数理解析研究所講究録
1111 巻 1999 年 97-101

2階楕円型偏微分方程式の零解の零点の次数

兵庫教育大学　渡辺金治 (Kinji Watanabe)

1 次数の有限性

$A(x\,;\partial/\partial x)$ を $\mathbf{R}^d$ の有界領域 Ω で定義された微分作用素で次の形のものとする。

$$A(x\,;\partial/\partial x)=\sum_{j,k=1}^{d}a_{j,k}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}+\sum_{j=1}^{d}b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+c(x). \tag{1}$$

ここで係数はすべて $\overline{\Omega}$ で smooth とし、$d\times d$ 行列 $(a_{j,k}(x))_{1\le j,k\le d}$ は実、対称、正定値と仮定する。 また Ω は smooth boundary $\partial\Omega$ の片側にあるものとする。この時

$$A(x\,;\partial/\partial x)u=0 \qquad \text{in} \qquad \Omega$$

の自明でない解の Ω での零点の次数の有限性は良く知られている。さらに u が境界条件、例えば

$$u=0 \qquad \text{on} \qquad \partial\Omega$$

を満たせば $\partial\Omega$ での零点の次数の有限性も得られている。

その証明方法として、Carleman タイプ の L^2 - 評価式を用いる方法が有効であるが、その他にも $A=\sum_{j=1}^{d}\partial^2/\partial x_j^2=\Delta$ の場合

$$v(r)=\frac{1}{2}\int_{S^{d-1}}u(r\theta)^2\,d\theta$$

に関する微分不等式を利用する方法がある。この方法は A が一般形 (1) の場合でも有効である。

2 熱方程式の解の零点の次数

次の方程式の自明でない解の零点の次数の有限性を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A(x;\partial/\partial x)u \qquad \text{in} \qquad \Omega\times(a,b). \tag{2}$$

例 1. $\sigma>1$, $\phi(t)=\exp(-|t|^{-\sigma})$ に対し

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\phi^{(n)}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

とする時 $(0,0) \in \operatorname{supp} u$ であり

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^2 , \qquad\qquad u(x,0) = 0 \quad \text{on} \quad \mathbf{R} .$$

u を x の関数と考える時、次の有限性定理が成立する。

定理 1. (Lin [4]) $A(x;\partial/\partial x) = A(x;\partial/\partial x)^*$ 、すなわち A は形式的自己共役とする。この時 （2）の解 u が無限次の零点 $(x_o,t_o) \in \Omega \times (a,b)$ を持てば $u(x,t_o) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega$ 。

さらに u が境界条件、例えば

$$u = 0 \qquad \text{on} \qquad \partial\Omega \times (a,b)$$

を満たす時、（2） の解の過去、未来両方向への解の一意性定理 (Lions-Malgrange [5] 参照) より $u = 0$, in $\Omega \times (a,b)$ を得、上記境界条件を満たす（2）の解の零点の次数の有限性を得る。定理１と異なる仮定のもとでの一意性定理や有限性定理については Chen [3] , Watanabe [6, 7] 等を参照。

3 固有関数の零点の次数と固有空間の次元

$d = 2$ とし固有値問題

$$(*) \begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{in} \quad \Omega \\ \quad u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

の固有値全体を、その重複度をこめて、

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots$$

と整列させる。$\{\lambda_n\}$ に付随する完全正規直交固有関数系を $\{\phi_n\}$ とする。

Ω が単連結でない場合は、 Ω_j , $(0 \leq j \leq p)$, を単連結領域とし

$$\Omega = \Omega_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{p} \overline{\Omega}_k \quad , \quad \overline{\Omega}_k \subset \Omega_0 \quad , \quad \overline{\Omega}_j \cap \overline{\Omega}_k = \emptyset \quad (1 \leq j \neq k \leq p)$$

とする。

ϕ_n の一つを ϕ とし次を定める。

$$Z = \{x \in \Omega \; ; \; \phi(x) = 0\}, \tag{3}$$

$$S = \{x \in Z \; ; \; grad\, \phi(x) = 0\}, \tag{4}$$

$$S_j = \{x \in \partial\Omega_j \; ; \; grad\, \phi(x) = 0\}. \tag{5}$$

さらに $m(x)$ を ϕ の零点 x における次数、集合 D に対して $N(D), N_c(D)$ をそれぞれ D の連結成分、コンパクトな連結成分の個数とする。

この時 ϕ の ℓ 次の零点 $\bar{x} \in \Omega$ の近くで Z は $r^\ell \sin(\ell\theta)$ の $r=0$ の近くでの零点集合と同相である事および $\bar{x} \in \partial\Omega$ の場合にも類似の性質を持つ事を利用し次の定理を得る。

定理 2.

$$
\begin{aligned}
& N(\Omega \setminus Z) \\
= \quad & 1 + N_c(Z^*) + \sum_{x\in S} \{m(x)-1\} + \sum_{x\in S_0} \frac{1}{2}\{m(x)-1\} \\
& + \sum_{k=1}^{p} \max\left(0\,,\, -1 + \sum_{x\in S_k} \frac{1}{2}\{m(x)-1\}\right).
\end{aligned}
$$

ここで Z^* は Z と同様の性質を持つ Ω_0 のある部分集合であり、Ω が単連結の場合は、$Z = Z^*$ であり、最後の項はないものと考える。

証明の方針． Ω が単連誥でない場合。$N(\Omega \setminus Z) = N(\Omega_0 \setminus Z^*)$ が成立するように Ω_0 上の関数 ϕ^* （その零点集合を Z^* ）を、各 $\overline{\Omega}_j\,,\, 1 \le j \le p,$ を 1 点、この点で ϕ^* は $\frac{1}{2}\sum_{x\in S_j}(m(x)-1)$ 次の零点を持つと考え、ϕ を修正して構成する事ができ、Ω が単連結の場合と同様の考えで定理が得られる。

Ω が単連結である時は、Z を互いに高々有現個の共有点を持つ、S^1 と同相な曲線達と、$(0,1)$ と同相 (ただし $0,1$ に対応する点は $\partial\Omega$ の点) な曲線達に分割し、Z の同一連結成分に属するこれらの曲線の個数に関する帰納法を用いて定理を示す。

この定理より

$$
N(\Omega \setminus Z) \ge 1 + m(x) \qquad \text{for} \quad x \in S
$$

を得、さらに $\phi = \phi_n$ の場合よく知られた Courant's nodal domain theorem

$$
n \ge N(\Omega \setminus Z)
$$

を用いる事により次の命題を得る。

命題 3. 固有値問題 $(*)$ の解全体を $E(\lambda)$ とする時、

$$
\dim E(\lambda_n) \le 2n - 1. \tag{6}
$$

Compact Riemann surface M with genus p 上の Laplace-Beltrami 作用素 Δ_g に対して固有値問題

$$\Delta_g u + \lambda u = 0 \qquad \text{on} \qquad \mathbf{M}$$

を考える。$\mathbf{M}$ の genus p を用いて 固有関数 u に対して

$$N(\mathbf{M} \setminus Z(u)) \geq 2 - 2p + \sum_{P \in S} (m(P) - 1), \tag{7}$$

が成立し、評価式 (6) に対して次の評価式が得られている。

$$\dim E(\lambda_n) \leq 4p + 2n - 1. \tag{8}$$

Besson [2] 参照。定理２、命題 3 は球面 S^2 上での問題に対しては成立するが $p = 1$ であるトーラス上でのそれらは成立しない。

例２．　Ω が円、正方形の時 $\dim E(\lambda_2) = 2$ 、 the canonical metric に関して S^2 の時 $\dim E(\lambda_2) = 3$, トーラス $\mathbf{R}^2 / \{ (1,0), (1/2, \sqrt{3}/2) \}$ の時 $\dim E(\lambda_2) = 6$ である。$\dim E(\lambda_2) = 3$ である平面領域を私は知らない。

$n >> 1$ の時 Bérard [1] によって Courant's nodal domain theorem の精密化がなされており、評価式 (8) は best ではない。

Dirichlet 問題のかわりに Neumann 問題を考えた場合、定理２は次の形で成立し、命題３の評価式（６）は成立する。ただし $\lambda_1 = 0$ としている。

$$\begin{aligned} & N(\Omega \setminus Z) \\ = \ & 1 + N_c(Z^*) + \sum_{x \in S} (m(x) - 1) + \sum_{x \in S_0} \frac{1}{2} m(x) \\ & + \sum_{k=1}^{p} \max \left(0, -1 + \sum_{x \in S_k} \frac{1}{2} m(x) \right). \end{aligned}$$

参考文献

[1] P. Bérard , Inégalité isopérimétriques et applications domaines nodaux des fonctions propres , Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz , 1981-1982 , Exposé XI

[2] G. Besson , Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniannes , Ann. Inst. Fourier , Grenoble , vol. 30 , 1980 , 109-128

[3] Xu-Yan Chen , A strong unique continuation theorem for parabolic equations , preprint

[4] Fang Hua Lin , A uniqueness theorem for parabolic equations , Comm. Pure Appl. Math. vol. 43 , 1990 , 127-136

[5] J.-L. Lions et B. Malgrange , Sur Unicité rétrograde dans les problèmes mixtes paraboliques , Math. Scand. , vol. 8 , 1960 , 277-286

[6] K. Watanabe , Sur l'unicité rétrograde dans les problèmes mixres paraboliques ; Cas de dimension 1 , J. Math. Soc. Japan , vol. 42 , 1990 , 377-386

[7] K. Watanabe , Remarques sur l'ensemble de zero d'une solution d'une solution d'une équation parabolique en dimension d'espace 1 , J. Math. Soc. Japan , vol. 49 , 1997 , 817-832