数理解析研究所講究録
1112 巻 1999 年 17-25

p-葉解析関数についての Marx-Strohhäcker の定理

[On the Marx-Strohhäcker Theorem in
p-valently Analytic Functions]

福井 誠一 [Seiichi FUKUI] 和歌山大学 教育学部
西郷 恵 [Megumi SAIGO] 福岡大学 理学部
池田 彰 [Akira IKEDA] 福岡大学 理学部

§1. 導入

関数 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ が単位円 $U = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ 内で正則とする. この関数の集合を A とおく. このとき, $0 \leq \alpha < 1$ として,

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha \quad (z \in U) \tag{1.1}$$

をみたす関数 $f(z) \in A$ を位数 α の星型関数といい, この関数の族を $S^*(\alpha)$ とおく. また, $f(z) \in A$ が $0 \leq \alpha < 1$ に対して,

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha \quad (z \in U) \tag{1.2}$$

をみたすとき, 位数 α の凸型関数という. この関数の族を $K(\alpha)$ とかく. 特に $S^*(0) = S^*$, $K(0) = K$ とおく.

Marx [9] と Strohhäcker [11] は次の結果を示した.

定理 A. 任意の $f(z) \in A$ について,

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0 \ (z \in U) \quad \text{ならば} \quad \mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \frac{1}{2} \ (z \in U), \tag{1.3}$$

すなわち,

$$K(0) \subset S^*\left(\frac{1}{2}\right) \tag{1.4}$$

が成り立つ.

Jack [7] はこの結果を部分的に拡張した. そして, 次の定理を MacGregor [8] が示し, さらに Willken-Feng [13] は新しい方法でこの定理を完全に証明した.

定理 B. 任意の $f(z) \in A$ について,

$$\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha \ (z \in U) \quad \text{ならば} \quad \mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \beta \ (z \in U), \tag{1.5}$$

すなわち,

$$K(\alpha) \subset S^*(\beta) \tag{1.6}$$

が成り立つ. ただし,

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{1-2\alpha}{2^{2-2\alpha}(1-2^{2\alpha-1})} & \left(\alpha \neq \dfrac{1}{2}\right), \\ \dfrac{1}{2\log 2} & \left(\alpha = \dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \tag{1.7}$$

である.

ここではこの定理を p-葉解析関数の場合にどのように拡張できるかについて調べる. 完全な拡張定理は得られなかったが, 興味ある結果が分かったのでそれを報告したい.

§2. 準備

p と n を正の整数として, U 上での正則関数 $f(z) = z^p + \sum_{k=n}^{\infty} a_{p+k} z^{p+k}$ の集合を $A_p(n)$ とおく. $0 \leq \alpha < p$ について $f(z) \in A_p(n)$ が

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha \quad (z \in U) \tag{2.1}$$

をみたすとき, 位数 α の p-葉星型関数といい, この関数の族を $S_p^*(\alpha)$ とおく. また, 同様に $0 \leq \alpha < p$ として,

$$\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha \quad (z \in U) \tag{2.2}$$

をみたす関数 $f(z) \in A_p(n)$ を位数 α の p-葉凸型関数といい, この関数の族を $K_p(\alpha)$ とする. 特に $A_p(1) = A_p$ とおく. また $A_1 = A$, $S_1^*(\alpha) = S^*(\alpha)$, $K_1(\alpha) = K(\alpha)$ である.

2 つの補題が必要である. 補題 1 は Fukui-Sakaguchi [5], Jack [7], Miller-Mocanu [10] が示した. 補題 2 は 補題 1 を使って得られた ([2] 参照).

補題 1. $n \geq 1$ とし, 関数 $w(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$ を U で正則とする. $\max_{|z|=r} |w(z)| = |w(z_0)|$ となる $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ $(r_0 < 1)$ が存在すれば, $\dfrac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)} \equiv m$ は実数で, $m \geq n$ となる.

補題 2. p と n を正の整数とし, 関数 $p(z)=p+\sum_{k=n}^{\infty} b_k z^k$ は U で正則とする. このとき, ある $z_0 \in U$ が存在して, $\mathrm{Re}\{p(z)\} > \mathrm{Re}\{p(z_0)\} \equiv \gamma\ (|z|<|z_0|)$ であれば,

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)}\right\} \begin{cases} \geq \dfrac{n\gamma}{2(\gamma-p)} & (\gamma \leq 0), \\ \leq \dfrac{n\gamma}{2(\gamma-p)} & \left(0 \leq \gamma \leq \dfrac{p}{2}\right), \\ \leq \dfrac{n(\gamma-p)}{2\gamma} & \left(\dfrac{p}{2} \leq \gamma < p\right), \end{cases} \tag{2.3}$$

となる.

注意. 補題 2 で,

$$p(z)=\frac{p-(2\gamma-p)z^n}{1-z^n}$$

とすると, (2.3) のいずれも等号が成立する.

§3. 主定理

$f(z) \in A_p(n)$ のとき,

$$p(z) \equiv \frac{zf'(z)}{f(z)} = p + pa_n z^n + \cdots, \qquad 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} = p + b_n z^n + \cdots$$

の様に形式的に展開し, 仮定 $\mathrm{Re}\left\{\dfrac{1+zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha\ (z \in U)$ があれば, $p(z)$ および $1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)} = p(z)+\dfrac{zp'(z)}{p(z)}$ は正則になる. 従って, 次の定理が得られる.

定理 1. 関数 $f(z) \in A_p(n)$ と与えられた p,α が $0 \leq \alpha < p$ および

$$\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha \quad (z \in U) \tag{3.1}$$

みたすならば

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \beta \quad (z \in U) \tag{3.2}$$

となる. ただし, β は $0 \leq \beta < p$ で

$$0 \leq \beta \leq \frac{p}{2} \quad かつ \quad \beta + \frac{n\beta}{2(\beta-p)} \leq \alpha \tag{3.3}$$

または

$$\frac{p}{2} \leq \beta < p \quad \text{かつ} \quad \beta + \frac{2(\beta - p)}{n\beta} \leq \alpha \tag{3.4}$$

をみたすとする.

この定理は, $K_p(\alpha) \subset S_p^*(\beta)$ となるための十分条件が (3.3) または (3.4) であることを示している.

証明. 背理法による.

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$$

とおくと, $p(0) = p$, $0 \leq \beta < p$ より $z = 0$ の近傍では $\mathrm{Re}\{p(z)\} > \beta$ であるから, もし $z_0 \in U$ が存在して, $\mathrm{Re}\{p(z)\} > \mathrm{Re}\{p(z_0)\} \equiv \beta$ ($|z| < |z_0|$) 成立したとすると, 補題 2 から

(i) $0 \leq \beta \leq \dfrac{p}{2}$ のとき

$$1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} = p(z_0) + \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)}$$

ゆえに

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)}\right\} \leq \beta + \frac{n\beta}{2(\beta - p)} < \alpha$$

となり, 仮定に反する.

(ii) $\dfrac{p}{2} \leq \beta < p$ のときも同様にして示される.

定理 1 で $\alpha = 0$, $p = n = 1$ とおくと, 定理 A が得られる. なお, $p \geq 2$ のときには, $n < p$ と $n \geq p$ の場合によって, 次のように異なる結果となる.

系 1. $p \geq 2$, $1 \leq n < p$ とし, $f(z) \in A_p(n)$ とする. $\mathrm{Re}\left\{1 + \dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0$ ($z \in U$) ならば $\mathrm{Re}\left\{\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$ ($z \in U$) である. すなわち, $K_p(0) \subset S_p^*(0)$ である. これは sharp な結果である.

この系の $n = 1$ の場合は Fukui [4], Sugawa [12] が示した. $n = 1$ で $S_p^*(0)$ に属するということはどんな正の数 β に対しても, $S_p^*(\beta)$ で置き換えることが出来ないことは, 具体的な関数を作って示された. 後で $1 < n < p$ の場合についても証明する.

系 2. $2 \leq p \leq n$ とする. このとき, $f(z) \in A_p(n)$ が $f(z) \in K_p(0)$ ならば

$$p \leq n \leq 2p \quad \text{のとき} \quad \mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > p - \frac{n}{2} \quad (z \in U) \tag{3.5}$$

$$2p \leq n \quad \text{のとき} \quad \mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \frac{-n + \sqrt{n^2 + 8np}}{4} \quad (z \in U) \tag{3.6}$$

となる.

特に, $n=p$ のときは次のようになる.

系 3. $f(z)$ を $f(z)\in A_p(p)$ つまり $f(z)=z^p+\sum_{k=2p}^{\infty}a_kz^k$ の形の U での正則とする. $\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0$ $(z\in U)$ ならば $\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\frac{p}{2}$ $(z\in U)$ を得る. すなわち, $K_p(0)\subset S_p^*\left(\frac{p}{2}\right)$ である. これは sharp な結果であって, 関数 $f(z)=\frac{z^p}{1-z^p}$ がそれを保証する.

系 3 は $p=1$ のとき定理 A となって, これは定理 A の一つの拡張である.

§4. sharp な評価を求めて

前節の 系 1 の $S_p^*(0)$ は sharp な評価である. 系 2 は十分条件であって, さらに sharp な評価が望まれる. 系 3 はそのままで十分評価できているが, この節での特別な場合の中に含まれる.

2 つの解析関数 $f(z),g(z)\in A_p(n)$ について,

$$f(z)=p\int_0^z\frac{g(w)}{w}dw\Longleftrightarrow 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}=\frac{zg'(z)}{g(z)} \tag{4.1}$$

であるから,

$$f(z)\in K_p(\alpha)\Longleftrightarrow g(z)\in S_p^*(\alpha) \tag{4.2}$$

となる. いま, 任意の $g(z)\in S_p^*(\alpha)$ に対して, $g_0(z)=\frac{z^p}{(1+z^n)^{2(p-\alpha)/n}}$ が一つの極値関数になり,

$$\frac{zg'(z)}{g(z)}\prec\frac{zg_0'(z)}{g_0(z)}=p\cdot\frac{p-(2\alpha-p)z^n}{1+z^n} \tag{4.3}$$

であることが知られている. ここに, 記号 $\prec$ は subordination を示す.

この $g_0(z)\in S_p^*(\alpha)$ に対して,

$$f_0(z)=p\int_0^z\frac{g_0(w)}{w}dw=p\int_0^z\frac{w^{p-1}}{(1+w^n)^{2(p-\alpha)/n}}dw\in K_p(\alpha) \tag{4.4}$$

と定義し $\mathrm{Re}\left\{\frac{zf_0'(z)}{f_0(z)}\right\}>\beta$ $(z\in U)$ となる β を求める. これは, すべての $z\in U$ における最小の β を求めることである. 条件から, $\frac{zf_0'(z)}{f_0(z)}$ は U の正則関数を示し, その調和関数 $\mathrm{Re}\left\{\frac{zf_0'(z)}{f_0(z)}\right\}$

の最小値を求めることになるから，$\min_{|z|\le r} \mathrm{Re}\left\{\frac{zf_0'(z)}{f_0(z)}\right\}$ $(0 < r < 1)$ の $r \to 1$ のときの値，または $\inf_{z\in U} \mathrm{Re}\left\{\frac{zf_0'(z)}{f_0(z)}\right\}$ を求めてもよい．従って，$|z| = 1$ つまり $z = e^{i\theta}$ として以下計算する．

いま，$f_0(z) = p\int_0^z \frac{w^{p-1}}{(1+w^n)^{2(p-\alpha)/n}}dw$, $z = e^{i\theta}$ として $f_0(e^{i\theta}) = p\left(\int_0^1 + \int_1^{e^{i\theta}}\right) = p(A+B)$ とおく．ただし，

$$A = \int_0^1 \frac{t^{p-1}}{(1+t^n)^{2(p-\alpha)/n}}dt > 0, \tag{4.5}$$

$$B = \int_1^{e^{i\theta}} \frac{w^{p-1}}{(1+w^n)^{2(p-\alpha)/n}}dw = i\int_0^\theta \frac{e^{i\alpha\theta}}{2^{(p-\alpha)/n}(1+\cos n\theta)^{(p-\alpha)/n}}d\theta. \tag{4.6}$$

よって，

$$B = i[C(\theta) + iS(\theta)], \tag{4.7}$$

$$C(\theta) = \int_0^\theta \frac{\cos\alpha\theta}{2^{(p-\alpha)/n}(1+\cos n\theta)^{(p-\alpha)/n}}d\theta, \tag{4.8}$$

$$S(\theta) = \int_0^\theta \frac{\sin\alpha\theta}{2^{(p-\alpha)/n}(1+\cos n\theta)^{(p-\alpha)/n}}d\theta \tag{4.9}$$

を得る．$\alpha = 0$ として，$\varphi(z) = \frac{zf_0'(z)}{f_0(z)}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\varphi(e^{i\theta}) &= \frac{e^{i\theta}f_0'(e^{i\theta})}{f_0(e^{i\theta})} = \frac{df_0'(e^{i\theta})/d\theta}{if_0(e^{i\theta})}\\ &= \frac{p[A+iC(\theta)]'}{ip[A+iC(\theta)]} = \frac{ipC'(\theta)}{ip[A+iC(\theta)]} = \frac{C'(\theta)}{A+iC(\theta)}.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\mathrm{Re}\{\varphi(e^{i\theta})\} = \frac{AC'(\theta)}{A^2 + C^2(\theta)}. \tag{4.10}$$

となり，この $0 \le \theta < 2\pi$ における最小値を求めればよい．ここで

$$C'(\theta) = \frac{1}{2^{p/n}(1+\cos n\theta)^{p/n}} > 0 \tag{4.11}$$

である．

いま $k = p/n$ とおくと

(1)　$k > 1$ $(p > n)$　ならば　$\min_{0\le\theta<2\pi}[\mathrm{Re}\{\varphi(e^{i\theta})\}] = 0,$

(2)　$k = 1$ $(p = n)$　ならば　$\mathrm{Re}\{\varphi(e^{i\theta})\} = \frac{p}{2},$

(3)　$0 < k < 1$ $(p < n)$　ならば　$\min_{0\le\theta<2\pi}[\mathrm{Re}\{\varphi(e^{i\theta})\}] = \frac{C'(0)}{A}$

が示される.

なぜなら, (1) は, まず (4.10) より $\mathrm{Re}\{\varphi(e^{i\theta})\}$ は正で, (4.5) より $A=\int_0^1 \frac{t^{p-1}}{(1+t^n)^{2p/n}}dt>0$, (4.11) より $C'(\theta)$ も正だから, $\lim_{\theta\to\pi/n}\varphi(e^{i\theta})=0$ となることを示せばよい.

$$C'(\theta)=\frac{1}{2^{2k}(\cos n\theta/2)^{2k}},\qquad C(\theta)=\int_0^\theta \frac{1}{2^{2k}(\cos n\theta/2)^{2k}}d\theta$$

で $t=\tan\frac{n\theta}{2}$ とおくと, $\theta\to\frac{\pi}{n}-0$ のとき $t\to\infty$ となって,

$$C'(\theta)=\frac{(1+t^2)^k}{2^{2k}}=O(t^{2k})\qquad (t\to\infty).$$

また,

$$C(\theta)=\int_0^t 2^{k-1}n^{-1}(1+t^2)^{k-1}dt=O(t^{2k-1})\qquad (t\to\infty).$$

ゆえに $k>1$ のとき, $\frac{AC'(\theta)}{A^2+C(\theta)^2}=O(t^{-2k+2})$ より $\lim_{\theta\to\pi/n}\frac{AC'(\theta)}{A^2+C(\theta)^2}=0$.

次に, (2) $k=1$ の場合には (4.5), (4.8), (4.11) より

$$A=\int_0^1\frac{t^{p-1}}{(1+t^p)^2}dt=\frac{1}{2p},\quad C(\theta)=\int_0^\theta\frac{1}{2(1+\cos p\theta)}d\theta=\frac{1}{2p}\tan\frac{p\theta}{2},\quad C'(\theta)=\frac{1}{4}\frac{1}{\cos^2(p\theta/2)}$$

であるから $\frac{AC'(\theta)}{A^2+C(\theta)^2}=\frac{p}{2}$ を得る.

(3) $0<k<1$ のとき,

$$\mathrm{Re}\{\varphi(e^{i\theta})\}=\frac{AC'(\theta)}{A^2+C^2(\theta)}\geq\frac{C'(0)}{A}\tag{4.12}$$

を示そう. (4.12) の各辺 はすべて正であるから, $A^2\left(\frac{C'(\theta)}{C'(0)}-1\right)\geq C^2(\theta)$, つまり

$$g(\theta)=A\sqrt{\frac{C'(\theta)}{C'(0)}-1}-C(\theta)\geq 0\tag{4.13}$$

を示せばよい. (4.11) より

$$g'(\theta)=A\frac{\frac{C''(\theta)}{C'(0)}}{2\sqrt{\frac{C'(\theta)}{C'(0)}-1}}-C'(\theta)$$

$$=\frac{A}{2}\frac{\frac{p\sin n\theta}{2^{p/n}(1+\cos n\theta)^{p/n+1}}2^{2p/n}}{\sqrt{\frac{2^{2p/n}}{2^{p/n}(1+\cos n\theta)^{p/n}}-1}}-\frac{1}{2^{p/n}(1+\cos n\theta)^{p/n}}$$

$$=\frac{1}{2^{p/n}(1+\cos n\theta)^{p/n}}\left\{\frac{Ap}{2}2^{2p/n}\frac{\sin^n\theta}{1+\cos n\theta}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^{2p/n}(n\theta/2)}-1}}-1\right\}$$

となり, $\tan\dfrac{n\theta}{2}=t$ とおくと, $k=p/n$ $(0<k<1)$ であるから

$$g'(\theta)=\frac{1}{2^{2k}\cos^{2k}(n\theta/2)}\left\{\frac{Ap2^{2k-1}t}{\sqrt{(1+t^2)^k-1}}-1\right\}$$

で, $t<0$ なら $g'(\theta)<0$ で $g(\theta)$ は単調減少となる. $t>0$ なら $x=t^2$ として $\dfrac{t}{\sqrt{(1+t^2)^k-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{(1+x)^k-1}{x}}}$ となるが, 関数 $h(x)=\dfrac{(1+x)^k-1}{x}$ $(x>0)$ は容易に分かるように, 単調減少で $0<h(x)<k$ である. 従って, $\dfrac{t}{\sqrt{(1+t^2)^k-1}}>\dfrac{1}{\sqrt{k}}>1$ を得る. また, 一方 A については $0<w\leq 1$ ならば $\dfrac{\Gamma(w+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(w+1)}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{w}}$ が成り立つから, (4.5) より

$$A=\int_0^1\frac{t^{p-1}}{(1+t^n)^{2p/n}}dt=\frac{1}{2n}\int_0^\infty\frac{u^{k-1}}{(1+u)^{2k}}du=\frac{1}{2n}B(k,k)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(k)}{2^{2k}n\Gamma(k+1/2)}\geq\frac{1}{2^{2k-1}n}\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

ゆえに,

$$g'(\theta)\geq\frac{1}{2^{2k}\cos^{2k}(n\theta/2)}\left\{2^{2k-1}p\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{1}{2^{2k-1}n}\frac{1}{\sqrt{k}}-1\right\}=0$$

つまり, $t>0$ で $g(\theta)$ は単調増加である. 以上より, $g(\theta)$ は $\theta=0$ で最小となり, $g(0)=0$ であるから, $g(\theta)\geq 0$. 従って, $f_0(z)=p\displaystyle\int_0^z\frac{z^{p-1}}{(1+z^n)^{2p/n}}dz$ は $k=p/n$ として, (4.12) より

$$\mathrm{Re}\{\varphi(e^{i\theta})\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{zf_0'(z)}{f_0(z)}\right\}>\frac{n\Gamma(k+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k)}$$

となる. ゆえに

命題. 任意の $f(z)\in K_p(0)$ が

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec\frac{zf_0'(z)}{f_0(z)}\tag{4.14}$$

をみたせば, $f(z)\in S_p^*(\beta)$ である. すなわち

$$K_p(0)\subset S_p^*(\beta),\qquad \beta=\frac{n\Gamma(p/n+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(p/n)}$$

である. ただし, $n\geq p$. この結果は sharp である.

注意. この命題で $p=1,\ n=2$ とすると,

$$K(0)\subset S^*\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

となり $f(z)=\tan^{-1}z$ がその sharpness を保証する.

参考文献

[1] J. Dziok and J. Stankiewicz: The order of starlikeness of the p-valent functions, *Zegyty Nauk, Politech. Rzeszowskiej Mat.* **19**(1996), 5-12.

[2] S. Fukui: On Jack's lemma and Miller-Mocanu's lemma, *Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci.* **45**(1995), 1-7.

[3] S. Fukui: On p-valently starlike functions and convex functions (in Japanese), *Univalent Functions and Briot-Bouquet Differential Equations* (Kyoto,1996), Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku **963**(1996), 23-28.

[4] S. Fukui: On p-valently α-convex functions of order β (in Japanese), *New Development of Convolution* (Kyoto,1997), Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku **1012**(1997), 20-24.

[5] S. Fukui and K. Sakaguchi: An extension of a theorem of S. Ruscheweyh, *Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci.* **29**(1980), 1-3.

[6] D.J. Hallenbeck and A.E. Livingston: Applications of extremal point theory to classes of multivalent functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **221**(1976), 339-359.

[7] I.S. Jack: Functions starlike and convex of order α, *J. London Math. Soc.* (2) **3**(1971), 469-474.

[8] T.M. MacGregor: A subordination for convex functions of order α, *J. London Math. Soc.* (2) **9**(1975), 530-536.

[9] A. Marx: Unter suchungen über schlichte Abbildungen, *Math. Ann.* **107**(1932), 40-67.

[10] S.S. Miller and P.T. Mocanu: Second order differential inequalities in the complex plane, *J. Math. Anal. Appl.* **65**(1978), 289-305.

[11] E. Strohhäcker: Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen, *Math. Z.* **37**(1933), 356-380.

[12] T. Sugawa: A property of Fukui's extremal functions, *Univalent Functions and Briot-Bouquet Differential Equations* (Kyoto,1996), Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku **963**(1996), 119-123.

[13] D.R. Willken and J. Feng: A remark on convex and starlike functions, *J. London Math. Soc.* (2) **21**(1980), 287-290.