

水平に置かれた同心二重円筒内に生じる熱対流

同志社大学工学部 水島 二郎 (Jiro Mizushima)
同志社大学工学部 林 幸子 (Sachiko Hayashi)
同志社大学工学部 足立 高弘 (Takahiro Adachi)

1 はじめに

水平に置かれた同心二重円筒間に満たされた流体中に発生する熱対流はベナール対流の特性と鉛直平板間熱対流の特徴を併せ持ち、その乱流への遷移の過程は非常に複雑である。内円筒の温度を外円筒の温度よりも高い一定の温度に保つと、その温度差がどんなに小さくても熱対流が生じる。内外円筒間の温度差が小さいとき、円筒間に生じる熱対流は円筒間隙の上部で上昇流となっており、その対流パターンは鉛直中心軸を挟んで二つの大きな循環渦からなる対流パターンであり、三日月形対流と呼ばれる。

円筒間の温度差を大きくしていくとき、温度差に比例するパラメータであるレイリー数 Ra がある臨界値 Ra_c を越えるとこの三日月形対流は不安定となりこれとは異なるパターンを持つ対流に遷移する。三日月形対流の不安定性と遷移は、円筒の内直径 D_i と内外円筒間隔 L の比で定義されるアスペクト比 $A = D_i/L$ 、流体の物性値であるプラントル数 Pr に依存して決まる。特に、アスペクト比が大きいときには、二重円筒間熱対流の不安定性はベナール対流に似た性質を持つ場合と鉛直平板間熱対流に似た性質を持つ場合の区別が明確となる。どちらの性質が現れるかはプラントル数の大きさに依存し、プラントル数が大きいときは浮力が不安定性の主な原因となるベナール対流の性質に近く、プラントル数が小さいときは流れのせん断力が不安定性の主因となる鉛直平板間熱対流の性質に近い。

アスペクト比が大きい場合、レイリー数が小さいと三日月形渦は円筒間隙の頂上部ではあまり大きな流速を持たない。レイリー数を大きくして不安定性が生じる状況を考えて、プラントル数が大きいとき浮力による不安定性が起こるが、頂上部では流体はほとんど静止しており、上下境界は曲率が小さくほとんど平板に近い。したがって、ベナール対流型の不安定性が生じるのである。また、不安定性の臨界条件は臨界レイリー数 $Ra_{c1} \sim 1707$ で与えられる。一方、プラントル数が小さいとき間隙の鉛直部（赤道部）でせん断力による不安定性が生じる。ここでは浮力は三日月形渦を作るのには寄与しているが、不安定性にはこの三日月形渦の流れ場によるせん断力が支配的である。不安定性の臨界条件は臨界グラシヨフ数 $Gr_{c2} = Ra_{c2}/Pr \sim 7800$ で与えられる。したがって、条件 $Ra_{c1} \sim Ra_{c2}$ より、プラントル数 $Pr \sim 0.22$ がこの二つの不安定性のうちいずれの不安定性が起こるかを定めるプラントル数の臨界となる。

水平同心二重円筒間熱対流について三日月形対流がベナール対流型の不安定性を起こすか鉛直平板間熱対流型の不安定性を起こすかを最初に調べたのは Walton[1] である。Walton はアスペクト比 A が非常に大きい場合について A の逆べき展開と WKB 法を用いて三日月形対流の線形安定性を調べ、プラントル数 Pr が 0.24 よりも大きいときは円筒間隙の頂上部でベナール対流型の不安定性が生じ、 $Pr < 0.24$ のときには頂上部以外のところで不安定性が生じることを示した。特に $Pr = 0$ の極限では円筒間隙の鉛直部分（赤道部）で不安定性が生じ、この場合には鉛直平板間の熱対流と同じ型の不安定性となることを示

した。Waltonの安定性の取り扱い、本質的にはKorpela[2]が調べた、水平面より傾いて置かれた温度が異なる二枚の平板間中に発生する熱対流の安定性の取り扱いとほぼ同等であり、得られた結果もほぼ同じであることが明らかとなった。

プラントル数 Pr が大きい場合 [空気 ($Pr = 0.7$) や水 ($Pr = 7$)] の二重円筒間熱対流の不安定性と遷移についての研究はこれまでに数多くなされている。Powe, Carley and Bishop[3]は空気 ($Pr = 0.7$) を用いた可視化実験により、パラメータ Ra と A の広い範囲にわたって、円筒間内の流体に発生する自然対流のパターンを調べ、パラメータ空間 (Ra, A) において自然対流のパターンの分類を行った。彼らの結果によると、アスペクト比 A が比較的小さいとき、すなわち $0 < A < 2.8$ では、 Ra がある臨界値を超えると三日月形対流は円筒の軸方向には速度をもたず鉛直中心面に対して振動する2次元振動流へと遷移し、 $2.8 < A < 8.5$ では円筒の軸方向に振動する3次元ら旋状流へと遷移する。また、 $8.5 < A$ では円筒間の上部に複数の渦をもつ2次元定常流に遷移することを示した。

Rao *et al.*[4]は空気の場合 ($Pr = 0.7$) について2次元および3次元数値シミュレーションを行い、比較的大きなアスペクト比の二重円管内熱対流の流れ場を数値シミュレーションによって調べ、三日月形対流が複数の渦をもつ流れに遷移することを示した。また、Yoo[5]は空気 ($Pr = 0.7$) の場合の数値シミュレーションをアスペクト比 $0.1 \leq A \leq 10$ の範囲で行った。かれは流れ場が2次元であると仮定して、差分近似を用いて計算を行った。その結果、小さいアスペクト比 $A = 1.25$ ではある臨界レイリー数より小さいレイリー数のときは対流は定常流で三日月形の対流のみが現れ、臨界レイリー数よりも大きくなると三日月形の対流だけでなく、内円筒の頂上部に二対2個の渦をもち、頂上部で下降流である下降2渦流も生じること、すなわち定常解として二つの解が同時に存在することを示した。中間のアスペクト比 $2.8 < A < 8.5$ と大きいアスペクト比 $A = 10$ では、ある臨界レイリー数よりも大きなレイリー数で三日月形の対流と下降2渦流が同時に存在するレイリー数の領域があり、さらに大きなレイリー数では三日月形対流が不安定となり、内円筒の頂上部で二対4個の渦をもち、頂上部で上昇流となる上昇4渦流に変化することを示した。

プラントル数が比較的大きい場合についてこれまでに蓄積された二重円筒間熱対流の不安定性と遷移について明確な説明を行ったのは、Mizushima, Hayashi and Adachi[6]である。彼らは空気 ($Pr = 0.7$) の場合について、アスペクト比の広い範囲にわたって熱対流の定常解を求め、その線形安定性を調べた。その結果、二重円筒間熱対流の分岐構造は不完全トランス・クリティカル分岐とサドル・ノード分岐で表されることを明らかにした。

プラントル数が小さい場合の二重円筒間熱対流の遷移については、Yoo, Choi and Kim[7]やYoo[8]が数値シミュレーションを行い、その動力学的な性質を詳しく調べた。その結果、アスペクト比が大きい場合 ($A = 12$)、 $Pr \leq 0.2$ においては三日月形対流が不安定となると円筒間隙の鉛直部分すなわち赤道部で多くの渦を生じることが示され、その対流は定常である場合 ($Pr \leq 0.01$) と振動流である場合 ($0.02 \leq Pr \leq 0.2$) の二通りの場合があることが分かった。いずれの場合にもさらにレイリー数を大きくすると振動流となることも示された。

ここでは、水平に置かれた同心二重円筒内に生じる熱対流について、その安定性と乱流への遷移現象のプラントル数依存性を明らかにするため、二次元性の仮定のもとで、数値シミュレーション、非線形平衡解の直接計算とその平衡解の線形安定性を調べる。特にプ

ラントル数 Pr が変化すると、それに対応して解の分岐の構造がどのように変化するか詳しく調べ、対流のパターンや対流の力学的特性が変化する臨界レイリー数を求める。発生する自然対流の速度および温度場とその安定性はアスペクト比 A に依存するが、ここでは $A = 10$ の場合に限って議論することにする。プラントル数は $Pr = 0.1$ から 0.7 までの範囲で計算を行う。

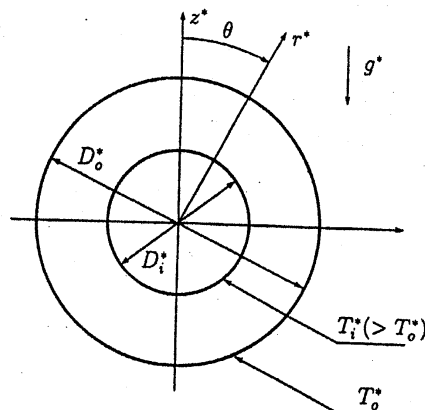


図 1: Co-ordinate system of the problem.

2 基礎方程式

一定の重力場に水平に置かれた外直径 D_o^* 、内直径 D_i^* の同心二重円筒を考える。その間隙に流体が満たされているものとし、流体の動粘性係数を ν^* 、熱拡散係数を κ^* 、体積熱膨張係数を γ^* とする。流れの場は 2 次元であるとし、座標系は図 1 に示すように、直角座標系として円筒の中心を通過して鉛直方向に z^* 軸、水平方向に x^* 軸をとり、極座標系として半径方向に r^* 軸、周方向には円筒の鉛直上端から時計周りに θ 軸をとる。円筒の内壁および外壁は、完全熱伝導性をもつ固体壁であるとし、内円筒表面の温度を T_i^* 、外円筒表面の温度を $T_o^* (< T_i^*)$ に保つ。なお、アスタリスクをつけた量は、次元を有する物理量を表す。

全ての方程式を、代表的な長さ $L^* = (D_o^* - D_i^*)/2$ 、代表的な時間 L^{*2}/κ^* 、および代表的な温度として $\delta T^* = T_i^* - T_o^*$ を用いて無次元化する。流れ場は 2 次元であるとして仮定しているため 2 次元流れ関数を用いることができる。また、無次元温度 ϕ を円筒の境界条件を満たす調和関数 Φ と流体の無次元温度 T との差で定義する。すなわち、

$$T = \Phi + \phi, \quad \Phi = a \log r + b, \quad (1)$$

$$a = \left\{ \log \left(\frac{A}{A+2} \right) \right\}^{-1}, \quad b = -a \log \frac{A+2}{2}.$$

このとき、浮力項を除いては流体の物質的な性質は変わらないとするブジネスク近似を用いると、流れ関数 ψ と温度 ϕ を支配する方程式は無次元系で次のように書くことができる。

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - \frac{1}{r} J(\psi, \Delta \psi) = Pr \Delta^2 \psi + \frac{1}{r} Pr Ra \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \cos \theta + Pr Ra \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{a}{r} \right) \sin \theta, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{r} J(\psi, \phi) + \frac{a}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \Delta \phi. \quad (3)$$

ここで、流れの場を特徴づける無次元パラメータは、次式で定義される円筒のアスペクト比 A 、レイリー数 Ra 、およびプラントル数 Pr である。

$$A = \frac{D_i^*}{L^*}, \quad Ra = \frac{\gamma^* g^* \delta T^* L^{*3}}{\kappa^* \nu^*}, \quad Pr = \frac{\nu^*}{\kappa^*}. \quad (4)$$

g^* は重力加速度であり $J(r, \theta)$ と Δ は次式で示されるヤコビアンとラプラシアンである。

$$J(f, g) = \frac{\partial(f, g)}{\partial(r, \theta)}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (5)$$

速度 \mathbf{u} は、 ψ を用いて無次元形で次のように書ける。

$$\mathbf{u} = (u, v) = \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \quad (6)$$

境界条件は、円筒の内壁および外壁が固定かつ完全熱伝導であると仮定する。すなわち、

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \phi = 0, \quad \text{at } r = \frac{A}{2}, \frac{A}{2} + 1 \quad (7)$$

とする。また、周方向には周期境界条件が成り立つので

$$\psi(r, \theta) = \psi(r, \theta + 2m\pi), \quad \phi(r, \theta) = \phi(r, \theta + 2m\pi) \quad (8)$$

とする。ここで、 m は任意の整数である。

3 平衡解とその安定性

同心二重円筒内熱対流の問題においては、レイリー数がどんなに小さくても対流が生じる。ここでは、発生する対流の非線形平衡解を数値的に求める。平衡状態においては式(2), (3)において $\partial/\partial t = 0$ とおくことができ、平衡解 $(\bar{\psi}, \bar{\phi})$ が満たす方程式は次のようになる。

$$-\frac{1}{r} J(\bar{\psi}, \Delta \bar{\psi}) = Pr \Delta^2 \bar{\psi} + \frac{1}{r} Pr Ra \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \cos \theta + Pr Ra \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} + \frac{a}{r} \right) \sin \theta, \quad (9)$$

$$-\frac{1}{r} J(\bar{\psi}, \bar{\phi}) + \frac{a}{r^2} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta} = \Delta \bar{\phi}. \quad (10)$$

方程式(9), (10)を式(7)の境界条件のもとで解くことにより平衡解 $(\bar{\psi}, \bar{\phi})$ が求められる。ただし、平衡解を求める際には、二重円筒の鉛直面に関して次式で表される対称性を仮定する。すなわち、

$$\psi(r, \theta) = -\psi(r, -\theta), \quad \psi(r, \pi + \theta) = -\psi(r, \pi - \theta), \quad (11)$$

$$\phi(r, \theta) = \phi(r, -\theta), \quad \phi(r, \pi + \theta) = \phi(\pi - \theta) \quad (12)$$

である。さらに、得られた平衡解 $(\bar{\psi}, \bar{\phi})$ の線形安定性を調べるため、流れ関数および温度を平衡解と攪乱の和として次式のようにおく。

$$\psi(r, \theta, t) = \bar{\psi}(r, \theta) + \psi'(r, \theta, t), \quad \phi(r, \theta, t) = \bar{\phi}(r, \theta) + \phi'(r, \theta, t). \quad (13)$$

ここで、 $\psi'(r, \theta, t)$ および $\phi'(r, \theta, t)$ の時間依存性を $\psi'(r, \theta, t) = \hat{\psi}(r, \theta) e^{\lambda_0 t}$ および $\phi'(r, \theta, t) = \hat{\phi}(r, \theta) e^{\lambda_0 t}$ と仮定する。 λ_0 は線形増幅率を表す。式(13)を式(2),(3)に代入し、平衡解が満たすべき式(9)および(10)を考慮し、攪乱 $(\hat{\psi}, \hat{\phi})$ について線形化を行うと、攪乱を支配する方程式は

$$\lambda_0 \Delta \hat{\psi} = \frac{1}{r} \{J(\bar{\psi}, \hat{\phi}) + J(\hat{\psi}, \bar{\phi})\} + Pr \Delta^2 \hat{\psi} + \frac{1}{r} Pr Ra \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta} \cos \theta + Pr Ra \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} \sin \theta, \quad (14)$$

$$\lambda_0 \hat{\phi} = \frac{1}{r} \{J(\bar{\psi}, \hat{\phi}) + J(\hat{\psi}, \bar{\phi})\} - \frac{a}{r^2} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} + \Delta \hat{\phi} \quad (15)$$

となる。

ここで、 λ_0 の実部を $\text{Re}(\lambda_0)$ 、虚部を $\text{Im}(\lambda_0)$ とすると、 $\text{Re}(\lambda_0) > 0$ のとき攪乱は時間とともに成長するので平衡解は不安定で、 $\text{Re}(\lambda_0) < 0$ のとき攪乱は時間とともに減衰するので平衡解は安定で、 $\text{Re}(\lambda_0) = 0$ のとき攪乱は成長も減衰もしないので平衡解は中立安定である。また、 $\text{Re}(\lambda_0) = \text{Im}(\lambda_0) = 0$ のとき、平衡解はピッチフォーク分岐、サドル・ノード分岐あるいはトランス・クリティカル分岐を生じ、 $\text{Re}(\lambda_0) = 0$ のとき $\text{Im}(\lambda_0) \neq 0$ ならば、振動数 $f = \text{Im}(\lambda_0)/(2\pi)$ をもったホップ分岐を生じる。すなわち、平衡解の安定性は、この λ_0 の符号によって決定されるので、 λ_0 の符号を求めることにより平衡解の安定性を調べることにする。

4 数値計算法

4.1 発展方程式の数値シミュレーション

発展方程式(2)および(3)を関数展開法を用いて展開し、数値シミュレーションを行い解の挙動を調べる。ここでは、流れ関数 ψ と温度 ϕ を、周方向にはフーリエ級数展開し、半径方向にはチェビシェフ多項式によって展開する。ここで、次式を用いて基礎方程式(2),(3)を変数変換し、 $-1 < \eta < 1$ の範囲でチェビシェフ多項式を用いる。

$$\eta = 2 \left(r - \frac{1}{2}(A+1) \right). \quad (16)$$

このとき、流れ関数 ψ および温度 ϕ は次式のように表せる。

$$\begin{aligned} \psi(\eta, \theta, t) &= \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} \sum_{n=0}^N a_{mn}(t) \tilde{T}_n(\eta) e^{im\theta}, \\ \phi(\eta, \theta, t) &= \sum_{m=M/2}^{M/2-1} \sum_{n=0}^N b_{mn}(t) \tilde{T}_n(\eta) e^{im\theta}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$(m = -M/2, \dots, M/2 - 1, n = 0, 1, \dots, N).$$

流れ関数 ψ および温度 ϕ は実数であるので, $a_{(-m)n} = a_{mn}^\dagger$, $b_{(-m)n} = b_{mn}^\dagger$ が成り立つ. ここで, \dagger は共役複素数を表す. 整数 M, N は展開の打ち切り項数であり, $(a_{mn}(t), b_{mn}(t))^T$ は時間のみの関数である. また, $\tilde{T}_n(\eta)$, $\tilde{\tilde{T}}_n(\eta)$ は, 次式で示される境界条件を満たすように変形された, n 次の変形チェビシエフ多項式である.

$$\tilde{\tilde{T}}_n(\eta) = (1 - \eta^2)^2 T_n(\eta), \quad (18)$$

$$\tilde{T}_n(\eta) = (1 - \eta^2) T_n(\eta). \quad (19)$$

展開式 (17) を式 (2), (3) に代入し, 各フーリエモード毎に方程式を分離し η 方向にコロケーション法を用いると次のような形の常微分方程式系が得られる.

$$\mathbf{C} \frac{d}{dt} \mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{Z}. \quad (20)$$

ここで, コロケーションポイントは, η の方向に対して, 両円筒間の中心で疎, 両円筒の壁近傍で密となるよう以下のように定義する.

$$\eta_i = \cos\left(\frac{i+1}{N+2}\pi\right), \quad (i = 0, 1, \dots, N). \quad (21)$$

式 (20) において, \mathbf{X} は展開係数 $(a_{mn}(t), b_{mn}(t))^T$ を成分に持つベクトルで時間に依存する. \mathbf{Y}, \mathbf{Z} は式 (2), (3) の非線形項と線形項を表すベクトルである. また, \mathbf{C} は基礎方程式の時間係数行列で, $2 \times (M+1) \times (N+1)$ 次の正方行列である. 時間きざみを Δt とし, 線形項 \mathbf{Y} についてはクラック・ニコルソン法, 非線形項 \mathbf{Z} についてはアダムス・バッシュホース法を用いて方程式を時間に関して離散化し, 計算を行う. また, 非線形項の計算においては, 周方向に FFT を用いた擬スペクトル法により計算を行う.

4.2 平衡解の計算法

平衡解の計算においても, 式 (9), (10) の平衡解 $(\bar{\psi}, \bar{\phi})$ を関数展開する. 周方向には, フーリエ級数展開を行い, 半径方向には式 (16) を用いて変数変換を行い, $-1 \leq \eta \leq 1$ の範囲で発展方程式の数値シミュレーションの場合と同様に, 境界条件を満たすように変形された m 次の変形チェビシエフ多項式を用いて展開する. 平衡解を求めるにあたって, 式 (11), (12) で表わされる対称性を仮定するので, 次式のような関数展開を行う.

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(\eta, \theta) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{mn} \tilde{\tilde{T}}_m(\eta) \sin\{(n+1)\theta\}, \\ \bar{\phi}(\eta, \theta) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N b_{mn} \tilde{T}_m(\eta) \cos(n\theta). \end{aligned} \quad (22)$$

この関数展開を式 (9), (10) に代入し, コロケーション法により次式で示されるような行列形の代数方程式を得る.

$$\mathbf{Aa} = \mathbf{B}, \quad (23)$$

この方程式で、展開係数 $\mathbf{a} = (a_{00}, a_{01}, \dots, a_{M,N}, b_{00}, b_{01}, \dots, b_{M,N})^T$ であり、 \mathbf{A} と \mathbf{B} は $2 \times (M+1) \times (N+1)$ 次の正方行列を表す。また、半径方向および周方向のコロケーションポイントは次式で示される点を用いる。

$$\eta_i = \cos\left(\frac{i+1}{N+2}\pi\right), \quad (i = 0, 1, \dots, N) \quad (24)$$

$$\theta_i = \frac{2i+1}{2(M+1)}\pi \quad (i = 0, 1, \dots, M). \quad (25)$$

代数方程式系 (23) をニュートン・ラフソン法により数値的に解く。

4.3 線形安定性解析

安定性の計算においても同様に、式 (14), (15) の攪乱 $(\hat{\psi}, \hat{\phi})$ について、周方向にはフーリエ級数展開を行い、半径方向には境界条件を満たすように変形された m 次の変形チェビシェフ多項式を用いて展開する。このとき、攪乱 $(\hat{\psi}, \hat{\phi})$ を次のように流れ場の速度の対称性により 2 つのモード、すなわち対称モードと反対称モードに分類する。

対称モード：

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\eta, \theta) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{mn} \tilde{T}_m(\eta) \sin\{(n+1)\theta\}, \\ \hat{\phi}(\eta, \theta) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N b_{mn} \tilde{T}_m(\eta) \cos(n\theta), \end{aligned} \quad (26)$$

反対称モード：

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\eta, \theta) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{mn} \tilde{T}_m(\eta) \cos(n\theta), \\ \hat{\phi}(\eta, \theta) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N b_{mn} \tilde{T}_m(\eta) \sin\{(n+1)\theta\}. \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、対称モードは速度場が鉛直面に対し対称なモードであり、反対称モードは速度場が鉛直面に対して反対称なモードである。得られた平衡解の安定性は、対称モードおよび反対称モード、それぞれの場合について、コロケーション法により次式で示されるような線形増幅率 λ_0 を固有値とする行列の固有値問題に帰着し計算を行う。

$$\mathbf{C}\mathbf{a} = \lambda_0 \mathbf{D}\mathbf{a}, \quad (28)$$

ここで、展開係数 $\mathbf{a} = (a_{00}, a_{01}, \dots, a_{M,N}, b_{00}, b_{01}, \dots, b_{M,N})^T$ は定数で、 \mathbf{C} と \mathbf{D} は $2 \times (M+1) \times (N+1)$ 次の正方行列を表す。また、半径方向および周方向のコロケーションポイントは平衡解を求める場合と同様、式 (24), (25) で示される点を用いる。

この行列の固有値の中で $\text{Re}(\lambda_0)$ が最大となる λ_0 が平衡解の安定性を決定し、それに対応する固有関数が流れ場および温度場の平衡解に対する攪乱を与える。

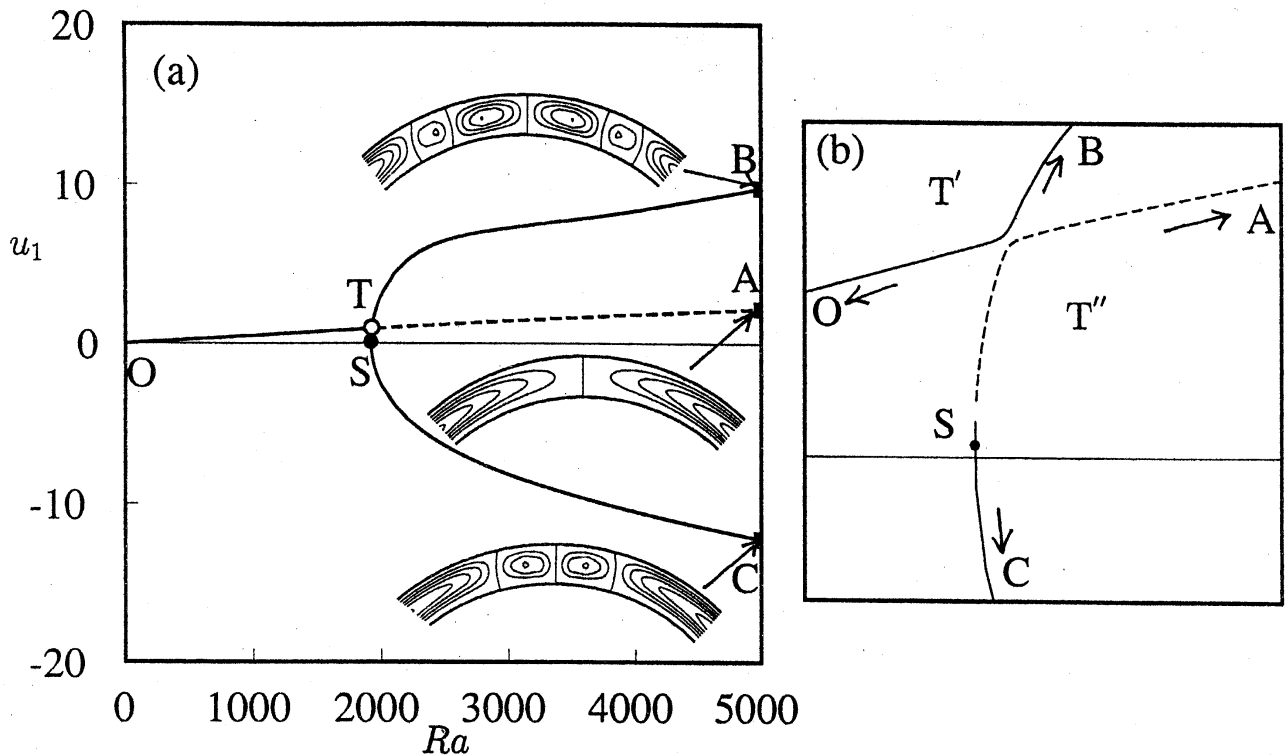


図 2: Bifurcation diagram. $A = 10$, $Pr = 0.7$.

5 結果

本研究においては、アスペクト比 $A = 10$ の場合にのみ限定し、プラントル数については $0.1 \leq Pr \leq 0.7$ の範囲内で計算を行い、プラントル数の変化による解の分岐構造や流れ場の変化を調べる。数値シミュレーションにおいては、式 (17) の展開の打ち切り項数を $M = 64$, $N = 14$ とし、時間刻み幅を $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ とした。平衡解および固有値の計算においても式 (22), (26), (27) の展開打ち切り項数を $M = 64$, $N = 14$ とした。各計算において、時間刻み幅を小さくしても、展開打ち切り項数を $M = 128$, $N = 20$ まで大きくしても、 $Ra \leq 5000$ の範囲内では計算結果が有効数字 4 桁の範囲で変わらないことを確かめた。また、熱対流を特徴づける代表物理量として、次式で定義する円筒間隙の頂上部における間隙中心での半径方向速度 u_1 を用いる。

$$u_1 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{2}{\eta + A + 1} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \quad (29)$$

まず、プラントル数 $Pr = 0.7$ の場合の平衡解の分岐ダイアグラムを図 2(a) に示す。図 2(a) において、横軸はレイリー数 Ra 、縦軸は代表物理量 u_1 である。この図 2(a) で示される解の分岐構造を詳しく調べると、図 2(a) の T 付近の拡大図 (概念図) で示されるような、ゆるやかに遷移する解 OB と、転回分岐点 (Saddle-node bifurcation point) S より分岐する解 ASC で構成されている (すなわち不完全臨界横断分岐 [Imperfect Trans-critical bifurcation] である)。しかし、これから述べる解の性質や本研究目的に対しては、解 OA と解 BSC が点 T において臨界横断分岐 (Trans-critical bifurcation) を起こしていると考えても何ら物理的な影響はない。したがって、以下においては解 OA および解 BSC の交

点Tを臨界横断点として定義し、解TBおよびTSCを点Tより分岐した分岐解として考えるものとする。また、図2(a)に各分岐の代表として、 $Ra = 5000$ における流れ場のパターンを $-45^\circ < \theta < 45^\circ$ の範囲で描いた。

図2(a)において、OTAで表わされる平衡解はアスペクト比、プラントル数によらずレイリー数が小さい場合に存在する三日月形対流である。この対流は円筒の中心を通過して鉛直軸を挟み左右に対称な大きな2つの循環領域を持つ。この解以外にも曲線BTSCで示されるもう2つの解が存在する。曲線BTで表される平衡解は $u_1 > 0$ であり、したがって、この流れは円筒の頂上部で上昇流となる上昇4渦流れである。曲線TSCで表される平衡解はほぼ $u_1 < 0$ であり、円筒の頂上部において下降流となる下降2渦流れである。この上昇4渦流れと下降2渦流れを点Tより分岐した一对の分岐解として考える。点Sと点Tに対応するレイリー数はそれぞれ $Ra_S = 1914.1$ と $Ra_T = 1920.7$ であり、点Tよりも点Sの方が低いレイリー数に対応している。

図2(a)で得られた平衡解の安定性を調べた結果、点Oからでる三日月形の対流パターンを与える解の分岐OAのうちOTは安定であるが、点Tで安定性の交替が起こり、TAは不安定となる。点Tからでる解TBは安定である。しかし、点Tからでるもうひとつの分岐TSCのうちTSは不安定、SCは安定であることがわかった。したがって、プラントル数 $Pr = 0.7$ の場合の分岐構造をまとめると次のようになる。すなわち、 $Ra < Ra_S = 1914.1$ においては平衡解の数は1個であるが、 $Ra = Ra_S$ で平衡解の個数が増え、 $Ra_S < Ra < Ra_T = 1920.7$ では3個となる。そのうち1個は不安定であり、他の2個は安定である。 $Ra = Ra_T$ では平衡解の個数は変化しないが、解の分岐OTAが安定平衡解から不安定平衡解に変わり、解の分岐STBが不安定から安定に変わる。こうして2つの平衡解の安定性が入れ替わることがわかった。これらの解の安定性をまとめて、図2(a)では安定な平衡解を実線で、不安定な平衡解を破線で表わした。以上により、プラントル数 $Pr = 0.7$ の場合は $Ra_S < Ra_T$ となり、解の分岐は転回分岐、臨界横断分岐の順番で起こるということがわかった。また、不安定性は円筒間隙の上部で起こり、定常な三日月形対流から定常な下降2渦流れ、または上昇4渦流れへの定常流から定常流への遷移である。

次にプラントル数が小さいときは解の分岐構造と熱対流の遷移がどのように変わるかを調べる。ここでは代表例として $Pr = 0.3, 0.275, 0.1$ を選んで、これら3つの場合について詳しく紹介する。まず、プラントル数 $Pr = 0.3$ の場合の解の分岐ダイヤグラムを図3に示す。 $Pr = 0.3$ の場合においても $Pr = 0.7$ の場合と同様に、OTAで表わされる三日月形の対流パターンを持つ解と、曲線BTSCで表わされるもう2つの解が存在する。この解は点Tより分岐した一对の分岐解で、曲線BTで表わされる解は上昇4渦流れに対応し、曲線TSCで表わされる解は下降2渦流れに対応する。点S, Tに対応するレイリー数はそれぞれ $Ra_S = 2078.4, Ra_T = 2228.2$ である。ここでも点Sは転回分岐点、点Tは臨界横断分岐点である。

また、図3で得られた平衡解の安定性を調べた結果、点Oからでる三日月形の対流パターンを持つ解の分岐OTAのうちOTは安定であるが、点Tで安定性の交替が起こり、TAは不安定となることがわかった。また、点Tからでる解TBのうち TH_1 は安定であるが、点 $H_1 (Ra_{H_1} = 2351.1)$ でホップ分岐(Hopf bifurcation)による振動不安定性のため、 H_1B は不安定となる。点Tからでるもう1つの解TSCのうちTSは不安定である。さらに、点Sからでる解SCのうち SH_2 は安定であるが、点 $H_2 (Ra_{H_2} = 2228.2)$ においても

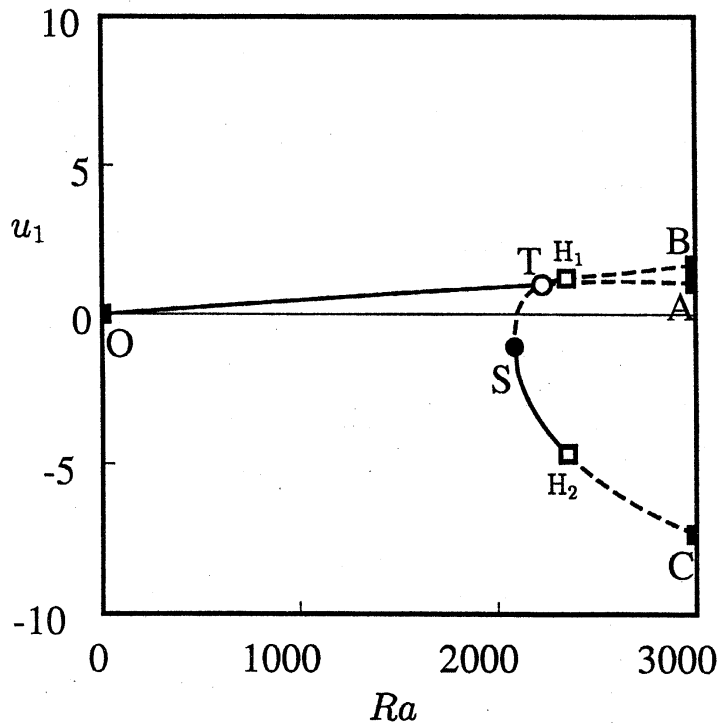


図 3: Bifurcation diagrams. $A = 10$, $Pr = 0.3$.

ホップ分岐による振動不安定性のため、 H_2C は不安定となる。したがって、プラントル数 $Pr = 0.3$ の場合は $Ra_S < Ra_T < Ra_{H_1} < Ra_{H_2}$ となり、解の分岐は転回分岐、臨界横断分岐、ホップ分岐の順番で起こるということがわかった。

$Ra = Ra_S$ および Ra_T において起こる転回分岐および臨界横断分岐の結果生じる対流は円筒間隙上部で不安定性が起こる下降 2 渦流れ，上昇 4 渦流れであるが， $Ra = Ra_{H_1}$ ， Ra_{H_2} でホップ分岐により生じる流れは円筒間隙の赤道部で不安定性が生じる振動流である。したがって， $Pr = 0.3$ では三日月形対流が下降 2 渦流れまたは上昇 4 渦流れに定常流一定常流遷移を行った後，赤道部でいくつかの渦を生じる定常流一周期流遷移を行う。

プラントル数 $Pr = 0.275$ の場合の平衡解の分岐ダイアグラムは図 4 のようになる。プラントル数 $Pr = 0.275$ の場合も OTA で表わされる三日月形の対流パターンを持つ解と，曲線 BTSC で表わされるもう 2 つの解が存在する。これら 2 つの解も同様に，点 T より分岐した一対の分岐解で，曲線 BT で表わされる解は上昇 4 渦流れに対応し，曲線 TSC で表わされる解は下降 2 渦流れに対応する。点 S, T に対応するレイリー数はそれぞれ $Ra_S = 2106.2$ ， $Ra_T = 2328.6$ である。ここでも点 S は転回分岐点，点 T は臨界横断分岐点である。

また，図 4 で得られた平衡解の安定性を調べた結果，点 O からでる三日月形の対流パターンを持つ解 OTA のうち OH_1 は安定であるが，点 H_1 ($Ra_{H_1} = 2138.1$) においてホップ分岐による振動不安定性のため， H_1TA は不安定となる。点 T からでる解 BT は不安定となる。ここでも $Pr = 0.3$ の場合と同様に，もう一つの分岐解 TSC のうち TS は不安定となり，解 SC のうち SH_2 は安定であるが点 H_2 ($Ra_{H_2} = 2146.4$) においてもホップ分岐による振動不安定性のため不安定となる。したがって，プラントル数 $Pr = 0.275$ の場合は $Ra_S < Ra_{H_1} < Ra_{H_2} < Ra_T$ となり，解の分岐は転回分岐，ホップ分岐，臨界横断分岐の順番で起こるということがわかった。すなわち，三日月形対流は Ra を少しずつ大きくするとき $Ra = Ra_S$ で下降 2 渦流れとなった後に $Ra = Ra_{H_2}$ でホップ分岐を起こして赤道近くに多くの渦を持つ振動流へと遷移する。

最後に，プラントル数 $Pr = 0.1$ の場合の平衡解の分岐ダイアグラムを図 5 に示す。図

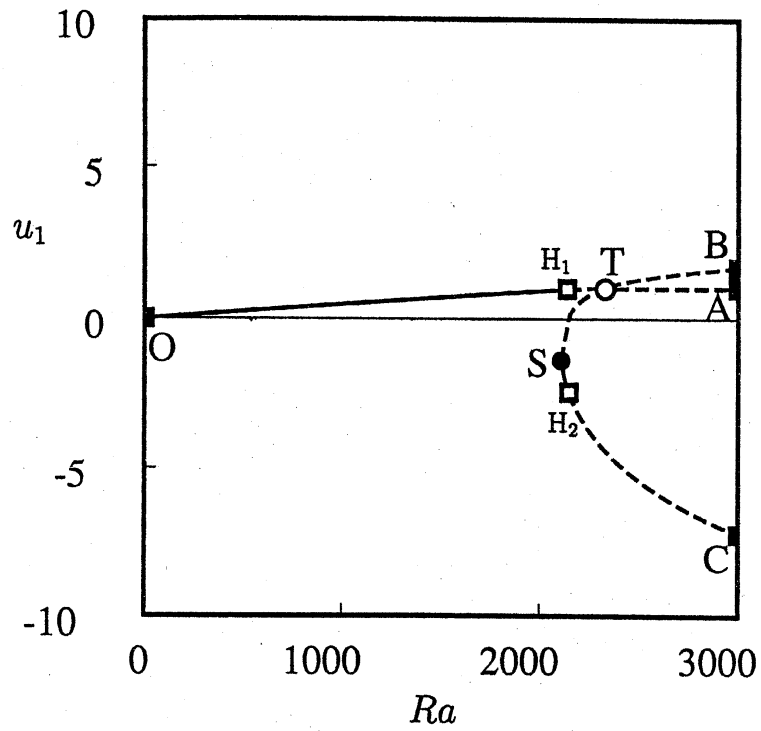


图 4: Bifurcation diagrams. $A = 10$, $Pr = 0.275$.

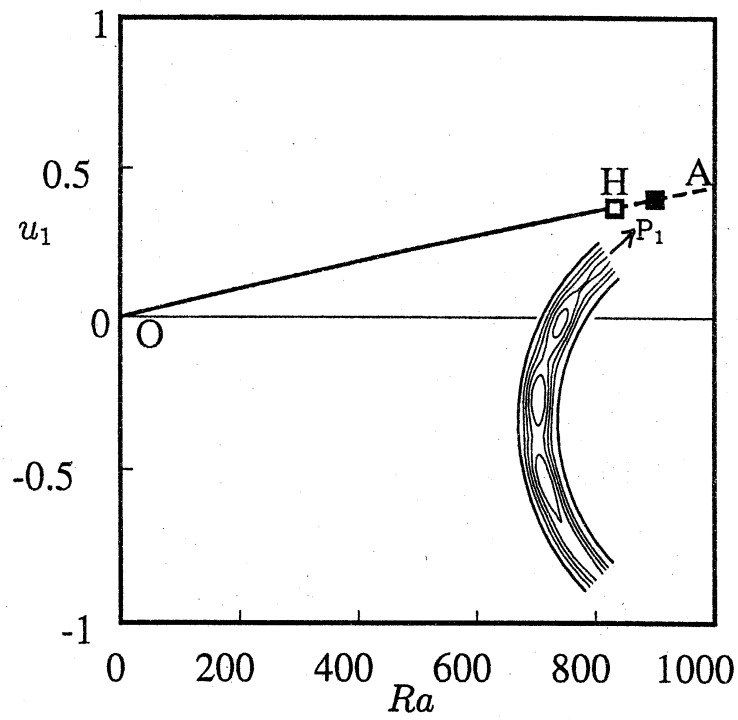


图 5: Bifurcation diagram. $A = 10$, $Pr = 0.1$

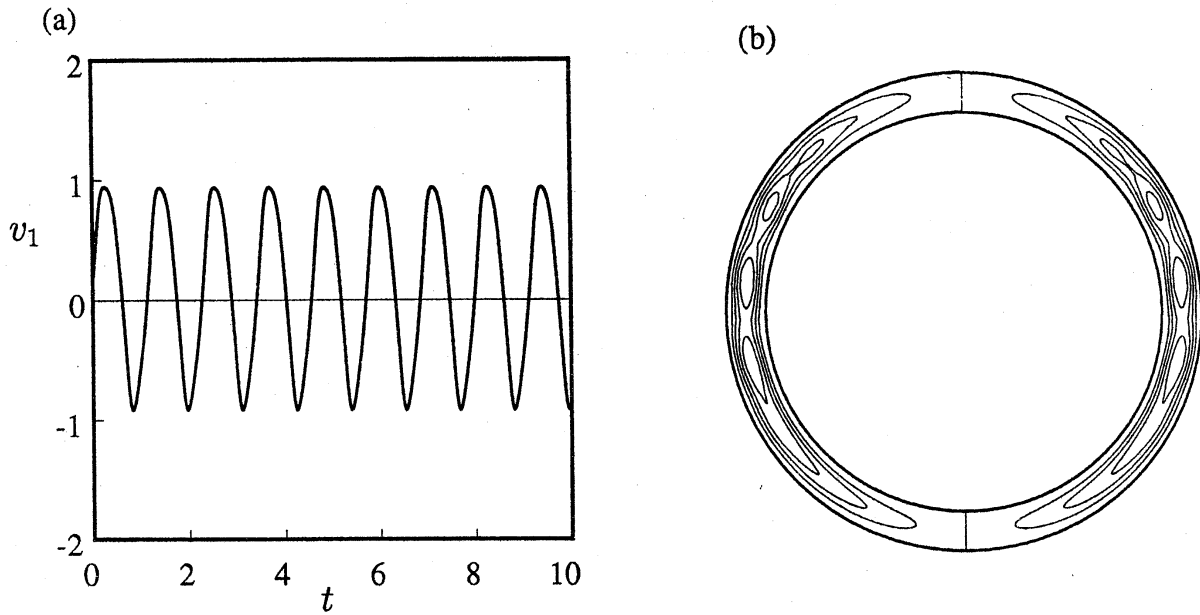


図 6: Results of numerical simulations. Time evolution of v_1 and flow field at the oscillatory state. $Ra = 900$. (a) Time evolution of v_1 . (b) Flow field.

中の直線 OA で表わされる平衡解は三日月形の対流である. 平衡解 OA の安定性を調べた結果, 点 O から出る解の分岐 OA のうち OH は安定であるが, 点 H ($Ra_H = 832.3$) においてホップ分岐が生じ, 解 HA は不安定となることがわかった. また, この安定性解析の結果, $Ra < Ra_H$ では, 図 5 に示されている定常な平衡解 HA の他に点 H から分岐した振動解が存在していると考えられるため, 数値シミュレーションを行い振動解を求めた.

振動解の代表的な例として $Ra = 900$ (図 5, 点 P_1) における流れ場と以下の式で定義される速度 v_1 の時間変化を図 6(a) に示す. ここで v_1 は式 (30) で示される円筒の水平面上における間隙中心での周方向の速度である.

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \eta}. \quad (30)$$

流れ場は図 6(b) に示すように円筒の側面部に複数の小さな渦をもち円筒の水平面に対して上下に周期的に振動する対流である.

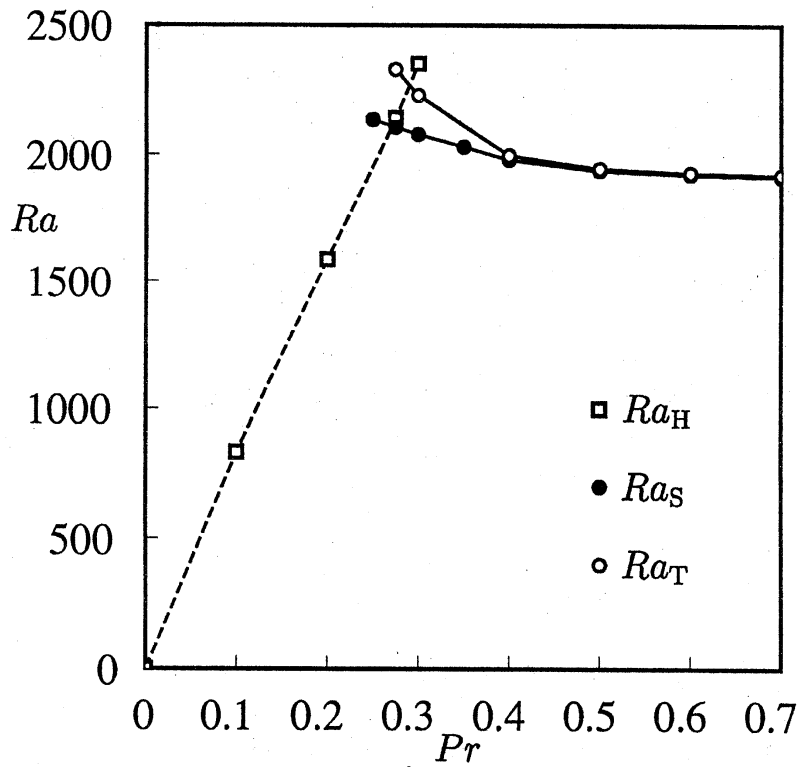
以上のことから, アスペクト比 $A = 10$, プラントル数 $Pr = 0.1$ の場合の解の分岐構造は, はじめに $Ra = Ra_H (= 832.3)$ においてホップ分岐が生じ, $Ra < Ra_H = 832.3$ では平衡解の数は 1 個で三日月形対流が安定であるが, $Ra > Ra_H = 832.3$ では平衡解の他に振動解があらわれ (図 5 には描かれていない), 三日月形の対流は不安定となることがわかった. すなわち, Ra を大きくすると三日月形対流は不安定となり $Ra = Ra_H$ で赤道付近に渦があらわれ, 流れは振動流となる.

6 考察

数値シミュレーション, 平衡解の分岐構造の変化, および線形安定性解析の結果, プラントル数 Pr が小さくなるにしたがって, 解の分岐の構造は $Ra_S < Ra_T < Ra_H \rightarrow Ra_S <$

表 1: Critical Rayleigh numbers Ra_S , Ra_T and Ra_H for various Prandtl numbers Pr .

Pr	Ra_H	Ra_S	Ra_T
0.1	832.3	-	-
0.2	1585.7	-	-
0.25	-	2134.8	-
0.275	2138.1	2106.2	2329.6
0.3	2351.1	2078.4	2228.2
0.35	-	2030.2	-
0.4	-	1980.1	1997.0
0.5	-	1938.0	1946.1
0.6	-	1923.1	1929.1
0.7	-	1914.1	1921.2

图 7: Critical Rayleigh numbers Ra_H , Ra_S and Ra_T .

$Ra_H < Ra_T \rightarrow Ra_H < Ra_S < Ra_T$ となることがわかった。プラントル数 $0.1 < Pr < 0.7$ の範囲で、 Ra_H, Ra_S, Ra_T を表1に示し、図7に図示した。図7より、直線 Ra_H および曲線 Ra_S, Ra_T の交点の近傍で線形近似を行い次のような近似式を得た。これらの近似式を用いて直線 Ra_H と曲線 Ra_S, Ra_T の交点を求めた結果 $Pr_{c1} = 0.269, Pr_{c2} = 0.289$ を得た。

$$\begin{aligned} Ra_H &= 7653.7Pr + 56.0, \\ Ra_S &= -1144.8Pr + 2421.0, \quad Ra_T = -4040.1Pr + 3440.2. \end{aligned} \quad (31)$$

これまでに得られた解の分岐構造を説明する。 $Pr = 0.7, 0.3$ の場合は $Pr_{c2} (= 0.289) < Pr$ であるので $Ra_S < Ra_T < Ra_H$ となり、ゆっくりとレイリー数を大きくしていくと、解はゆるやかに遷移するブランチ OTB に沿って変化し、上昇4渦流となった後にホップ分岐により振動流へと至る。 $Pr = 0.275$ の場合は $Pr_{c1} (= 0.269) < Pr < Pr_{c2}$ より $Ra_S < Ra_H < Ra_T$ となり、ゆっくりとレイリー数を大きくすると、解は OTB に沿って変化し上昇4渦流になる前に、 Ra_{H1} でホップ分岐を生じる。 $Pr = 0.1$ の場合は $Pr < Pr_{c1}$ より $Ra_H < Ra_S < Ra_T$ となって、レイリー数を大きくしていくと赤道付近で渦が生じるホップ分岐を生じる。

このような結果が得られた理由としては、アスペクト比 $A = 10$ の場合は円筒の曲率が小さく、円筒の頂上部では平行平板間に発生するベナール対流、円筒の側面部では鉛直流体層熱対流によく似ているためであると考えられる。無限平行平板間に起こるベナール対流の臨界レイリー数は $Ra_{c1} \sim 1708$ で与えられ、無限鉛直流体層熱対流の臨界レイリー数は $Ra_{c2} \sim 7800 \times Pr$ で与えられる。 Ra_{c1} は $Pr > Pr_{c2}$ における Ra_S とほぼ一致し、 Ra_{c2} は Ra_H とほぼ一致している。

したがって、平行平板間熱対流と鉛直流体層熱対流の特性を併せ持つ二重円筒においてプラントル数を小さくしていくと、この2つの臨界レイリー数の大小関係が入れ替わり、 $Pr < Pr_{c1}$ では円筒の側面部において複数の渦をもつ振動流になり、 $Pr > Pr_{c2}$ では円筒の頂上部において複数の渦をもつ流れとなったと考えられる。

無限鉛直流体層熱対流の不安定性によって定常攪乱不安定性と伝播波(振動)攪乱不安定性があることが知られている[9]。ここでの二重円筒間熱対流において見いだされたホップ分岐は実は定常攪乱不安定性に対応しているのである。ではなぜピッチフォーク分岐ではなくホップ分岐となったのか、それは赤道部付近で円筒間隙が曲率を持っているためであり、 $A \rightarrow \infty$ の極限でホップ分岐の振動数 $f = \text{Im}(\lambda_0)/(2\pi)$ は0に近づく。

参考文献

- [1] I. C. Walton: Q. J. Mech. Appl. Math. **33** (1980) 125-139.
- [2] S. A. Korpela: Int. J. Heat Mass Transfer **17** (1974) 215-222.
- [3] R. E. Powe, C. T. Carley and E. H. Bishop: ASME J. Heat Transfer **91** (1969) 310-314.

- [4] Y.-F. Rao, Y. Miki, K. Fukuda, Y. Tanaka and S. Hasegawa: *Int. J. Heat Mass Transfer* **28** (1985) 705-714.
- [5] J.-S. Yoo: *Int. J. Heat Fluid Flow* **17** (1996) 587-593.
- [6] J. Mizushima, S. Hayashi and T. Adachi: submitted to *Int. J. Heat Mass Transfer*.
- [7] J.-S. Yoo, J. Y. Choi and M.-U. Kim: *Numer. Heat Transfer A* **25** (1994) 103-115.
- [8] J.-S. Yoo: *Int. J. Heat Mass Transfer* **41** (1998) 3055-3073.
- [9] J. Mizushima and K. Gotoh: *J. Fluid. Mech.* **73** (1976) 65-75.