'_{22} > 1$ $\qquad$ (iv) $1 > \beta'_{11}, \ 1 > \beta'_{22}$

と分ける. さらに，h_1, h_2の符号によって

$(\mathrm{i})_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$: $\beta'_{11} > 1, \ \beta'_{22} > 1, \ \varepsilon_1 h_1 > 0, \ \varepsilon_2 h_2 > 0$

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1)$ などと記す.

又，　I　$G>0, B>0$　，II　$G>0, B<0$

III　$G<0, B>0$　，　IV　$G<0, B<0$

の~~千~~種に分け~~る~~。　このとき，

<u>Lemma 2.</u>　$\mathcal{G}$ による β' の符号の同値類は以下で与えられる。

① $\mathrm{I}_{(i)}$, $\mathrm{I}_{(iv)}$, $\mathrm{III}_{(iii)-+}$, $\mathrm{III}_{(iii)+-}$

② $\mathrm{II}_{(iv)}$, $\mathrm{III}_{(i)++}$, $\mathrm{III}_{(i)-+}$, $\mathrm{III}_{(i)+-}$

③ $\mathrm{IV}_{(i)}$, $\mathrm{III}_{(ii)--}$, $\mathrm{III}_{(iii)--}$, $\mathrm{III}_{(iv)}$
$\mathrm{IV}_{(iii)}$, $\mathrm{IV}_{(ii)}$

④ $\mathrm{IV}_{(iv)}$, $\mathrm{III}_{(i)--}$

(注)　$\mathrm{I}_{(i)} = \mathrm{I}_{(i)++}$, $\mathrm{I}_{(iv)} = \mathrm{I}_{(iv)--}$,
$\mathrm{II}_{(iv)} = \mathrm{II}_{(iv)--}$, $\mathrm{III}_{(ii)} = \mathrm{III}_{(ii)-+} \cup \mathrm{III}_{(ii)--}$
$\mathrm{III}_{(iii)} = \mathrm{III}_{(iii)+-} \cup \mathrm{III}_{(iii)--}$, $\mathrm{III}_{(iv)} = \mathrm{III}_{(iv)--}$,
$\mathrm{IV}_{(i)} = \mathrm{IV}_{(i)--}$, $\mathrm{IV}_{(ii)} = \mathrm{IV}_{(ii)--}$, $\mathrm{IV}_{(iii)} = \mathrm{IV}_{(iii)--}$,
$\mathrm{IV}_{(iv)} = \mathrm{IV}_{(iv)--}$

§4. $\mathcal{G}$ <u>に関する不(共)変量</u>

$$\Psi = GB\beta_{11}'\beta_{22}'(\beta_{11}'-1)(\beta_{22}'-1)h_1h_2 \qquad (4.1)$$

とおくと

$$\sigma_0 \Psi = \Psi, \quad \sigma_1 \Psi = \Psi \tag{4.2}$$

$$\tau_2 \Psi = -\beta_{22}'^{-9} \Psi$$

をみたす。 又

$$\Phi = \Phi_0 + 2\Phi_1 + 2\Phi_2 \tag{4.3}$$

$$\Phi_0 = -27\, \beta_{11}'^2 \beta_{22}'^2 (\beta_{11}'-1)^2 (\beta_{22}'-1)^2 +$$

$$+18\, \beta_{12}' \beta_{21}' (\beta_{11}'-1)(\beta_{22}'-1)(2\beta_{11}'-1)(2\beta_{22}'-1)$$

$$+ \beta_{12}'^2 \beta_{21}'^2 \{-62\beta_{11}'\beta_{22}'(1-\beta_{11}')(1-\beta_{22}') +$$

$$+8(\beta_{11}'+\beta_{22}'-\beta_{11}'^2-\beta_{22}'^2)+1\} + \beta_{12}'^4 \beta_{21}'^4,$$

$$\Phi_1 = \beta_{12}'^2 \beta_{21}' \beta_{11}' (\beta_{11}'-1)(\beta_{22}'+1)(2\beta_{22}'-1)(\beta_{22}'-2)$$

$$+\beta_{21}'^2 \beta_{12}' \beta_{22}' (\beta_{22}'-1)(\beta_{11}'+1)(2\beta_{11}'-1)(\beta_{11}'-2)$$

$$+ \beta_{12}'^3 \beta_{21}'^2 (2\beta_{22}'^2 - 2\beta_{22}' - 1)(1-2\beta_{11}')$$

$$+ \beta_{12}'^2 \beta_{21}'^3 (2\beta_{11}'^2 - 2\beta_{11}' - 1)(1-2\beta_{22}')$$

$$+ \beta_{12}'^4 \beta_{21}'^3 (2\beta_{22}'-1) + \beta_{21}'^4 \beta_{12}'^3 (2\beta_{11}'-1),$$

$$\Phi_2 = \beta_{12}'^4 \beta_{21}'^2 + \beta_{21}'^4 \beta_{12}'^2$$

とおくとき，$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi$ はすべて

$$\sigma_0\Phi=\Phi, \quad \sigma_1\Phi=\Phi, \qquad (4.4)$$

$$\tau_2\Phi=\beta_{22}'^{-6}\Phi$$

をみたす．

§5. Wu 写像の特異点

写像 T の特異点を①，②，③，④の場合に個別的にしらべる．

写像 $T: R^2_{>0} \to R^2$ の特異点集合（source において）は，

$$\Sigma: \quad \varphi(w)=0$$

で定義される双曲線である．Σ は

$$w_1-\frac{B-\beta_{11}'}{G}=\frac{\beta_{21}'}{G}t, \quad w_2-\frac{B-\beta_{22}'}{G}=\frac{\beta_{12}'}{G}t^{-1}$$

$$(-\infty<t<\infty) \qquad (5.1)$$

の形にパラメータ表示される．写像 T を Σ に制限したとき，$z=(z_1, z_2)$ 平面に像曲線 $T(\Sigma)$ が表示される．その特異点についてよく知られているように，次の事実が成り立つ．

Lemma 3. 写像 φ が安定ならば，$\varphi(\Sigma)$ の特異点は尖点(cusp)，結節点(node)のみからなる(H. Whitney の定理).

尖点は次の3次代数方程式を解くことによって求められる.

$$0=\frac{1}{\beta_{22}'-1+\beta_{21}'t}-\frac{\beta_{11}'}{B-\beta_{11}'+\beta_{21}'t}+\frac{1}{t}-\frac{1}{t+\frac{\beta_{12}'}{B-\beta_{22}'}} \tag{5.2}$$

実3次方程式は少くともひとつ実根を持つ. 実根が3個あるかどうかは(5.2)の判別式が正であるかどうかで判定すればよい. 結果は次の通り.

Prop 1. (5.2)が3個の実根を持つための必要十分条件は

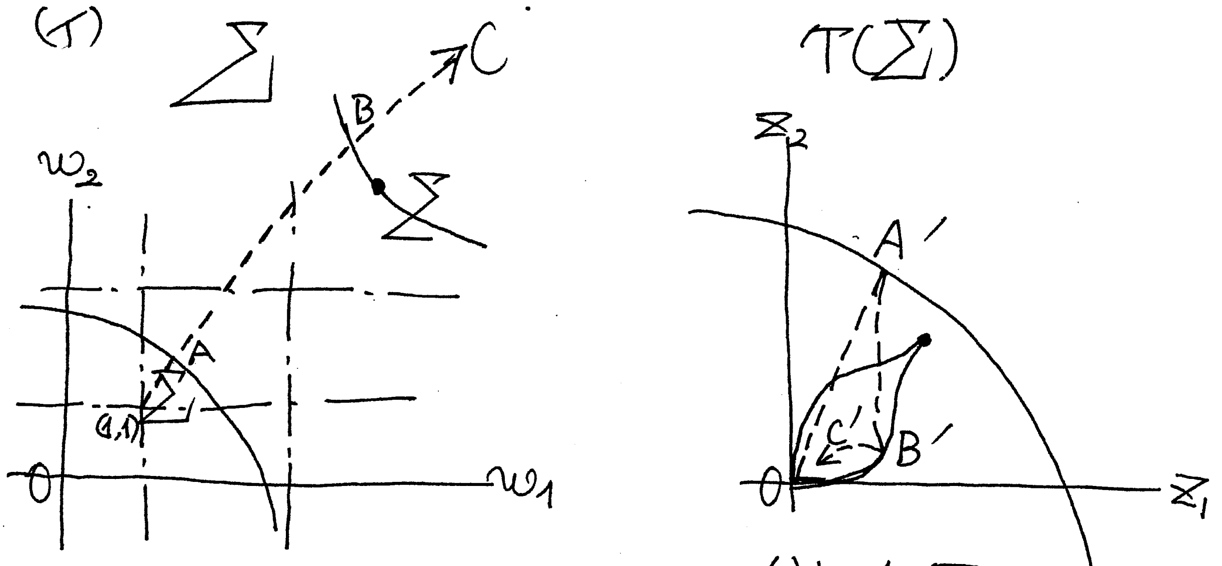
$$\Phi(\beta_{11}',\beta_{22}',\beta_{12}',\beta_{21}')>0$$

となることである.

①～④の場合に予想される特異点 Σ と $\varphi(\Sigma)$ は次のように図示される.

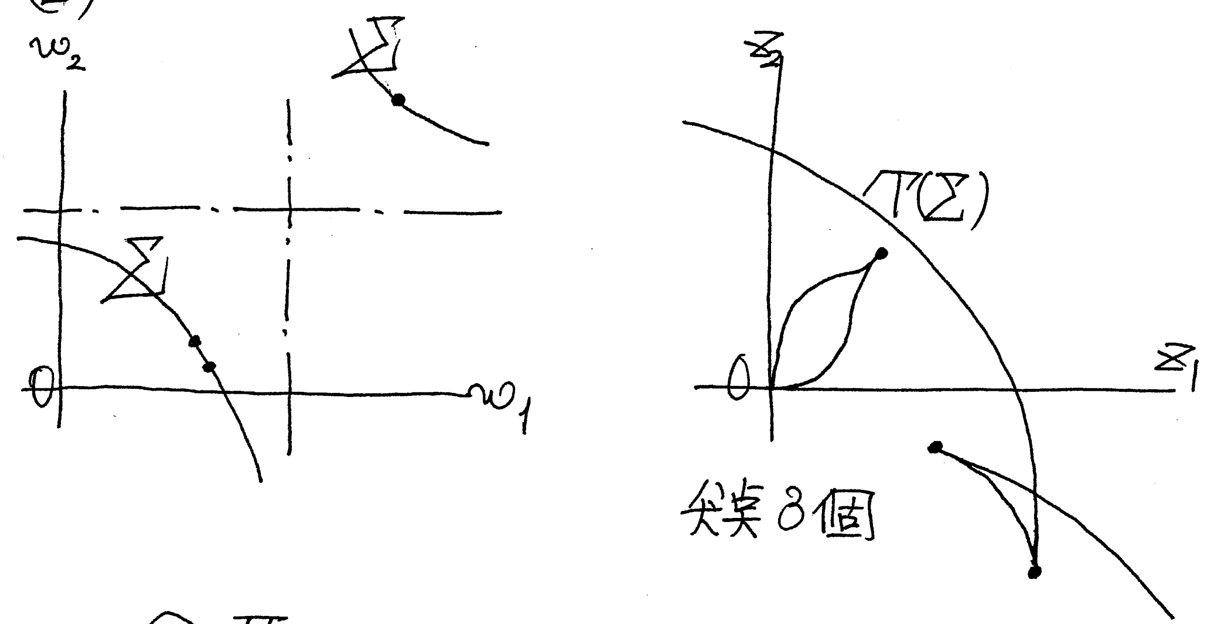
① $I_{(i)}$ の場合

(イ)



尖点 1個

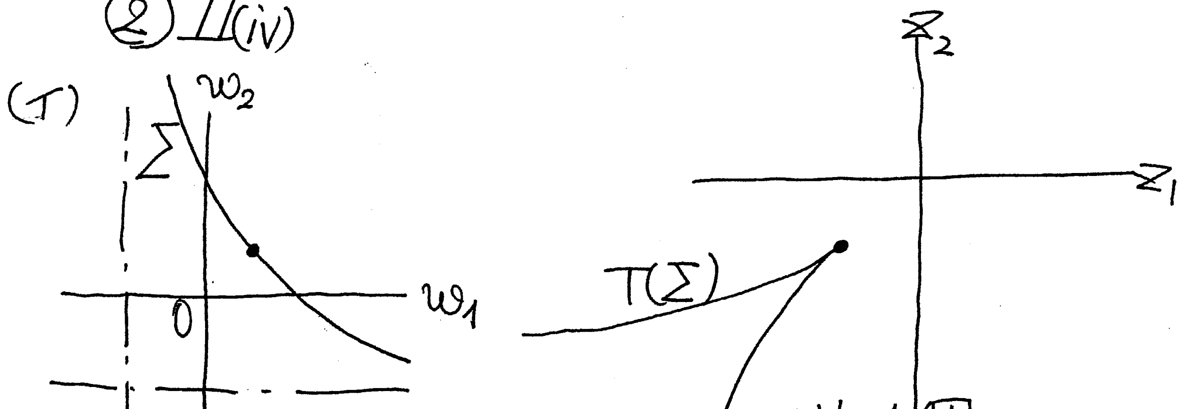
(ロ)



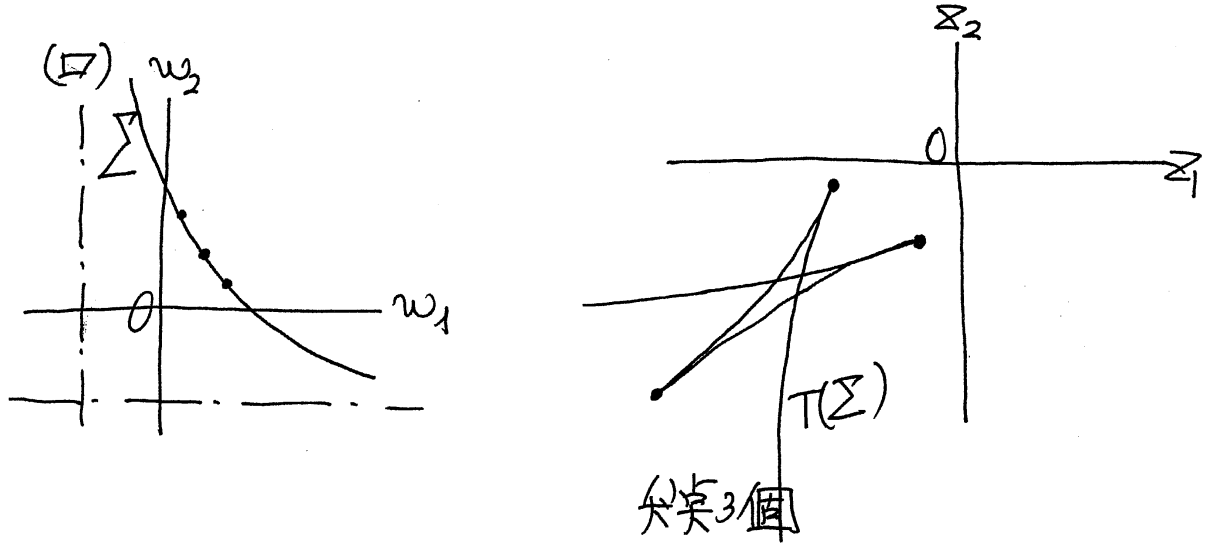
尖点 3個

② $II_{(iv)}$

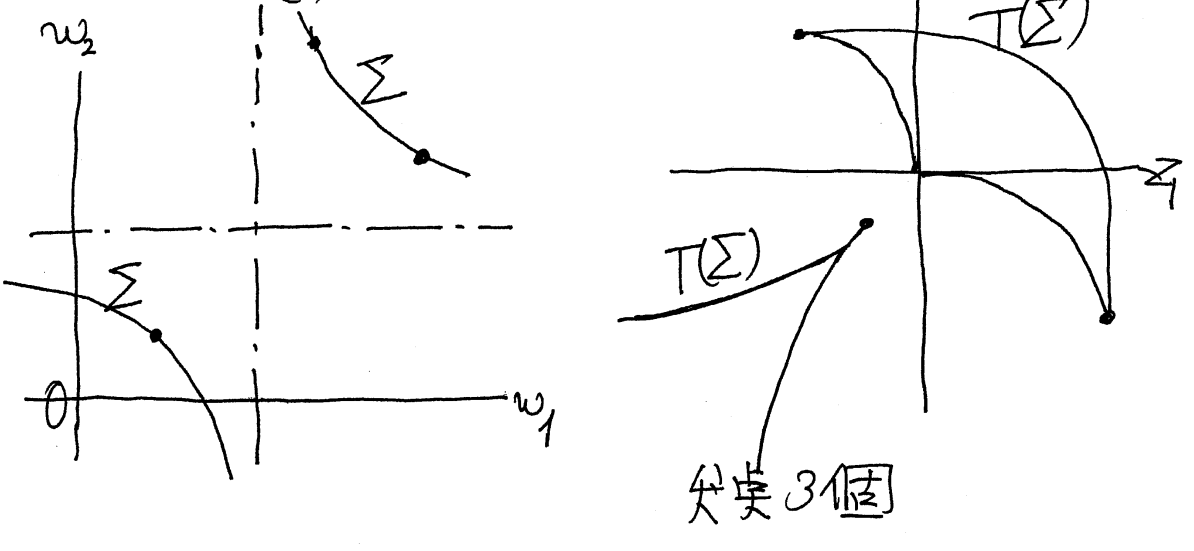
(イ)



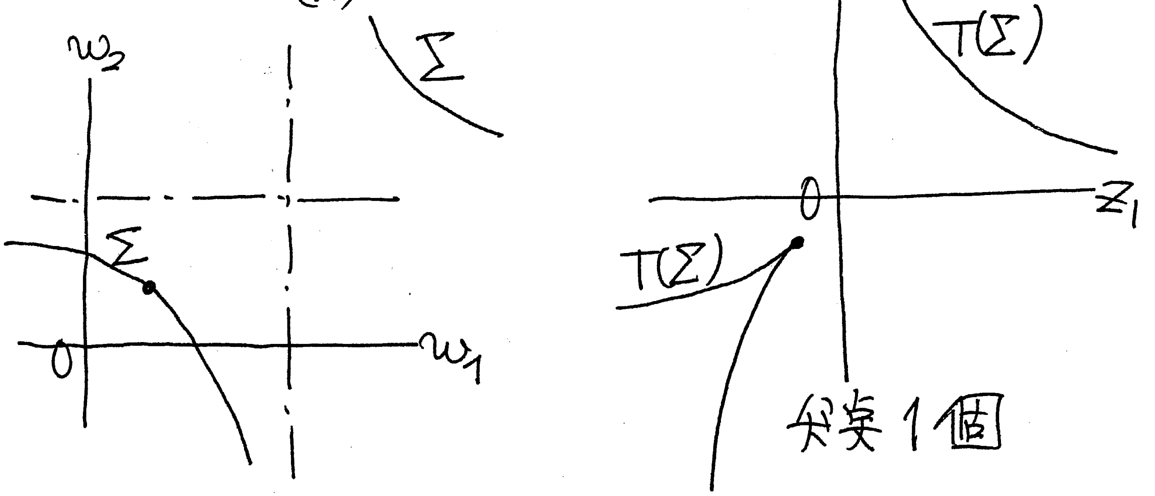
尖点 1個


(ロ)
w_2
Σ
0
w_1
z_2
0
z_1
$T(\Sigma)$
尖点3個

③ IV(i)


w_2
Σ
Σ
0
w_1
z_2
$T(\Sigma)$
z_1
$T(\Sigma)$
尖点3個

④ IV(iv)


w_2
Σ
Σ
0
w_1
z_2
$T(\Sigma)$
0
z_1
$T(\Sigma)$
尖点1個

例えば ①(イ) の図において，関数 (1.2) は $z=0$ $(w_1=w_2=1)$ から解析接続を行なうとき，w が

$$(1,1)\to A\to B\to C$$

と変化するとき，z は

$$(0,0)\to A'\to B'\to C'$$

と変化し，原点にもどって来る.

w 平面内で $w=(1,1)$ からの道を種々たどることによって，関数 (1.2) の多価性の構造がわかり，モノドロミーが決定されるであろう.

QHGF (1.3) は，Gauss の超幾何関数における Kummer の関係式に類似した変換公式を持っている. 例えば，

$$
\begin{aligned}
F_{\beta'}(\alpha_1,\alpha_2;z_1,z_2) &= F_{\sigma_0\beta'}(\alpha_2,\alpha_1;z_2,z_1)\\
&= F_{\sigma_1\beta'}(1-\alpha_1,\alpha_2;-z_1,z_2)\\
&= \frac{1}{\beta_{22}'}(-z_2)^{-\frac{\alpha_2}{\beta_{22}'}}F_{\tau_2\beta'}\left(\alpha_1-\frac{\alpha_2\beta_{12}'}{\beta_{22}'},\frac{\alpha_2}{\beta_{22}'};\tilde{z}_1,\tilde{z}_2\right)
\end{aligned}
$$

但し

$$\tilde{z}_1 = z_1(-z_2)^{-\frac{\beta_{21}'}{\beta_{22}'}}, \quad \tilde{z}_2 = -(-z_2)^{-\frac{1}{\beta_{22}'}}$$

が成り立つ. これらの関係式を使って, (1.3) の大域的ふるまいが決定されるものと思われる.

[文献]

[1] B. Sutherland, Jour. Math. Phys., 12 (1971), No.2, 251–256 ; [2] F.D. Haldane, Phys. Rev. Lett. 67 (1991), 937–940 ; [3] Y.-S. Wu, Phys. Rev. Lett. 73 (1994), 922–925 ; [4] K. Iguchi, Phys. Rev. B, 58, No.11 (1998), 6892–6911 ;
[5] K. AOMOTO and K. Iguchi, On quasi hypergeometric functions, to appear in M.A.A.
[6] —, Singularity and Monodromy of QHGF, to appear in Contemp. Math.
[7] —, Wu's equation and QHGF, to appear.

[謝辞] 福田拓生氏や石川剛郎氏からは有益な助言をいただいた.