

## 対流パターンに及ぼす外部場の影響

八代高専 大河内康正 (Yasumasa Ookouchi)  
九大総理工 羽田 亨 (Tohru Hada)

### 1. はじめに

日本付近では、冬期シベリヤから寒気の吹き出しがあり、東シナ海や日本海で下層から暖められ筋状のロール型対流雲となって衛星画像で観測される。その筋雲は海岸から遠ざかるにつれ六角形のセルへ、さらに一様な層雲へと遷移しているように見える。また、六角形のセルには中心部で下降するオープンセル型と中心部で上昇するクローズドセル型が存在することが知られている<sup>1)</sup>。このような対流パターンの変化は鉛直方向の熱的不安定に加えて温度または鉛直流の水平方向の非一様性など、基本場の変化と、どのような関係があるのだろうか。ここではSwift-Hohenberg(SH)モデル<sup>2)3)</sup>を用いて場の変化に伴うセル・パターンの変化を調べた。SHモデルは臨界レイリー数領域近傍でのみ有効であるに過ぎないが、大気中の対流は安定成層した対流圏下部で不安定になればすぐに対流が起きるのであろうと予想できるから渦交換係数を仮定すれば臨界値近傍で起きていると考えることができる。2節では外部場を取り入れたSHモデルの導出を行う。SHモデルは鉛直モードは1個だけとして落とし、固有関数(鉛直流と温度偏差の線形結合)の空間分布を二次元平面で表現するが、ここでは、さらに基本場の水平変化を考慮する。その結果、解として出現したのはロール型、六角形、その混合型、および一様流である。3節ではSHモデルから振幅方程式を導きそれらの解の安定性について議論した。4節では場の非一様性のある対流槽でシリコン・オイルを用いた実験を行い、パターンの変化を比較した。

### 2. 外部場を取り入れたSwift-Hohenberg モデルの導出

#### 2.1 基礎方程式

上下二枚の平板に挟まれた深さ $H$ の流体を考える。平板上の温度はそれぞれ一定で、下部は上部の温度より $\Delta T$ だけ高い温度であるとする。ブシネ近似による対流を記述する方程式は、次の連立偏微分方程式によって与えられる。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + g\gamma\theta \mathbf{k} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \theta = \kappa \nabla^2 \theta + \beta w \quad (3)$$

ここで  $\mathbf{V}=(u_x, u_y, u_z)$  は速度ベクトルである。  $\theta$  は直線温度分布からの偏差を表しており、上下の境界では0となる。また  $p$  は圧力偏差、  $\nu, \kappa, \gamma, g$  はそれぞれ動粘性係数、温度拡散率、熱膨張率、重力の加速度である。式(2)の運動方程式では、非圧縮性流体だが右辺第3項で浮力を考慮している。すなわち密度  $\rho$  は  $\rho^{-1} = \rho_0^{-1} (1 + \gamma \theta)$  の温度依存性を仮定している。式(3)は温度の輸送方程式であり、右辺第2項は成層の効果である。ただし  $\beta = \Delta T / H$  である。ここで  $H$  は対流槽深さ  $\Delta T$  は上下の温度差である。これらの方程式を無次元化するため、時間の単位を拡散時間  $[H^2/\kappa]$ 、長さの単位を  $[H]$  とし、温度偏差については  $[\Delta T]$  を単位として物理量を計る。

無次元化された式(2)に対して  $\text{rot}$  を2回取り、線形部分について成分に分けて表示したものと、式(3)から4組の方程式が得られる。その際、  $R = g\gamma \Delta T d^3 / \kappa \nu$  と  $\sigma = \nu / \kappa$  の2つの無次元量が現れる。それぞれレイリー数、プラントル数とよばれる。

これらの線形方程式をフーリエ変換するため、 $\mathbf{k}$  要素を次のように表現する。

$$\begin{pmatrix} u_{zk}(\mathbf{r}, t) \\ \theta_k(\mathbf{r}, t) \\ u_{xk}(\mathbf{r}, t) \\ u_{yk}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_k(t) \\ \Theta_k(t) \\ U_k(t) \\ V_k(t) \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (4)$$

ここで  $\mathbf{r}=(x, y, z)$ 、 $\mathbf{k}=(k_x, k_y, k_z)$  である。また  $\mathbf{W}_k=(W_k(t), \Theta_k(t), U_k(t), V_k(t))^T$  とすると、 $\mathbf{w}_k$  についての関係は、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{W}_k = \begin{pmatrix} -\sigma k^2 & -\sigma R q^2 / k^2 & 0 & 0 \\ -1 & -k^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma R k_x k_z / k^2 & -\sigma k^2 & 0 \\ 0 & \sigma R k_y k_z / k^2 & 0 & -\sigma k^2 \end{pmatrix} \mathbf{W}_k \quad (5)$$

となる。ここで、 $q^2 = k_x^2 + k_y^2$ 、 $k^2 = q^2 + k_z^2$  とした。

行列の特性方程式は

$$(\lambda + \sigma k^2)^2 \left[ \lambda^2 + (1 + \sigma) k^2 \lambda + \sigma k^4 - \frac{q^2 R}{k^2} \right] = 0 \quad (6)$$

となり、2根は  $\lambda = -\sigma k^2$  ( $< 0$ ) で常に減衰解である。残りの2つの解は、

$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{2}(1 + \sigma)k^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \sigma)^2 k^4 - 4\sigma k^4 - \frac{q^2 R}{k^2}} \quad (7)$$

となるので、 $k^4 - q^2 R / k^2 < 0$  が満たされる領域では、 $\lambda_+$  は正となり、増幅解となる。 $\lambda_+ = 0$  となる臨界レイリー数は、 $R = k^6 / q^2$  である。また不安定モードに対応する変数の組は  $u_z$ 、 $\theta$  であるから次の方程式を考える。

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_z + \sigma R \nabla_{\parallel} \theta - \sigma \nabla^4 u_z + (NL) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta + u_z - \nabla^2 \theta + (NL) = 0 \quad (9)$$

ここで(NL)は象徴的に非線形項を表している。また  $\nabla_{\parallel}^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  である。境界条件を満足するためには  $z$  方向の波数は離散値  $k_z = n\pi$  ( $n$  は自然数) をとらなければならない。したがって  $k^2 = q^2 + n^2 \pi^2$  である。臨界レイリー数  $R_c$  を与えるのは  $n=1$  のときであり、 $q^2 = \pi^2 / 2 = q_0^2$ 、 $k^2 = 3\pi^2 / 2 = k_0^2$  で  $R_c = 27\pi^4 / 4$  となる。臨界点近傍において固有値(7)は

$$\lambda_+ \approx \frac{3\pi^2 \sigma}{2(1+\sigma)} \left[ \frac{R - R_c}{R_c} - 3 \left( \frac{q^2 - q_0^2}{k_0^2} \right)^2 \right] \quad (10a)$$

$$\lambda_- \approx -\frac{3(1+\sigma)\pi^2}{2} \quad (10b)$$

と近似できる。 $R < R_c$  に対しては共に負であり、時間的に減衰する安定な解であるが、 $R > R_c$  では  $\lambda_+$  は正になりうる。臨界安定性に対応するレイリー数は  $q^2 - q_0^2$  の二乗の依存性がある。したがって  $R \approx R_c$  のとき  $q^2 \approx q_0^2$  のモードが支配的になる。

式(10a)の  $\lambda_+$  に対する表現は一変数について線形部分の時間発展方程式を定義するために実空間に逆写像することができる。

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{3\pi^2 \sigma}{2(1+\sigma)} \left[ \frac{R - R_c}{3} - 3 \left( \frac{\nabla_{\parallel}^2 + q_0^2}{k_0^2} \right)^2 \right] w = 0 \quad (11)$$

ここでは、鉛直波数  $k_z = \pi$  の基本モードを取り扱っているから、 $u_z(\mathbf{r}, t)$  と  $\theta(\mathbf{r}, t)$  の任意の線形結合である  $w(\mathbf{r}, t)$  は  $w(\eta_{\parallel}, t) \sin(\pi z)$  の形でなければならない。したがって、上下の境界  $z=0, 1$  で  $w(\mathbf{r}, t) = 0$  の条件は自動的に満足する。

時間、空間座標を適当にスケールを取ると次式が得られる。

$$\frac{\partial w(\eta_{\parallel}, t)}{\partial t} - \left[ \varepsilon - (\nabla_{\parallel}^2 + q_0^2)^2 \right] w + w^3 = 0 \quad (12)$$

ここで、 $\varepsilon=3\pi^4(R-R_C)/4R_C$ 。非線形部分の評価を行うと最初に効いてくるのは3次の項であり、原システムの対称性を満足する。 $w$ のスケーリングを変えることにより3次の係数を1とした。この式はSwift-Hohenberg方程式と呼ばれ2次元平面の弱非線形方程式である<sup>4),5)</sup>。

## 2.2 一定の外部場を考慮したSHモデルの導出

ここで、式(12)に外部強制項を考慮するために、式(8), (9)の右辺に強制項 $f_{\nabla u}(\mathbf{r})$ と $f_{\theta}(\mathbf{r})$ を取り入れる。このような方程式の強制項の起源は：対流活動より大きな場の上昇流または下降流が存在する、大規模な温度傾度などの空間分布がある場合や内部発熱があるような場合が考えられる。また下面に温度傾度が存在するような場合には、温度の境界条件を対称にするように定義し直すと外部条件の形で残る。強制項は時間依存性が無く、水平方向の変化は垂直方向の変化と比較して非常に小さいと仮定する。すなわち強制項を $f_*$ で表現すると、次の関係がある。

$$\left| f_*^{-1} \frac{\partial}{\partial z} f_* \right| \gg \left| f_*^{-1} \nabla_{\parallel} f_* \right| \quad (13)$$

(13)を仮定すれば、対流パターンと強制力間の強い相互作用は除外される。この相互作用は場と対流パターン間の位相や波数の同期や非同期の起源となるが、ここでは簡単のため(13)の条件に限定した。

(8),(9)に強制項を考慮した式を組み合わせて

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - \sigma \nabla^2 \right) \nabla^2 + \sigma R \nabla_{\parallel} \right] u_z + (NL) = -\nabla^2 f_{\nabla u} - \sigma R \nabla_{\parallel} f_{\theta} \quad (14)$$

系の時間発展は散逸的であるから、すなわち $|\partial/\partial t| \ll |(1+\sigma)\nabla^2|$ が成り立ち、(11)を導いたのと同様の臨界点近傍での展開を考えると(14)は

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \left\{ \varepsilon - (\nabla_{\parallel}^2 + 1)^2 \right\} w + (NL) = \frac{1}{1+\sigma} \left( \pi^2 \tilde{f}_{\nabla u} - \sigma R \nabla_{\parallel} \tilde{f}_{\theta} \right) \quad (15)$$

となる。ただし $w(\mathbf{r}_{\parallel}, t)$ は $w \sin(\pi z) = (\nabla_{\parallel}^2 - \pi^2)^2 u_z$  また $\tilde{f}(\mathbf{r}_{\parallel})$ は $f_* = \tilde{f}_* \sin(\pi z)$ によって定義する。右辺全体を $f(\mathbf{r}_{\parallel})$ と記し非線形項の主要項 $w^3$ を加えて最終的に次の外部場を考慮したSHモデルを得る。

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \left\{ \varepsilon - (\nabla_{\parallel}^2 + 1)^2 \right\} w + w^3 = f(\mathbf{r}_{\parallel}) \quad (16)$$

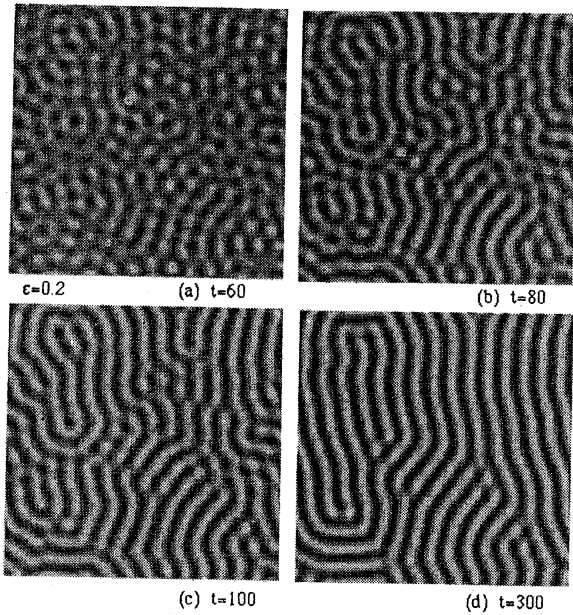


図1. 外部場がない場合のSHモデルの対流  $w(r,t)$  の時間変化 ( $a=0, \epsilon=0.2$ ). (a)  $t=60$ , (b)  $t=80$ , (c)  $t=100$ , (d)  $t=300$ . トーンが明るいほど  $w > 0$ , 暗いほど  $w < 0$  を表している.

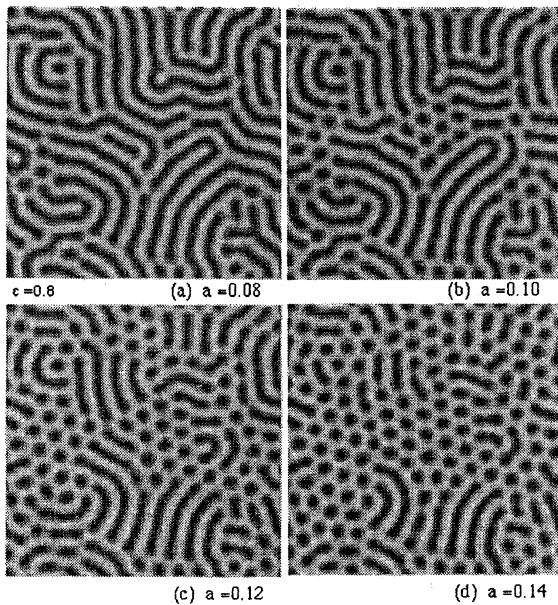


図2.  $t=200$  での  $a$  の変化に伴う  $w(r,t)$  の変化.  $\epsilon=0.8$  で一定だが, (a)  $a=0.08$ , (b)  $a=0.10$ , (c)  $a=0.12$ , (d)  $a=0.14$ .

ここでは  $\epsilon > 1$  の場合は虚数の  $k$  の成長を許すので  $0 \leq \epsilon \leq 1$  の範囲のみを考える.

次節以降では式(16)を使い一定の外部場  $f(\mathbf{r}_j) = a$  (一般性を失うことなく  $a \geq 0$  と置くことができる) を考える. この場合は一様な強制力の場であり, 上昇域内での対流または加熱場中での対流を表現していると考えられる. さらに現実的な状況に近いと考えられる空間的に変化する場の影響も考察する.

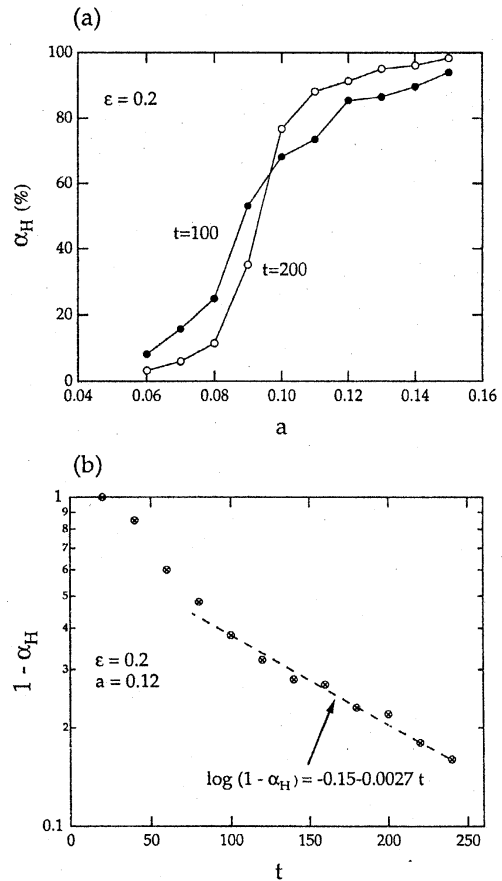


図3. ロールから六角セルパターンへの時間的推移. ( $\epsilon=0.2, a=0.12$ )

(a)  $t=100$  (●) と  $t=200$  (○) における六角形セルの比率  $\alpha_H$  の  $a$  依存性.

(b) 六角形セルの比率の時間変化. 時間に対する  $1 - \alpha_H$  をプロットしている.

### 3 外部場を考慮したSH系の力学

#### 3.1 直接計算

最初に,  $f(\mathbf{r})=a$  ( $>0$  定数)の場合についての直接計算を考える.

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \left\{ \varepsilon - (\nabla_{\parallel}^2 + 1)^2 \right\} w + w^3 = a \quad (17)$$

ここで  $a$  と  $\varepsilon$  が2つの外部パラメーターである. ここでは空間微分は中心差分で近似し, 時間積分については3次のRunge-Kutta法を用いたが, その他の方法で計算してもほとんど差はなかった. 計算領域は1辺が  $L=30\pi$  の2次元正方形平面で, 格子は一様直交で  $128 \times 128$  とした. 境界条件は  $x, y$  ともに周期的条件とし, 初期条件は各格子点毎にランダムに  $-0.05 \sim 0.05$  の範囲で与えた. 時間ステップは  $\Delta t = 0.001$  とした.

図1は, 数値解の時間発展を見た一例 ( $\varepsilon = 0.2$ ) である. 模様は上昇流と下降流の領域を表していると考えて良い. 明るい部分は, 上昇流である. ランダムに出現した対流は波数1に揃いながら成長し, 実際の対流と良く似た発展を示す. すなわち次第に大きくつながり欠陥部分も減少し, ロール型対流として配向も次第にそろい, 最終的には完全な平行ロール型対流に落ちつく.

$a$  を増加させると対流はどのように変化するであろうか. 図2は  $\varepsilon = 0.8$  について  $a$  の値を  $0.08$  から  $0.18$  の範囲で変化させ, 時間  $t=200$  の結果を見たものである.  $a$  が小さいときはロール対流にはそれほど大きな影響はないが,  $a$  が大きくなると中心部で下降し周囲で上昇する六角形のセル(オープンセル)とロール型のセルが混在するようになる.  $a$  の増加とともに次第に六角形セルが支配的になり  $a=0.18$  では, ほぼ全面的に六角形セルとなる. さらに  $a \geq 0.25$  では一様な上昇流のパターンになる. 同様に図3(a)では  $a$  の変化に対するロールから六角セルパターンの推移を  $\varepsilon = 0.2$  について全領域に対する六角形セルの領域の比  $\alpha_H$  で示したもののだが, 時間的な経過を見ると  $t=200$  では  $t=100$  の場合に比べてロールが支配的な場合にはさらにロールが増加し, 六角形セルが支配的な場合には六角形が増加している. 図3(b)では  $\varepsilon = 0.2, a = 0.12$  の場合について, 全  $\alpha_H$  の時間経過を見たものであるが, ほぼ対数的に1に近づいている. このことは, 全領域は時間経過とともにある  $a$  の値を境にしてロールか六角形のセルのどちらかに分かれることを意味する. なお  $a < 0$  であれば, 六角形のセルでは中心で上昇, 周囲で下降となり,  $a > 0$  の場合とは逆になる.

図4は  $\varepsilon = 0.8, a = 0.24$  の場合についての対流の時間発展を見たものである. この場合には, 最初は大部分の領域で初期擾乱が一様な値に近づこうとするが,  $t=40$  頃になると大きな初期値の部分から六角形セルの振幅は指数関数的に発達し, 六角形セルは周囲に広がり, 数を増していく.  $t=100$  ではセルが全領域を覆うようになる. また  $a \geq 0.24$  である場合には初期擾乱は減衰し一定解になる. このように  $\varepsilon$  と  $a$  の値の大きさに

よって最終的に一様解になるか六角形セルに落ち着くかが決まる。大気中の六角形セルの出現の原因の一つとして、大規模な上昇流や下降流中で対流運動が引き起こされることが考えられる。

ある $\varepsilon$ に対して $a$ を増加させると、ロール型対流から六角形セルさらに一定領域に移る。図5は一つのランダムな微小初期条件から行った計算で、対流のパターンと $a$ と $\varepsilon$ のパラメーターの関係を示す領域図として描いたものである。 $\varepsilon$ が小さいとき $a$ の影響が大きく効いてくるのが分かる。また $\varepsilon=0.5$ くらいでは極大値 $a=0.27$ まで六角形セルが維持され、それより大きな $\varepsilon$ に対しては再び小さな $a$ の値で変化する。 $\varepsilon=0$ の場合にはロールから一様流への直接遷移が起こる。

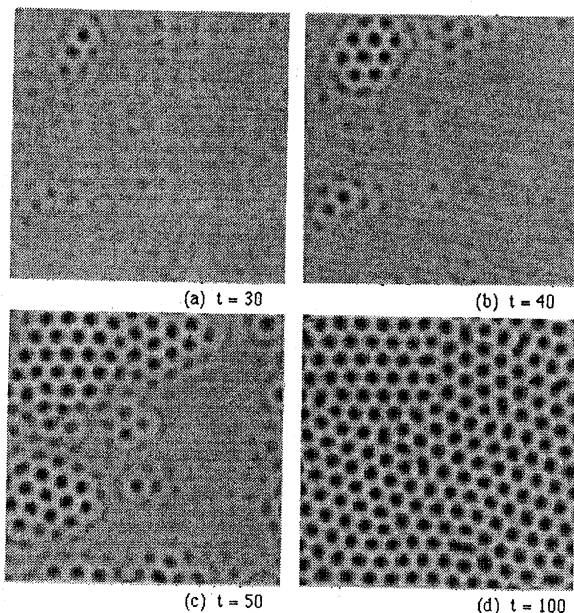


図4.  $\varepsilon = 0.8$ ,  $a = 0.24$ の場合についてのパターンの時間発展。

### 3.2 切断系の導出

ここで対流パターンがどの様を選択されるのかを調べるため、外部場を考慮したSH方程式を用いて、波動モードの切断系を考え振幅方程式を導出してみよう。

$$w(\mathbf{r}, t) = w_0(t) + \frac{1}{2} \sum_m w_m(t) \exp(i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r}) + \text{c.c.} \quad (18)$$

ここで添字 $m$ は波動モードをc.c.は複素共役量を表す。系の時間発展を主要な4個のモードで表現しよう。モードは $m=0, 1, 2, 3$ とし、 $m \neq 0$ の波数ベクトルは $\mathbf{k}_1=(1, 0)$ ,  $\mathbf{k}_2=(-1/2, \sqrt{3}/2)$ ,  $\mathbf{k}_3=(-1/2, -\sqrt{3}/2)$ であり、 $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0$ の条件を満足している。一般性を失うことなく原点と向が適当に取れるので、(18)は次のように書き直すことができる。

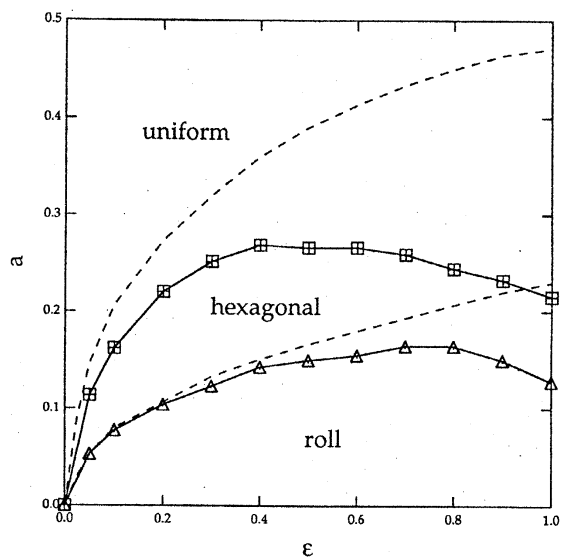


図5.  $a$ と $\varepsilon$ に対するロール、六角形セル、一定解のパラメーター領域図。

実線上にマークがあるのは(17)の直接計算から決定された。破線は3.4節で議論するようにポテンシャルの最低値から決められた境界を示す。

$$w(x, y, z) = w_0(t) + w_1(t)\cos(\phi_1) + w_2(t)\cos(\phi_2) + w_3(t)\cos(\phi_3) \quad (19)$$

ここで  $\phi_1 = x$ ,  $\phi_{2,3} = (x \pm \sqrt{3}y)/2$  である.

(19)を(17)に代入して空間全体で平均を取ると一組みの振幅方程式を得る.

$$\dot{w}_0 = a + (\varepsilon - 1)w_0 - w_0^3 - \frac{3}{2}(w_0(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) + w_1w_2w_3) \quad (20a)$$

$$\dot{w}_1 = \varepsilon w_1 - \frac{3}{4}(w_1^3 + 2w_1(2w_0^2 + w_2^2 + w_3^2) + 4w_0w_2w_3) \quad (20b)$$

$$\dot{w}_2 = \varepsilon w_2 - \frac{3}{4}(w_2^3 + 2w_2(2w_0^2 + w_1^2 + w_3^2) + 4w_0w_1w_3) \quad (20c)$$

$$\dot{w}_3 = \varepsilon w_3 - \frac{3}{4}(w_3^3 + 2w_3(2w_0^2 + w_1^2 + w_2^2) + 4w_0w_1w_2) \quad (20d)$$

ここで左辺のドットは時間微分を表す. 元の方程式が回転と反転に対して変化しないことを反映して,  $w_1, w_2, w_3$ の任意の入れ替えに対して方程式の形は変わらない.

### 3.3 切断系の定常解

(20)の定常解は時間微分を0として次式の関係が見いだせる.

$$(w_1^2 - w_2^2)(w_2^2 - w_3^2)(w_3^2 - w_1^2) = 0 \quad (21)$$

それ故, 一般性を失うことなく今後  $w_2^2 = w_3^2$  とする. (20)の解には次のものがある.

(a) 一様流

$w_1 = w_2 = w_3 = 0$  とすると, 一様流の解  $w_0$  は次の3次方程式の解として求められる.

$$(\varepsilon - 1)w_0 - w_0^3 + a = 0 \quad (22)$$

$a \geq 0$  で  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  の範囲で考えれば  $w_0$  は正で1つの解を持つ.

(b) 平行四辺形解

$w_0$  は次の方程式から決まり, その他の  $w_m$  はその  $w_0$  を用いて表現される.

$$\left(\frac{7}{3}\varepsilon - 1\right)w_0 - 45w_0^3 + a = 0 \quad (23a)$$

$$w_1 = -4w_0 ; w_2^2 = w_3^2 = \frac{4}{9}\varepsilon - \frac{20}{3}w_0^2 \quad (23b,c)$$

これは平行四辺形に近い形である.

(c) ロール型解

$w_2 = w_3 = 0$  とするとロール型解が求められる.



$$-(\epsilon+1)w_0+5w_0^3+a=0 \quad ; \quad w_1^2=\frac{4}{3}\epsilon-4w_0^2 \quad (24a,b)$$

(d) 六角形セル型解

$w_1=w_2=w_3$  のとき，次の方程式の解として六角形型の解が決まる．

$$\tilde{w}^2+w_1^2=\frac{\epsilon}{3} \quad , \quad (25a)$$

$$\left(a+\frac{1}{2}w_1-\frac{5}{8}w_1^3\right)+\left(\frac{2\epsilon}{3}-1-\frac{17}{4}w_1^2\right)\tilde{w}=0 \quad (25b)$$

ここで， $\tilde{w}=w_0+w_1/2$ ．実数の解の数はパラメーター値に依存して0,2または4個である． $w_1>0$  (すなわち $w_1w_2w_3>0$ ) のとき中心部でプラスとなる六角形クローズドセル， $w_1<0$  (すなわち $w_1w_2w_3<0$ ) のとき中心部が負となるオープンセルである．

定常解の安定性は，Jacobian行列式  $m_{i,j}=(\partial w_i/\partial w_j)$  を停留点で評価して決定する．すなわち  $m$  の全固有値が正の実部を持たないなら，定常解は安定である．

図6に4つの定常解をまとめた．図では一定の  $\epsilon=0.5$  に対して  $a$  を変化させて  $w_i$  ( $i=0,1,2,3$ ) の値を描いた．濃い実線は安定な分岐解であり薄い実線は不安定分岐解を表している．

一様解は任意の  $a$  に対して存在するが，他の型の解は存在範囲が限られている．また六角形解の内  $a \geq 0$  とした，今回の場合にはオープンセルのみが安定解である．

3.4 解の選択

上に議論した，安定定常解は  $w_i$  の位相空間内に有限の吸引域を持っているので，それに関する対流パターンが原システム(16)にも，同様に出現すると考えられる．しかし，極端に小さな吸引域を持つ解は実際的な観点から除外される．与えられたパラメーターに対してどの型の解が選ばれるかを議論するため，任意の  $\epsilon$  と  $a$  に対して， $w_i$  にランダムな初期値(100個程度)を与えて時間積分した．その結果  $w_i$  は常に安定なアト

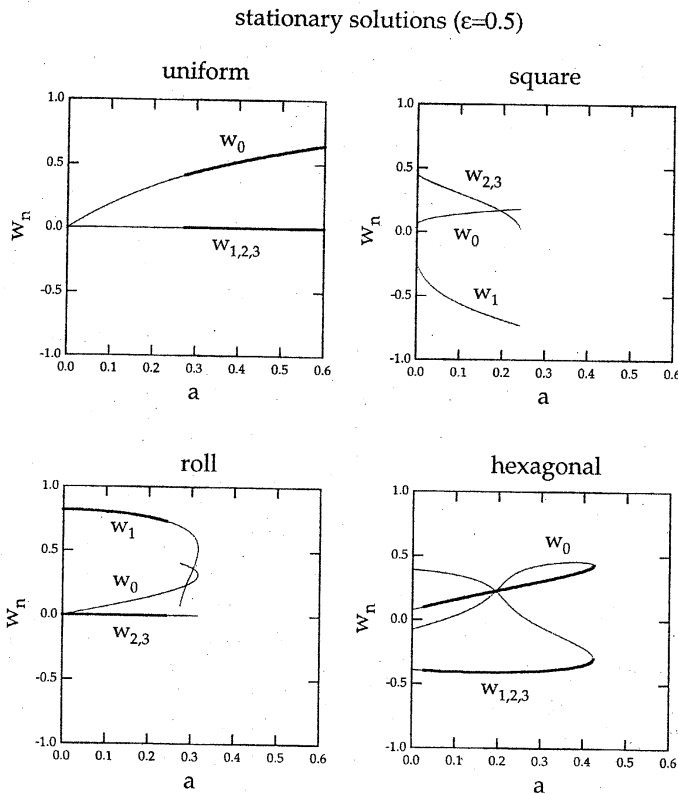


図6. 切断系(20)の定常解(アトラクター)  $\epsilon=0.5$  の場合について， $a$  に対して  $w_j$  ( $j=0,3$ ) をプロット．太い線は安定解，細い線は不安定解を表す．

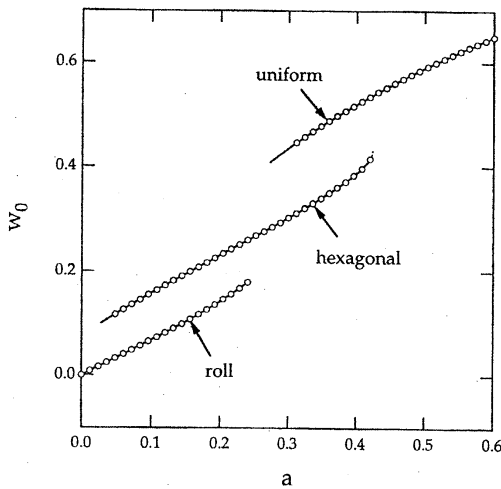


図7. 図6の定常解(実線)と(20)の数値計算から得られた $w_0$ の収束値(○).

ラクターの一つに収束した. 図7では $\varepsilon=0.5$ の場合について $w_0$ の最終値が白丸で表現されている. 同時に安定また不安定な分岐解をそれぞれ濃い実線および細い実線で示した.

数値計算の結果から $w_i$ は常に安定なアトラクターの一つに収束すること, および方程式(20)が決定論的であることを考えると, 最終的な対流パターンは $w_i$ の初期値によって一つに決まることが示唆される. しかし, (17)の数値計算では初期値に依らず一つの解が選ばれるように見える. (17)に

おける対流パターンの選択則を確かめるために対応するLyapunov汎関数を考える.

$$\hat{g}[w(\mathbf{r}, t)] = -\frac{\varepsilon}{2} w^2 + \frac{1}{2} ((\nabla^2 + 1)w)^2 + \frac{1}{4} w^4 - aw \quad (26)$$

この汎関数を用いて力学系(17)は次のように再現される.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\delta \hat{g}[w]}{\delta w} \quad (27)$$

ここで右辺の汎関数の微分は任意の $v(\mathbf{r})$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(\mathbf{r}) \frac{\delta \hat{g}[w]}{\delta w} d\mathbf{r} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(w + \mu v) d\mathbf{r} \quad (28)$$

によって定義される. Lyapunov汎関数は全領域で積分すると時間的に単調減少関数であることを示すことができる. すなわち

$$G(t) = \int \hat{g}[w(\mathbf{r}, t)] d\mathbf{r} \quad \text{として}$$

$$G(t+\delta t) - G(t) = \int (\hat{g}[w+\delta t w] - \hat{g}[w]) d\mathbf{r} = \int \delta t w \frac{\delta \hat{g}}{\delta w} d\mathbf{r} = -\delta t \int \left( \frac{\delta \hat{g}}{\delta w} \right)^2 d\mathbf{r} \quad (29)$$

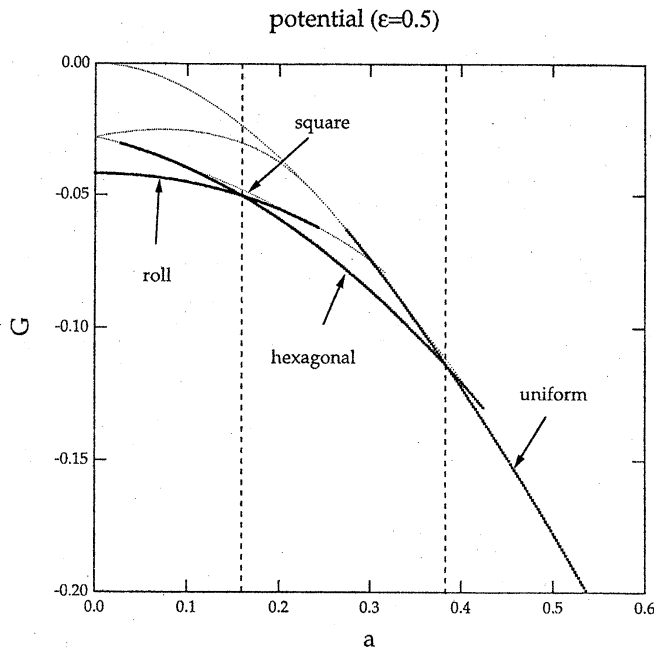


図8. 切断系(20)の定常解を使って得られたポテンシャルG.  $\epsilon = 0.5$ の場合.

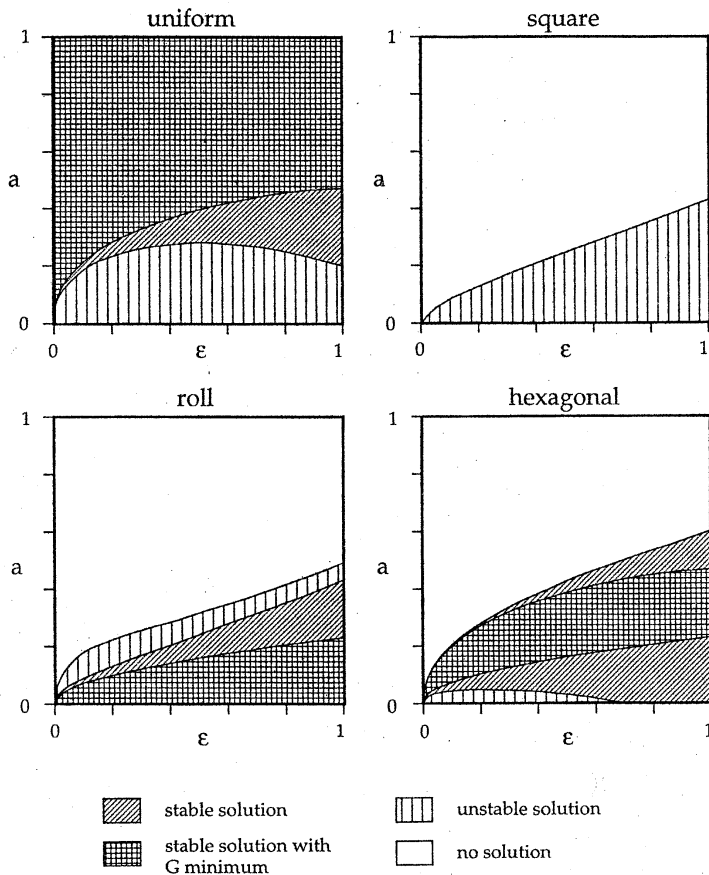


図9.  $a-\epsilon$  位相空間における4種の定常解. 図中の模様の違いは解が存在するか, 解が安定か, 局所最小値に対応しているかを示す.

ここでドット記号は時間についての偏微分を示し $\delta(t)$ は微小量と仮定する. 切断系(20)の定常解を使って得られたポテンシャルGが図8に示されている. 濃い線は安定解を細い点線は不安定解を表している. この例では $\epsilon = 0.5$ とした場合を示すが, ポテンシャルが大域的最小値となるのは $a < 0.16$ のときロール解であり,  $0.16 < a < 0.38$ のとき六角形解,  $a > 0.38$ のとき一様解である. 四辺形解は常に不安定であり観測されない. Lyapunov汎関数に基づく議論は, 系が解の位相空間において大域的最小値というのではなく, 時間的に局所的最小値に収束することを保障しているに過ぎない. 一方(26)は $w$ に対して正則であるから, 大ざっぱな言い方をすれば局所最小値が深ければ深いほど吸引域も広いといえることができる.

図9に $a-\epsilon$ 位相空間における4種の定常解をまとめた. 図中の模様の違いは解が存在するか, 解が安定かどうか, 局所最小値に対応しているかどうかを示している.  $\epsilon$ を一定に保ち $a$ を0から増加させると, 最初ロールが出現し, 次に六角形となり最後には一様解になることが期待される. なお可能な六角形セルの形はオープンセルである.

### 3.5 傾斜した外部場の影響

次に傾斜した外部場の効果を考える。(16)においてテント型の関数すなわち $A$ を正定数として $f(x,y) = A(1/2 - |2y/L - 1|)$ とする。この場の最大値は $y=L/2$ で $A/2$ 、最小値は $y=0$ と $y=L$ で $-A/2$ である。周期的な境界条件を仮定しているから、任意の整数 $m, n$ に対して $w(x+mL, y+nL) = w(x,y)$ が成り立つ。この様な設定では、ロール型セル、六角形セル、一様流が共存することが考えられる。図10は $\varepsilon=0.6$ とした場合について、 $A$ を次第に増加させた場合の対流の変化を見たものである。領域は $y$ 方向について3つの領域に分けられる。図の中央部分は上昇流または中心が下降流の六角形セルであり、図の上下端領域では中央部分と逆に下降流または中心が上昇流の六角形セルである。

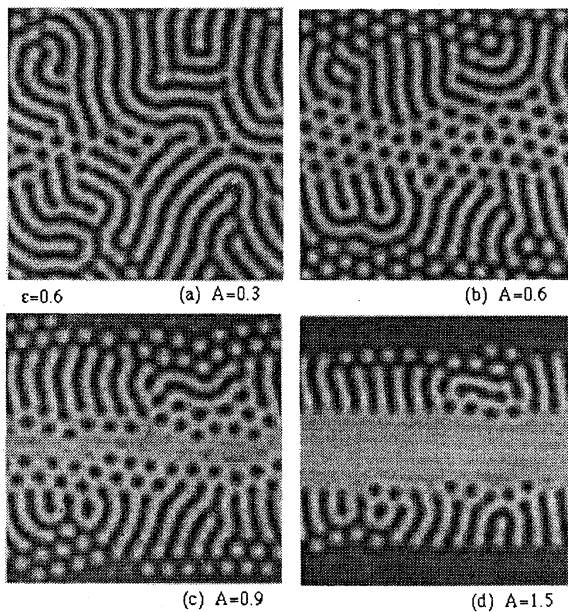


図10.  $\varepsilon=0.6$ とした場合について、対流セルパターンの $A$ 依存性.

この二つの領域は上昇流と下降流が入れ替わっているだけでほぼ同様のパターンである。この二つの部分に挟まれた中間領域ではロール状の対流が見られる。ロールの軸は、どの場合も $y$ 軸方向にほぼ揃っている。垂直シアアが $y$ 軸方向にある場合にも同様の方向に揃うことが示されているが、この場合は明らかにシアアの効果ではない。原理的には類似しているが、外部場の傾度による流れの非対称性の効果である。 $A$ がさらに大きくなると、図10(d)に見られるように中央部分は一様な上昇域となり上下端では一様な下降流となる。その間では、規則的な波動状ロールが見られるようになる。

## 4. 対流の実験

実験では一様な上昇流などは簡単には作り得ないが、場に温度傾度を持たせて外部場の影響を見ることが出来る。計算結果と比較するため室内対流の制御実験を行った。用いた対流槽の形状は、 $200(\text{mm}) \times 100(\text{mm})$ の平面で材質は側面をアクリル、底面は銅板とし、対流層の深さは、 $2 \sim 40\text{mm}$ の範囲でアクリルの上蓋を変化させることにより可変とした。実験は底板に水平温度傾度を与えた場合と一定の場合について行った。作業流体として流体実験では良く用いられる<sup>9)</sup>シリコン油の粘性 $100\text{cSt}$ と $1000\text{cSt}$ のものをを用いた。シリコン油はかなり大きなプラントル数を持ち $\text{Pr}=2000$ 程度である。流れはアルミ箔の粉を流体に混ぜることにより可視化した。上部の境界が空気に接している場合(自由境界面)には六角形の細胞が卓越するのに対して、上部

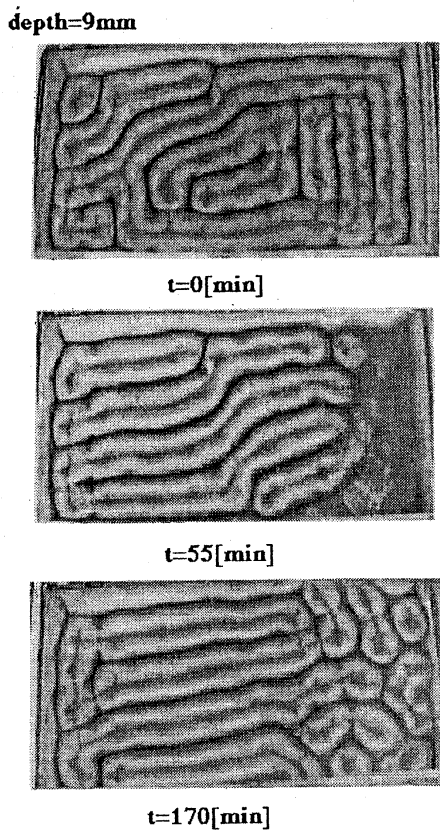


図11. 底面に水平温度傾度をつけた場合の対流のパターン.

もアクリル板で覆った場合(固定境界面)には細長いロール状の対流が卓越する. このように境界条件が対称かどうかで卓越する対流の形状が異なる.

底板に水平温度傾度を与える場合, 底板の一端を冷却部(銅)に水道水を循環させることによって冷却し, 鉛直温度差が10~15K程度であるのに対して, ほぼ直線的な水平方向に3~5K程度の温度差をつけた. 図11に実験結果の一例を示す. 図では左端を加熱し右寄りに冷却槽を配置し水平方向に温度勾配をつけたときの時間変化を見た. セルを黒く縁取る暗い部分は下降流を示し, 各セルの中心部の少し暗い部分が上昇流である. ロール対流が卓越した状態から冷却を開始し, 55分後には右側では対流が消え去ろうとしているが, 170分後では冷却された右側のセル形状が計算結果でみられた下降流中での六角形対流パターンに類似している. 実験では側壁の境界条件の制約が大きく定量的に計算と比較することは不可能だ

が, 定性的には計算と実験には良い対応が見られる.

## 5. 結論

Swift Hohenberg のモデルによる外部場の影響を調べた結果, 次のようにまとめられる:

- (1) SHモデルの切断力学系では安定なアトラクターとして一様解, ロール, 六角形の解が存在しうる. これらの解は実際に強制項をもつSHモデルの計算において現れた.
- (2) 制御パラメーター $a$ (強制場の強さを特徴づける量)と $\varepsilon$ (Rayleigh 数を特徴づける量)を与えると唯一とは限らないが解が決まる. 最終的な対流パターンを唯一に決定するには, 完全に $w(\mathbf{r})$ の初期値の情報を知っている必要があるが, 実際には(29)で定義したポテンシャル $G$ は正当な見積もりを与える.
- (3) 固定した $\varepsilon$ の値に対して,  $a$ の増加に伴ってロール, 六角形, 最後は一様な対流パターンが現れる.
- (4) 傾斜した場を考えると, 六角形のオープンセル, 場の傾斜方向に軸をもつロー

ルが隣接して生じる。これらの結果は衛星の雲画像に類似している。

(5) シリコーン・オイルを用いた下層を線形に温度傾度をつけて加熱した対流の実験では、下降流領域では六角形がまた中間領域では温度傾度に対して平行なロールの卓越が見られ、モデル計算と定性的な一致が見られた。

今回の議論で、簡単な対流モデルを用いて場の強制力とパターン変化について一定の情報を引き出すことができた。しかしながら、現実の対流は3次元であるのでモデルはいろいろな構造を調べるには十分ではない。問題の一つは、対流の波長があらかじめ設定された一つの波長に落ちついてしまうことである。ここでは基本場の非一様性を導入しているので、移流成分との相互作用を通して波長が伸びたり縮んだり非対称性が現れることは十分に考えられる。また、対流の移流による移動や非定常な鉛直構造などが議論できなかつた。最終的な議論は3次元モデルでダイナミクスに重点を置いた計算結果との比較がなされる必要がある。実験については、側壁の影響が大きく、今後定量的な面でも議論できる計測および解析が望まれる。

#### 参考文献

- [1] F.H. Busse: Non-linear properties of thermal convection, *Rep.Prog.Phys.***41**(1978), 1929-1967.
- [2] J.Swift and P.C. Hohenberg, Hydrodynamic fluctuation at the convective instability. *Phys. Rev.*, **A15** (1977). 319.
- [3] H.S. Greenside and M.C. Cross, Stability analysis of two-dimensional convection. *Phys. Rev.*, **A31** (1985), 2492-2501.
- [4] M.C. Cross, G. Tesauro and H.S. Greenside, Wave number selection and persistent dynamics in model of convection. *Physica*, **23D** (1986), 12-18.
- [5] 蔵本, 川崎, 山田, 甲斐, 篠本: パターン形成, 4章液晶パターン, 朝倉書店 (1991).
- [6] Y. Ookouchi, S. Miyahara and R. Sawada: Rayleigh convection in a fluid heated differentially at the bottom. Part I: experimental study, *J. Meteor.Soc .Japan*, **55** (1977), 392-396.