

Tollmien-Schlichting 波の非線形発展における 減衰固有モードの役割

鳥取大学応用数理工学科 藤村 薫 (Kaoru Fujimura)

1 はじめに

平面 Poiseuille 流は、Navier-Stokes 方程式の厳密解であり、かつ、厳密に2次元平行であることから、流体運動の安定性理論においてベンチマーク的な役割を果たしてきた。本稿では流れ場を2次元に限定しよう。流れ関数 $\psi(x, z)$ を導入すると、適当な無次元化の下に主流は $\bar{\psi}(x, z) = z - z^3/3$ で与えられる放物線状の速度成分を持つ。これに2次元攪乱 $\hat{\psi}(x, z, t)$ を加え

$$\psi(x, z, t) = \bar{\psi}(z) + \hat{\psi}(x, z, t),$$

主流の満たす方程式を引き去ることにより攪乱方程式

$$\frac{\partial \Delta \hat{\psi}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \Delta \hat{\psi}}{\partial x} - \bar{u}'' \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} - R^{-1} \Delta^2 \hat{\psi} = J(\hat{\psi}, \Delta \hat{\psi}) \quad (1)$$

を得る。ここで、攪乱は x 方向に周期的であると仮定して Fourier 分解

$$\hat{\psi} = u_0(z, t) + \sum_{j \neq 0} \Phi_j(z, t) e^{ij\alpha x} \quad (2)$$

によって攪乱方程式の解を求めることを考えよう。

圧力勾配一定条件の下では Fourier 係数に対する発展方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} S_j \Phi_j + ij\alpha \bar{u} S_j \Phi_j - ij\alpha \bar{u}'' \Phi_j - R^{-1} S_j^2 \Phi_j = \sum_k \tilde{J}(\Phi_k, S_{j-k} \Phi_{j-k}), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - R^{-1} \Delta u_0 = \sum_j \tilde{J}(\Phi_j, D\Phi_{-j}), \quad S_j = D^2 - j^2\alpha^2, \quad D = d/dz \quad (4)$$

のように表される。

ここで非線形項を無視すると、線形理論の基礎方程式である Orr-Sommerfeld 方程式

$$i\alpha(\bar{u} - c)S_1\Phi - i\alpha\bar{u}''\Phi - R^{-1}S_1^2\Phi = 0, \quad (5)$$

が得られるが、これは同次境界条件

$$\Phi = D\Phi = 0 \quad \text{at } z = \pm 1$$

と共に線形固有値問題を構成する。

非線形性が十分弱い、しかし攪乱の有限性を無視することができない弱非線形段階では、中心多様体定理もしくは特異摂動展開に基づく弱非線形理論が Stuart-Landau 方程式

$$\frac{dA}{dt} = \sigma A + \lambda_1 |A|^2 A + \dots, \quad (6)$$

を与える。この方程式に含まれる定数 λ_1 は (第1) Landau 定数と呼ばれ、その値は線形臨界点において: $\lambda_1 = 30.95 - 172.8i$ であるので、臨界点における分岐は亜臨界である。

Stuart-Landau 方程式の収束半径は予想に反して非常に狭いことが繰り返し指摘されてきた。そのため、亜臨界不安定となった2次元攪乱は弱非線形理論の枠内では通常有界とはならない。有界な2次元平衡解の解析は、ある位相速度に乗った系からみて攪乱が定常であるという仮定の下に (3),(4) の解として求められる。その結果、2次元有限振幅波解は Reynolds 数を非線形臨界値 (≈ 2900) 以上で固定したとき、閉曲線として得られる。閉曲線の下分枝は亜臨界不安定な平衡解、上分枝は安定な平衡解を表すものと考えられる。しかし、上分枝でさえ、パラメータの値によっては、同一の波数を有する振動モードに対して不安定となり、その結果、変調波列が安定に実現され得ることが明らかにされた。また、下分枝は3次元攪乱に対して不安定であり、平面 Poiseuille 流の場合、K-タイプと H-タイプの2種類の3次元分化が可能であることは広く知られている。

いずれにしても、Tollmien-Schlichting 波、すなわち、Orr-Sommerfeld 方程式 (5) の与える第1固有モードが攪乱の初期増幅を決定付け、その後の非線形発展の定性的な記述は Stuart-Landau 方程式によって少なくとも定性的には成功裏に行われてきた。このことは、第1分岐に関しては第1固有モードが本質的であることを意味している。

しかし、1990年頃から、ノーマルモード解析に基づく理解が全てではない、むしろノーマルモード解析によって求められる離散無限個のモードの適当な線形結合

$$\hat{\psi} = e^{i\alpha x} \sum_j C_j \phi_1^{(j)}(z) e^{\sigma_1^{(j)} t}$$

が、least stable である第1固有モード $\phi_1^{(1)}$ の線形増幅・減衰特性 $e^{\sigma_1^{(1)} t}$ と比較して非常に大きな初期増幅をもたらす可能性のあることが指摘されはじめた。このような結合によって得られる攪乱のうちで初期増幅最大のものを optimal perturbation と呼ぶ。これは、Orr-Sommerfeld 作用素が非自己随伴であることに起因する。

optimal perturbation は、初期には増幅するものの、時間が十分に経過すると攪乱に含まれる高次の固有モード成分は減衰し、最終的には第1固有モードのみが生き残り、第1固有値の実部に従って線形減衰する。しかし、最終的な線形減衰に至る以前に Tollmien-Schlichting 波の2次元平衡解の下分枝 (臨界振幅) を越えれば、そのような攪乱は非線形増幅を続け、ついには上分枝に到達することが容易に予想される。第1固有モードを単独で励起する場合と比較して、optimal perturbation を励起すれば臨界振幅を越えるのに要する初期振幅ははるかに小さくてすむ。この意味から、optimal perturbation を初期に励起することができれば、乱流への遷移を大きく促進することが可能であるので、実験的にも興味深い。

これまでの研究から、optimal perturbation には A,P,S モードの junction 領域の固有値に属する固有関数が不可欠であることが分かっている。したがって、junction 領域において線形固有値の縮退が生じることと optimal perturbation の初期増幅との間には密接な関係がありそうである。実は、junction 領域近傍の固有値は Orr-Sommerfeld 作用素に含まれる攪乱に対して非常に敏感である。擬スペクトルを用いた optimal perturbation の増幅の評価において、この領域に属する固有モードが大きな寄与をしているという事情がある。

30年も以前に Pekeris and Shkoller は平面 Poiseuille 流における2次元攪乱の非線形発展を、Fourier-固有関数展開に基づいて数値的に検討している。その結果、第1モードのみを初期値とする場合、臨界振幅値を上回る初期振幅を導入すると攪乱は確かに亜臨界不安定をおこし、またその場

合, junction 領域のモードが非線形相互作用を通じて大きく励起されることが示された. さらに, junction 領域のモードを初期値とする場合にも, 初期振幅がある臨界値を越えると亜臨界不安定を生じることが結論された.

本研究では, まず, Pekeris and Shkoller の示した junction 領域のモードを用いた初期攪乱は, その振幅の定義が適切とはいえないために, 実はエネルギーノルムで見ると第1モードが臨界振幅を上回る際の初期振幅値の 10^4 倍程度の大振幅攪乱に相当することを指摘する. また, エネルギーノルムで攪乱振幅を整理したとき, どのモードが亜臨界不安定を起こして平衡解の上分枝に漸近するのかを数値的に明らかにする. さらに, 第 k 固有モード ($k \geq 2$) を初期値とした場合, その自己相互作用を通じて第1モードがどのように励起されるかを議論する. なお, ここでは, 網羅的にパラメータ値を変化させることを避け,

$$\alpha = 1.099, \quad R = 4398.7 \quad (7)$$

に限定する. この値は, $(\alpha, R) = (1, 4000)$ 近傍での, 任意の2つの固有値の距離が最小となる点 (α, R) に対応する.

2 数値解法

攪乱の非線形発展を調べるため, Fourier 係数に対する方程式 (3,4) を Chebyshev 多項式で展開する:

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \sum_{n=0}^N \Phi_m^{(n)} (1-z^2)^2 T_{2n+1-(n-2\lfloor n/2 \rfloor)}(z), \\ u_0 &= \sum_{n=0}^N u_0^{(n)} (1-z^2) T_{2n+1}(z). \end{aligned} \quad (8)$$

ここでの目的は, 高次固有モードによる第1モードの励起を調べることにあるので, 十分な空間分解能が必要となる. 計算は

$$N = 40, \quad \Delta t = 5 \times 10^{-4}, \quad 10^6 \text{ steps}, \quad -2 \leq m \leq 2$$

$$N = 80, \quad \Delta t = 5 \times 10^{-6}, \quad 10^7 \text{ steps}, \quad -2 \leq m \leq 2$$

の2条件で行った. また, Fourier 分解は $-2 \sim 2$ と $-8 \sim 8$ の2種類でシミュレーションを行ったが, 定性的な差異はみられなかったので, ここでは $-2 \sim 2$ による結果を示す. 初期条件は

$$\Phi_0 = 0, \quad \Phi_1 = \phi_1^{(j)}, \quad \Phi_2 = 0, \dots$$

とした.

3 解析結果

3.1 エネルギーノルムと局所振幅

まず, Figure 1 は $(\alpha, R) = (1.099, 4398.7)$ における偶関数攪乱の固有値の分布を最初の 30 個示す. 図から, wall モードは第 1, 5, 8, 10, 11 モード (A モード), center モードは第 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12 モード (P モード), 第 13, 14 モードが junction 領域における最も接近したモードであり, それら以降が transition モード (S モード) である.

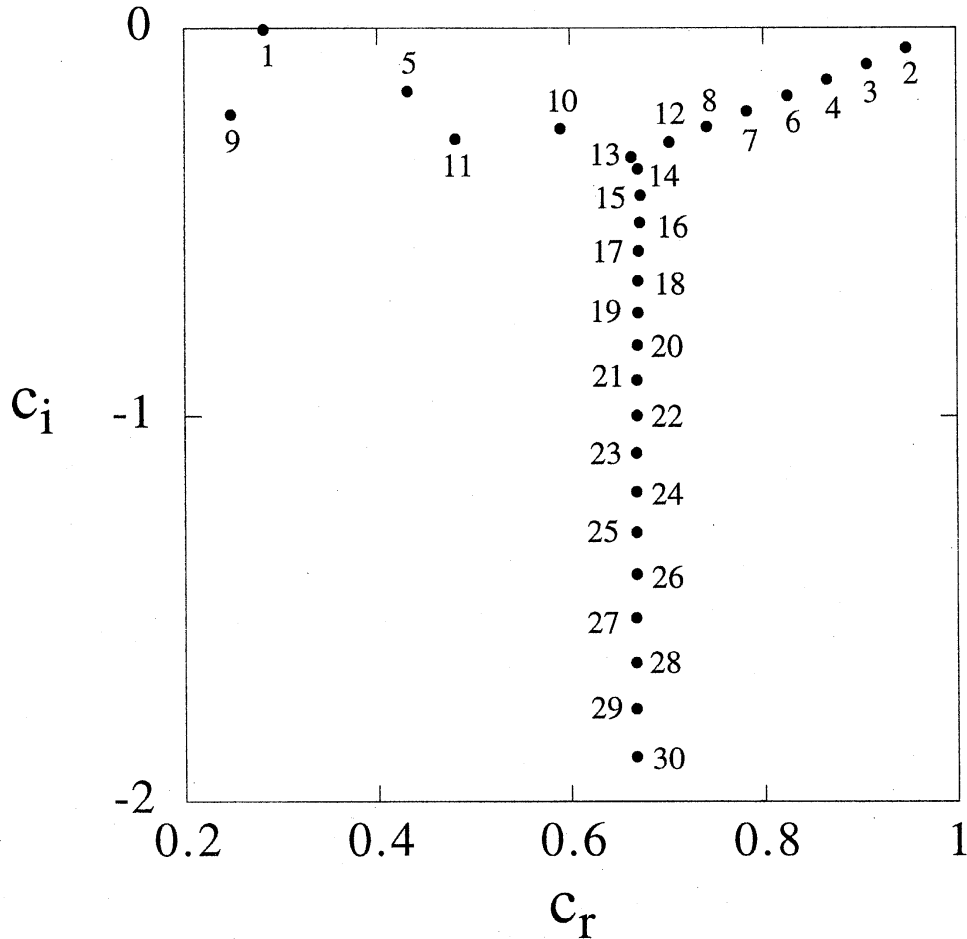


Figure 1: $(\alpha, R) = (1.099, 4398.7)$ における偶関数攪乱の固有値の分布

Figure 2 は $\alpha = 1.099$, $R = 4398.7$ における最初の 20 個の線形固有関数の分布を絶対値で示したものである。ここでは基本波として偶関数攪乱のみを考える。S モードはいずれも流路中央、すなわち $z = 0$ において最小値をとるので、 $z = 0$ における攪乱振幅を攪乱振幅の代表値として用いるのは適切ではない。ここでは、次のエネルギーノルム

$$\|u_1^{(j)}\| = \int_{-1}^1 (|D\phi_1^{(j)}|^2 + \alpha^2 |\phi_1^{(j)}|^2) dz \quad (9)$$

を初期値の振幅を評価する目的で用いる。例えば、 $\phi_1^{(13)}(0) = 1$ のとき $\|u_1^{(13)}\| = 5 \times 10^7$ 、また、 $\max |D\phi_1^{(13)}| = 503$ である。 $\phi_1^{(1)}(0) = 1$ のとき $\|u_1^{(1)}\| = 2167$ 、また、 $\max |D\phi_1^{(1)}| = 2.25$ であることと比較すると、少なくとも S モードの代表的な振幅の定義に $z = 0$ における局所的な流れ関数の値は適切とはいえない。Pekeris and Shkoller の A,P,S の junction 領域にあたる第 13 モードを初期値とするシミュレーションは $\alpha = 1$, $R = 5000$ で行われ、 $z = 0$ で 2×10^{-4} の振幅で初期値を与えた場合に単調減衰ではなくある振幅値のまわりに振動する結果が得られている。さて、 $\alpha = 1$ は今回の 1.099 と大きくは違わないが、 $R = 5000$ は 4398.7 よりも臨界 Reynolds 数からみればかなり高い値となっているので、臨界振幅値は、 $R = 4398.7$ に

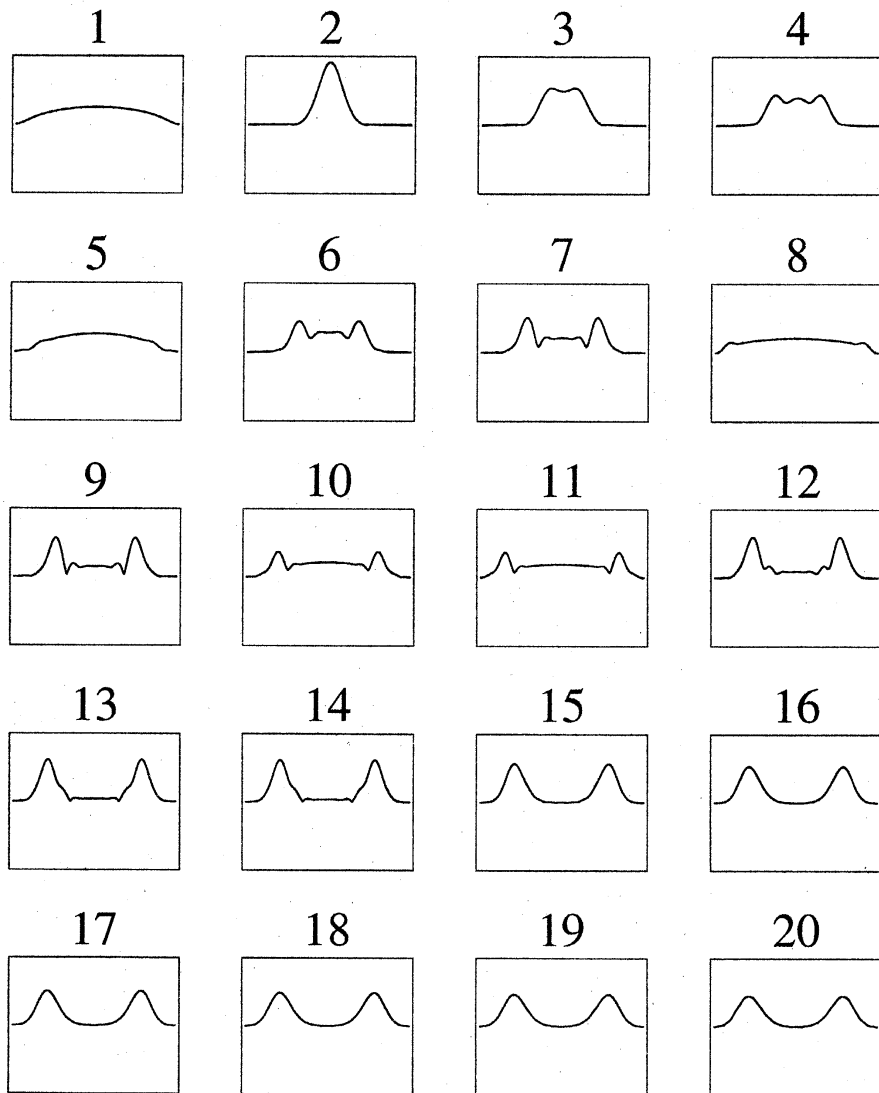


Figure 2: $(\alpha, R) = (1.099, 4398.7)$ における偶関数攪乱の固有関数の絶対値の分布. 数字は固有モードの次数を意味する.

対しては 2×10^{-4} よりもさらに大きな値となることが考えられる. $\phi_1^{(13)}(0) = 2 \times 10^{-4}$ は, $R = 4398.7$ であれば $\sqrt{\|u_1^{(13)}\|} \simeq 1.4$, また, $\max |D\phi_1^{(13)}| \simeq 0.1$ に相当する. さらに, 第1モードを初期値とした場合の臨界振幅値は, $\phi_1^{(1)}(0) = 6 \times 10^{-4}$ と得られているが, この値は $R = 4398.7$ であれば $\sqrt{\|u_1^{(1)}\|} \simeq 0.02$, また, $\max |D\phi_1^{(1)}| \simeq 0.001$ に相当する. 例えば, 実験室系で Tollmien-Schlichting 波の2次不安定によるスパイクを励起する際の最大振幅値が数%から10%程度であることを考えると, 最大振幅値が10%の junction 領域の攪乱の励起はかなり大振幅の攪乱の励起であるといえよう.

我々の解析例では, $\sqrt{\|u_1^{(1)}\|/\|u_1^{(13)}\|} \simeq 1/152$ は, $\max |D\phi_1^{(1)}|/\max |D\phi_1^{(13)}| \simeq 1/224$ と同程度であるので, 攪乱の最大値を用いてもエネルギーノルムを用いても, いずれの規格化も同様な結果が得られるものと考えられる. ここで課した初期振幅はエネルギーノルムで0.02であるから, 最大振幅に換算すると $\max |D\phi_1^{(1)}| \simeq 0.001$, $\max |D\phi_1^{(13)}| \simeq 0.0014$ となり, また, $\phi_1^{(1)}(0) \simeq 4 \times 10^{-4}$, $\phi_1^{(13)}(0) \simeq 3 \times 10^{-6}$ に相当することが分かる.

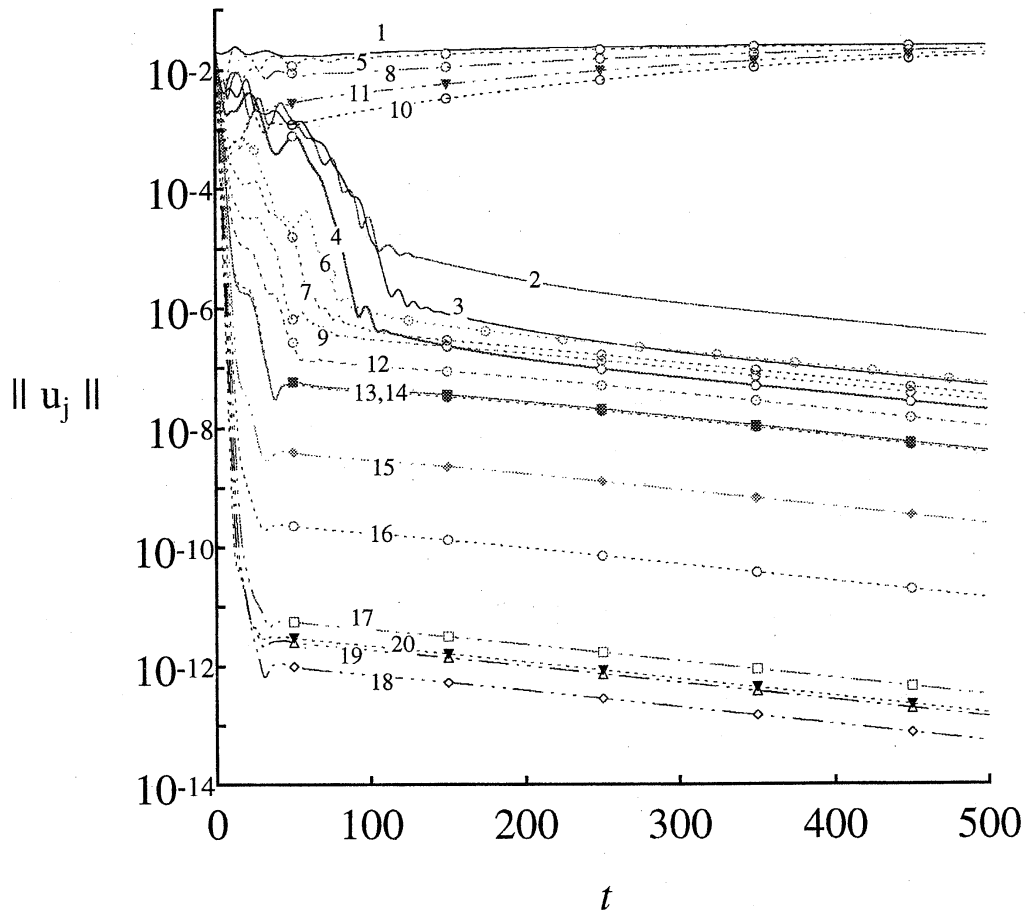


Figure 3: $(\alpha, R) = (1.099, 4398.7)$ における第 k 固有モードを初期値として与えた場合のその後の時間発展. いずれのモードも初期振幅は $\|u_1^{(k)}\| = 0.02$ とした.

3.2 亜臨界不安定を生じる高次固有モード

第 k 固有モードを初期値として与えた場合の, その後の時間発展の様子を Fig.3 に示す. 示した値は基本波のエネルギーノルム

$$\|u_1\| = \int_{-1}^1 (|\sum_j D\phi_1^{(j)}|^2 + \alpha^2 |\sum_j \phi_1^{(j)}|^2) dz \quad (10)$$

である. 各々の曲線に付記した数字が k の値に対応する. この図は, Chebyshev 多項式展開の上限を $N = 40$ とした結果である. これによると, $k = 1, 5, 8, 10, 11$ の場合が臨界振幅を越えて安定な上分枝に漸近するのに対し, それ以外の全てのケースでは, 臨界振幅に及ばず, 最終的に減衰することが分かる. 減衰段階ではいずれも第 1 固有モードの減衰率に基づいた線形減衰 $e^{\text{Re}\sigma_1^{(1)}}$ が生じている. 第 k モードの自己相互作用によって, 全モードにエネルギーが分配されるが, その中で第 1 モードだけが最後まで生き残り, それ以外のモードはより速やかに減衰することによる. 臨界振幅値を越えて上分枝に漸近するモードは全て A モード, すなわち wall モードである. この図によると, A, P, S モードの junction 領域のモードは上分枝にまで成長することがないことになるが, 十分に大きな初期振幅を与えるとその場合でも臨界振幅を越えることが確認されている. 臨界振幅値を越えるかどうかは, 第 1 モードがどれだけ第 k モード間の自己相互作用によって初期に大きく励起されるかに依っている. 実際, A モードは他のモードと比べて第 1 モードに固有関数形が近く, 極めて速やかに第 1 モードが励起されることが, 解析結果からも分かっている.

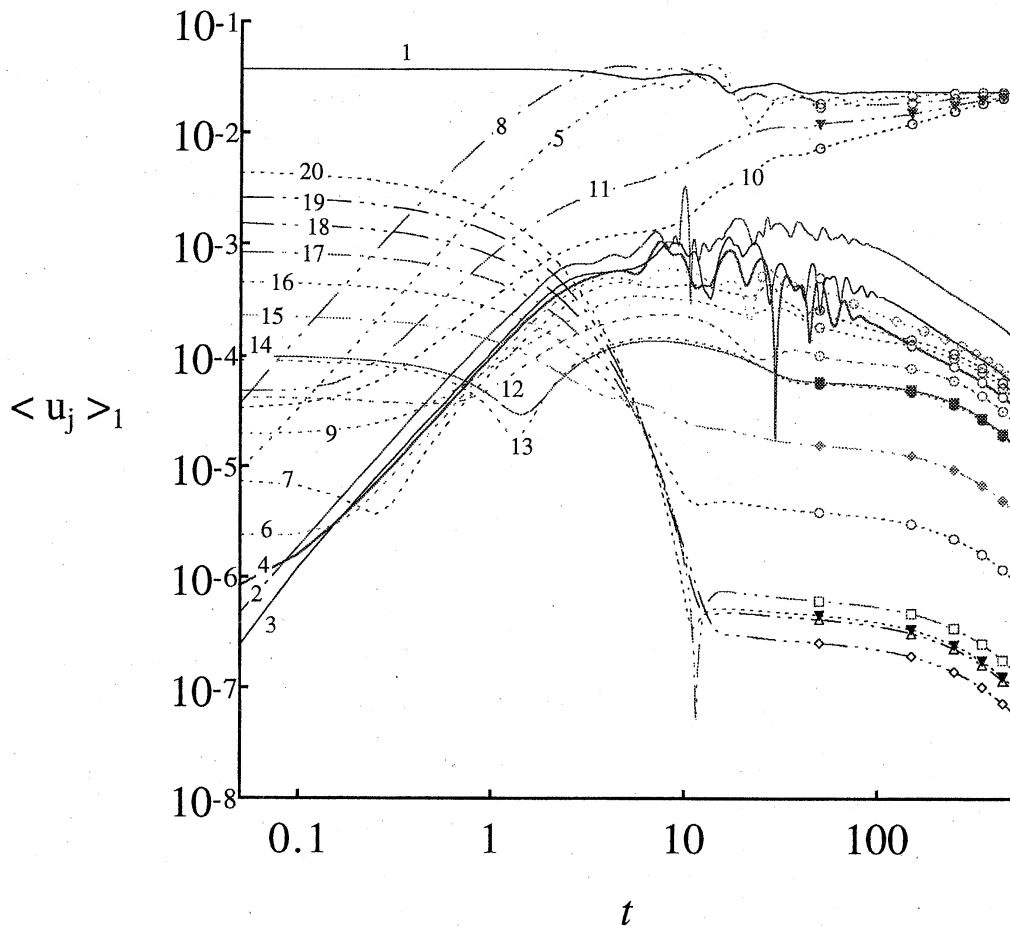


Figure 4: $(\alpha, R) = (1.099, 4398.7)$ における第 k 固有モードを初期値として与えた場合のその後の第 1 固有関数成分の時間発展. いずれのモードも初期振幅は $\|u_1^{(k)}\| = 0.02$ とした.

3.3 高次固有モードによる第 1 モードの非線形励起

初期値として第 k モードを与えた場合, 自己相互作用を通じてどれだけ第 1 モードが励起されるかを Fig.4 に示す. $\phi_1^{(n)}(z)$ の随伴関数 $\tilde{\phi}_1^{(n)}(z)$ を用いた

$$\langle u_1^{(n)}(t) \rangle_1 = \left| \int_{-1}^1 \tilde{\phi}_1^{(1)} S_1 \phi_1^{(n)} dz \right| \quad (11)$$

によって, 励起される第 1 モード成分を勘定している. $k \leq 8$ ではプロットデータは初期に t^2 のベキで増加する. それに反して, $k \geq 14$ では $e^{\text{Re}\sigma_1^{(k)} t}$ に基づいた線形減衰を初期に行うことが分かる. この初期発展の相違を説明するために, ここでは Fourier-固有関数展開に基づく力学系モデルを考えよう.

$$[\sigma_m^{(j)} S_m + im\alpha \bar{u} S_m - im\alpha \bar{u}'' - R^{-1} S_m^2] \phi_m^{(j)} = 0 \quad (12)$$

で, 与えられた第 m Fourier 成分の第 j 固有値とそれに属する固有関数を定義し, 攪乱を Fourier-固有関数展開する.

$$\hat{\psi}(x, z, t) = \sum_m \sum_j A_m^{(j)}(t) \phi_m^{(j)}(z) e^{im\alpha x}. \quad (13)$$

まず, 第 k 固有モードを初期値として選ぶ.

$$\hat{\psi}(x, z, 0) = a_1^{(k)} \phi_1^{(k)}. \quad (14)$$

ここで、モデルとして、第 k モードは

$$\dot{A}_1^{(k)} = \sigma_1^{(k)} A_1^{(k)}, \quad A_1^{(5)} = a_1^{(5)} e^{\sigma_1^{(5)} t} \quad (15)$$

に従う単純な線形減衰を行い、それによって、第 2 調波と主流の変形（第 0 調波）が次のように励起される状況を考える。

$$\dot{A}_2^{(p)} = \sigma_2^{(p)} A_2^{(p)} + \lambda_{11}^{(pkk)} A_1^{(k)} A_1^{(k)}, \quad (16)$$

$$\dot{A}_0^{(p)} = \sigma_0^{(p)} A_0^{(p)} + \lambda_{-11}^{(pkk)} A_{-1}^{(k)} A_1^{(k)}. \quad (17)$$

高調波共鳴が存在しなければ、i.e., $2\sigma_1^{(k)} \neq \sigma_2^{(p)}$, $2\text{Re } \sigma_1^{(k)} \neq \sigma_0^{(p)}$ であれば、これらの方程式は

$$A_2^{(p)} = a_2^{(p)} e^{\sigma_2^{(p)} t} + \frac{\lambda_{11}^{(pkk)} a_1^{(k)2}}{2\sigma_1^{(k)} - \sigma_2^{(p)}} e^{2\sigma_1^{(k)} t}, \quad (18)$$

$$A_0^{(p)} = a_0^{(p)} e^{\sigma_0^{(p)} t} + \frac{\lambda_{-11}^{(pkk)} |a_1^{(k)}|^2}{2\text{Re } \sigma_1^{(k)} - \sigma_0^{(p)}} e^{2\text{Re } \sigma_1^{(k)} t} \quad (19)$$

という解を持つ。第 1 固有モードの振幅は

$$\dot{A}_1^{(1)} = \sigma_1^{(1)} A_1^{(1)} + \sum_p (\lambda_{-12}^{(1kp)} A_{-1}^{(k)} A_2^{(p)} + \lambda_{01}^{(1pk)} A_0^{(p)} A_1^{(k)}) \quad (20)$$

よって記述されるが、上で得た結果を加味すると

$$\dot{A}_1^{(1)} = \sigma_1^{(1)} A_1^{(1)} + b_1 e^{\gamma_1 t} + b_2 e^{\gamma_2 t} + \dots \quad (21)$$

のように書くことができる。さて、高調波共鳴が存在しなければ、すなわち、

$$\text{i.e., } \sigma_1^{(1)} \neq \sigma_2^{(p)} + \bar{\sigma}_1^{(5)}, \quad \sigma_1^{(1)} \neq \sigma_1^{(5)} + \sigma_0^{(p)}, \quad \sigma_1^{(1)} \neq 2\sigma_1^{(5)} + \bar{\sigma}_1^{(5)}$$

であれば、方程式の解は

$$A_1^{(1)} = a_1^{(1)} e^{\sigma_1^{(1)} t} + \frac{b_1}{\gamma_1 - \sigma_1^{(1)}} e^{\gamma_1 t} + \frac{b_2}{\gamma_2 - \sigma_1^{(1)}} e^{\gamma_2 t} + \dots \quad (22)$$

のように表現できる。

高調波共鳴が厳密に存在するとき、i.e., $2\sigma_1^{(5)} = \sigma_2^{(p)}$, $2\text{Re } \sigma_1^{(5)} = \sigma_0^{(p)}$ が成り立つ場合には、

$$A_2^{(p)} = a_2^{(p)} e^{\sigma_2^{(p)} t} + t \lambda_{11}^{(p55)} a_1^{(5)2} e^{2\sigma_1^{(5)} t},$$

$$A_0^{(p)} = a_0^{(p)} e^{\sigma_0^{(p)} t} + t \lambda_{-11}^{(p55)} |a_1^{(5)}|^2 e^{2\text{Re } \sigma_1^{(5)} t}$$

という解が得られるから、

$$\sigma_1^{(1)} = \sigma_2^{(p)} + \bar{\sigma}_1^{(5)}, \quad \sigma_1^{(1)} = \sigma_1^{(5)} + \sigma_0^{(p)}, \quad \sigma_1^{(1)} = 2\sigma_1^{(5)} + \bar{\sigma}_1^{(5)}$$

という高調波共鳴がさらに厳密に存在するとき、 $A_1^{(1)}$ に対する方程式は

$$\dot{A}_1^{(1)} = \sigma_1^{(1)} A_1^{(1)} + t b_1 e^{\gamma_1 t} + t b_2 e^{\gamma_2 t} + \dots$$

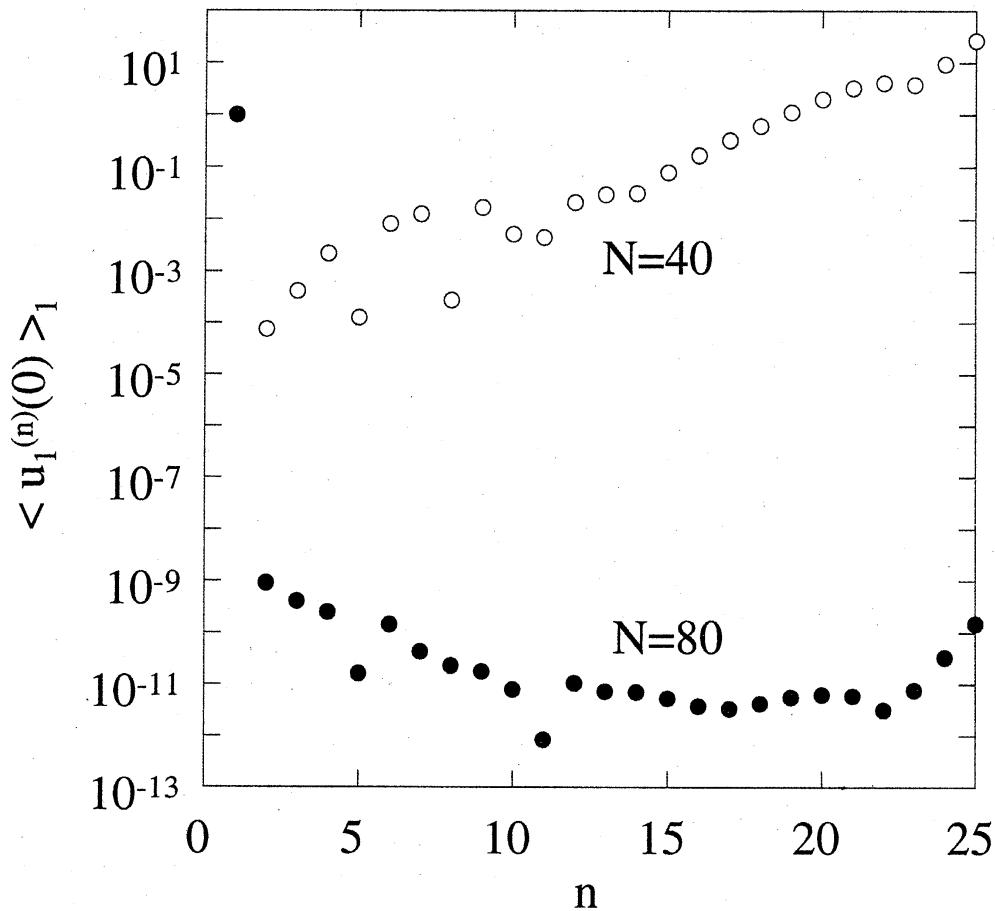


Figure 5: $(\alpha, R) = (1.099, 4398.7)$ における第 k 固有モードと第 1 モードの随伴関数との直交性のよう書くことができ、その解は

$$A_1^{(1)} = a_1^{(1)} e^{\sigma_1^{(1)} t} + \frac{t^2}{2} b_1 e^{\gamma t} + \frac{t^2}{2} b_2 e^{\gamma_2 t} + \dots$$

で与えられる。したがって、この場合、初期に t^2 に比例して第 1 モードが励起されることが分かる。

t^2 に比例した増幅はこのような高調波共鳴が 2 重に生じる場合に可能であり、直感的にも非常に理解しやすい。しかし、もっと一般に、高調波共鳴の成立如何に関わらず、 $t \ll 1$ において t^2 の増幅が可能である。それをみるためには、今のモデルを用いて、 t を微小量とする摂動展開を行えばよいが、詳細は省略する。

Figure 4 では、しかし、 $k \geq 9$ のモードを初期攪乱とした場合の結果は t^2 のべきを示さない。その理由は、Fig.5 にみることができる。この図は、 $\langle u_1^{(n)}(0) \rangle_1 = \left| \int_{-1}^1 \tilde{\phi}_1^{(1)} S_1 \phi_1^{(n)} dz \right|$ を n に対してプロットしたものであり、図には線形固有関数の Chebyshev 多項式展開 (8) の上限値 N として 40 と 80 の 2 通りの結果を示してある。 $N = 40$ の場合には、 $\phi_1^{(1)}$ の随伴関数と $\phi_1^{(n)}$ との直交性が極めて悪く、 $n \geq 8$ では $\tilde{\phi}_1^{(1)}$ に平行な成分が著しく増加することが分かる。

$$\phi_1^{(k)} = (\phi_1^{(k)} - \langle \tilde{\phi}_1^{(1)}, \phi_1^{(k)} \rangle \phi_1^{(1)}) + \langle \tilde{\phi}_1^{(1)}, \phi_1^{(k)} \rangle \phi_1^{(1)} \quad (23)$$

は $e^{\sigma_1^{(k)}}$ に比例して線形増幅を行うから、 $\langle u_1^{(k)}(t) \rangle_1$ を十分小さな t に対して評価すると、第 k モードの線形特性に従って第 k モードに含まれる第 1 モードの成分は線形減衰する。ただし、(23) の右辺括弧内は $\phi_1^{(k)}$ のうち $\phi_1^{(1)}$ に垂直な成分である。他方、Chebyshev 多項式展開の上限を $N = 80$ とすると、Fig.5 から明らかなように、十分な精度で $\phi_1^{(n)}$ と第 1 モードとの直交性が成立している。その結果、(23) の $\langle \tilde{\phi}_1^{(1)}, \phi_1^{(k)} \rangle$ は十分小さな値となり、 $\langle u_1^{(k)}(t) \rangle_1$ としては $e^{\sigma_1^{(k)}}$ に従った減衰特性よりも、自己相互作用によって第 1 モードが励起されることによる t^2 の初期増幅の方が卓越する。このことは $N = 80$ としたシミュレーション結果からも確認できた。

各 k の値に対する臨界振幅を求めること、optimal perturbation に対しては臨界振幅値はいくらなのかを評価することなどは、残された今後の課題である。しかし、その際には、Fourier 級数展開の打ち切りによらない結果を出さないと意味がないので、Fourier 級数展開と Chebyshev 多項式展開の打ち切りを十分多くの項まで含めた形で行う必要がある。その結果、Courant 条件によって時間ステップを著しく小さくせざるを得ない。

ここでの参考文献としては次の 1 編のみを引用するにとどめる。それ以外については、例えば Drazin and Reid や Craik のモノグラフを参照していただきたい。

C.L. Pekeris and B. Shkoller, "Stability of plane Poiseuille flow to periodic disturbances of finite amplitude", *J. Fluid Mech.* **39** (1969) 611-627.