数理解析研究所講究録
1116 巻 1999 年 1-10

擬双曲距離についてのある種の条件を満たす領域について

防衛大学校　後藤泰宏

1　擬双曲距離

D を $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, の真部分領域とする. $x, y \in D$ に対し

$$k_D(x,y) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \frac{ds}{\delta_D(z)}$$

を x と y の擬双曲距離という. ここで $\delta_D(z) = d(z, \partial D)$, inf は x と y を結ぶ D 上の任意の曲線 γ についてとるものとする. δ_D は一般に微分可能ではないが, D 上の任意の二点 x, y に対し, それらを結ぶ擬双曲距離に関する測地線が存在し, かつその測地線は, ユークリッド距離による弧長をパラメーターとみて $C^{1,1}$ 級 (微分がリプシッツ連続) となる ([6]).

領域 D 上の擬双曲距離の考察においては, 曲線に擬双曲距離による弧長をパラメーターとして導入すると考えやすい場合がある. $\gamma : [0, a] \to D$ を, x を始点, y を終点とし擬双曲距離による弧長をパラメーターにもつ D 上の任意の曲線, すなわち絶対連続かつ $|x'(t)| = \delta_D(x(t))$ a.e., なる曲線とする. そのとき

$$|\delta_D(x(t+\Delta t)) - \delta_D(x(t))| \leq |x(t+\Delta t) - x(t)|.$$

よって $|x'(t)|$ も絶対連続かつ $||x'(t)|'| \leq |x'(t)|$, a.e., となり $e^t|x'(t)|$ は単調増大, $e^{-t}|x'(t)|$ は単調減少である. 特に

$$e^{-t}|x'(0)| \leq |x'(t)| \leq e^t|x'(0)|, \tag{1}$$

$$(1-e^{-t})|x'(0)| \leq \int_0^t |x'(t)|dt \leq (e^t - 1)|x'(0)|. \tag{2}$$

よって γ のユークリッド距離による弧長, 及び擬双曲距離による弧長をそれぞれ $|\gamma|$, $|\gamma|_*$ とあらわせば

$$|\gamma|_* \geq \left|\log \frac{\delta_D(y)}{\delta_D(x)}\right|, \tag{1'}$$

$$|\gamma|_* \leq \log \frac{\delta_D(x)}{\delta_D(x) - |\gamma|}, \quad 0 \leq |\gamma| < \delta_D(x), \tag{2'a}$$

$$|\gamma|_* \geq \log\left(1 + \frac{|\gamma|}{\delta_D(x)}\right) \geq \log\left(1 + \frac{|x-y|}{\delta_D(x)}\right), \tag{2'b}$$

(1') 及び (2'b) は Gehring-Palka による評価として知られている.

本講演では, 擬双曲距離についてのある種の評価を持つ領域 (H-領域) について, それら領域の有界性, 境界への到達可能性, 境界付近での領域の「太り」具合の評価が, 簡単な考察によって得られることを紹介する. 以下では, D は $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, の真部分領域をあらわすものとし, また曲線は常に擬双曲距離による弧長をパラメーターとするものとする.

2 H-領域

$\mathcal{H}$ により $[0, \infty)$ 上の, $H(t) \geq e^{-t}$, $t \geq 0$, なる (必ずしも単調減少ではない) 連続関数 H の全体をあらわすものとする. $H \in \mathcal{H}$ とする. 領域 D は

$$\delta_D(x) \leq \delta_D(x_0) H(k_D(x, x_0)), \quad x \in D,$$

なるとき $x_0 \in D$ を基点とする H-領域と呼ぶことにする. この条件は x_0 を始点とする任意の測地線 $x(t)$ に対し $|x'(t)| \leq |x'(0)| H(t)$, $t \geq 0$, なることと同じである. $\mathcal{H}$ 関数 H で

$$H(0) = 1, \quad |H'| \leq H,$$

なるものの全体を $\mathcal{H}_0$ とあらわす. $H \in \mathcal{H}$ に対しその正規化 $\hat{H} \in \mathcal{H}_0$ を

$$\hat{H}(t) = \min\{e^t, \inf_{0 \leq a < \infty} H(a) e^{|t-a|}\}$$

により定める. $\hat{H}$ は H を超えない最大の $\mathcal{H}_0$ 関数であり H-領域は常に $\hat{H}$-領域となるので, $\mathcal{H}_0$ 関数 H に対する H-領域を考えれば本質的には十分である.

H 領域は, その基点を通る擬双曲測地線の Euclid 長に対する評価が与えられた領域であるともいえる: D を H-領域 $(H \in \mathcal{H})$ とする. $\gamma : x = x(t)$ を x_0 を始点とする擬双曲測地線とする. $\gamma(x,y)$, $x, y \in \gamma$, で x と y を結ぶ γ の 部分曲線をあらわすものとする. そのとき

$$|\gamma(x(t_1), x(t_2))| = \int_{t_1}^{t_2} |x'(t)|dt \leq \delta_D(x_0) \int_{t_1}^{t_2} \hat{H}(t)dt \tag{3}$$

他方, 全ての $\mathcal{H}_0$ 関数 H に対し, 領域 D 及びその上のある点 $x_0 \in D$ を始点とする擬双曲測地線 γ で $\delta_D(x) = \delta_D(x_0)H(k_D(x,x_0))$, $x \in \gamma$, なるものが存在するわけではない.

(注) もしこのような D, γ があれば, 改めて領域 $D' = \cup_{x\in\gamma}B(x, \delta_D(x))$ を考えることで領域としては特に H-領域となるものがとれることがわかる.

たとえば, ある開区間 (a,b) 上 $H(t) = ce^{-t}$ となっていれば, (a,∞) 上でも $H(t) = ce^{-t}$ となっていない限りこのような $H \in \mathcal{H}_0$ に対する極値的 H-領域は存在しない. また, $H \in \mathcal{H}_0$ で $\liminf_{t\to+0}(H(t)-1)/t = -1$ となるものは無数にあるが, このような H に対しては, D 上 $\delta_D(x) \leq \delta_D(x_0)H(k_D(x,x_0))$ となる領域 D は x_0 を中心とする開球しかない.

一般に, どのような $H \in \mathcal{H}_0$ が極値的となっているかについてはわかっていない.

問題 極値的な H を特徴づけよ.

次節では $\mathcal{H}_1$ なる $\mathcal{H}_0$ の十分大きい部分族について極値的となっていることが示される.

例 *1.* 領域 D は, ある定数 $0 < \alpha \leq 1$, $\beta \geq 0$ に対し

$$k_D(x,x_0) \leq \frac{1}{\alpha}\log\left(\frac{\delta_D(x_0)}{\delta_D(x)}\right) + \beta, \qquad x \in D,$$

であるとき (α,β)-Hölder 領域という. (α,β)-Hölder 領域は $H_{\alpha\beta}(t) = e^{\alpha\beta}e^{-\alpha t}$ に関する $H_{\alpha\beta}$-領域となっている.

Hölder 領域は John 領域と密接にかかわっている. 領域 $D \subset \mathbf{R}^n$ についてある定数 $0 < \alpha \leq 1$ がとれて任意の $x \in D$ に対し x_0 と x を結ぶ D 上の曲線 γ で

$$\delta_D(y) \geq \alpha|\gamma(y,x)|, \qquad y \in \gamma,$$

なるものがとれるとき, D を x_0 を基点とする α-John 領域という. $\gamma : x = x(t)$, $0 \le t \le t_1$, とするとこの条件は $e^{\alpha t}\int_t^{t_1}|x'(u)|du$ が単調非減少ということを意味し $t_1 \ge l := (1+\alpha)^{-1}$ なるとき

$$|x'(t_1)| \le \frac{e^l}{l}\int_{t_1-l}^{t_1}|x'(t)|dt \le \frac{e^{-\alpha(t_1-l)+l}}{l}\int_0^{t_1}|x'(t)|dt \le \left(1+\alpha^{-1}\right)e^{-\alpha t_1+1}|x'(0)|.$$

$t_1 < l$ なるときも同じ評価が成立するので α-John 領域は $\beta = \alpha^{-1} + \alpha^{-1}\log(1+\alpha^{-1})$ として (α, β)-Hölder 領域となっている.

例 2. 有界領域 D について ∂D が局所的に α, $0 < \alpha < 1$, Hölder 連続関数のグラフとしてあらわされているとき,

$$k_D(x, x_0) \le C\left(\frac{\delta_D(x_0)}{\delta_D(x)}\right)^{1-\alpha}, \qquad x \in D,$$

となる. よって D はある定数 $C > 0$ について $H(t) = C(t+1)^{-1/(1-\alpha)}$ に対する H-領域となっている.

例 3. 有界領域 D について ∂D が局所的に $O(u\log(u^{-1}))$ なる modulus を持つ連続関数のグラフとしてあらわされているとき, 境界の近傍で

$$k_D(x, x_0) \le C\left(\log\frac{\delta_D(x_0)}{\delta_D(x)}\right)^2$$

となる. よって D はある定数 $p, C > 0$ について $H(t) = C\exp(-p\sqrt{t})$ に対する H-領域となっている. 特に Zygmund class の関数はこの条件を満たすことに注意.

3 標準領域

与えられた関数 H に対する H-領域の構成において次の補題は基本的である.

補題 1. *H を $|H'| \le H$ なる $\mathcal{H}$ 関数, D を $\mathbf{R}^n$ の真部分領域, $x_0 \in D$ とする. 任意の $x \in D$ 及び任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 点 y, $y' \in D$ で $x \in B(y, \delta_D(y))$, $\delta_D(x) = \delta_{B(y,\delta_D(y))}(x)$, $k_D(y, y') < \varepsilon$, $\delta_D(y') \le \delta_D(x_0)H(k_D(y', x_0))$ なるものがとれるとする. そのとき D は x_0 を基点とする H-領域となる.*

領域 D は $0 \in D$, $\delta_D(0) = 1$, かつ

$$D = \bigcup_{s \ge 0,\ se_1 \in D} B(se_1, \delta_D(se_1))$$

なるとき標準領域という. ここで $e_1=(1,0,...,0)$, また $B(x,r)$ は x 中心半径 r の開球とする. 前補題より, H を $|H'|\le H$ なる $\mathcal{H}$ 関数とするとき, 標準領域 D に対しては, その中心測地線 $\gamma=\{se_1 \mid s\ge 0,\ se_1\in D\}$ 上で評価 $\delta_D(x)\le H(k_D(x,0))$ が示されれば D は H-領域となる.

$\mathcal{H}$ 関数 H は

$$H(0)=1,\quad |H'|\le H,\quad H''\le H,$$

なるとき $\mathcal{H}_1$ 関数と呼ぶことにする. そのとき $\mathcal{H}_1\subset\mathcal{H}_0\subset\mathcal{H}$.

連続関数 $r:[0,a)\to(0,\infty)$, で $r(0)=1$, $|r'|\le 1$ かつ「$a<\infty$ なる場合には $r(a-0)=0$」を満たすものの全体を $\mathcal{R}_0$, さらに条件 $(r^2)''\le 2$ も満たすものの全体を $\mathcal{R}_1$ とする. ここで $a=a_r\in(0,\infty]$. そのとき r について, 標準領域 D で $r(s)=\delta_D(se_1)$, $0\le s<a$, $(a=\sup\{s\ge 0 \mid se_1\in D\})$ なるものが存在するための必要十分条件は $r\in\mathcal{R}_1$ なることである. これは包絡線の方程式を書き下すことで示される. さらに

補題 2. 次の方程式は, 族 $\mathcal{H}_0$ と $\mathcal{R}_0$ の間, 及び族 $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{R}_1$ の間の全単射を与える:

$$r(s)=H\left(\int_0^s\frac{ds}{r(s)}\right),\qquad 0\le s<a,$$

ここで $a=a_H=\int_0^\infty H(t)dt$.

以上の二補題より

定理 1. $[0,\infty)$ 上の関数 $H>0$ に対し標準領域 D で

$$\delta_D(x)=H(k_D(x,0)),\qquad x=se_1\in D,\quad s\ge 0,$$

なるものが存在するための必要十分条件は $H\in\mathcal{H}_1$ なることである. またこのとき D は H-領域となる.

$\mathcal{H}_1$ 関数の大小関係は必ずしも対応する標準領域の包含関係を意味しないことに注意.

4 主定理

$\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ はともに lattice property を持っている. さらに $H\in\mathcal{H}_0$ は

$$H(t)=\inf_\mu a_\mu e^{|t-t_\mu|},\qquad a_\mu>0,\quad t_\mu\in\mathbf{R},$$

また $H \in \mathcal{H}_1$ は

$$H(t) = \inf_{\mu} a_\mu \cosh(t - t_\mu), \quad a_\mu > 0, \quad t_\mu \in \mathbf{R},$$

とあらわされるので, それらの違い及び類似性は生成元 $e^{|t-t_\mu|}$ と $\cosh(t - t_\mu)$ の違い及び類似性から来る. たとえば, これらの生成元が比較可能であるという意味で族 $\mathcal{H}_1$ は $\mathcal{H}_0$ のよい近似となっている. さらに, 与えられた関数が $\mathcal{H}_0$ 関数かどうか判定することは, $\mathcal{H}_1$ 関数であるかどうかを判定するより一般に簡単である.

定理 1 より $H \in \mathcal{H}_1$ に対しては全ての H-領域が有界となるのは $\int_0^\infty H(t)dt < \infty$ なるときに限る. さらに $\mathcal{H}_0$ と $\mathcal{H}_1$ の上記の類似性を利用すれば, $H \in \mathcal{H}_0$ なる緩い仮定の元でも同様の結果が得られる. $\liminf_{t\to+0}(\hat{H}(t) - 1)/t = -1$ なる $H \in \mathcal{H}$ に対する H-領域は開球だけであった.

定理 2. $\liminf_{t\to+0}(\hat{H}(t) - 1)/t > -1$ なる $H \in \mathcal{H}$ に対し以下の条件は同値である:
a) H-領域は全て有界;
b) 任意の H-領域についてその任意の境界点は D 内から到達可能である;
c) $\int_0^\infty \hat{H}(t)dt < \infty$.

またこのとき, 任意の $y \in \partial D$ に対し x_0 と y を結ぶ擬双曲測地線が存在する. c) $\Rightarrow$ a) は (3) から直ちに従う.

最後に, 積分に関する一般的性質

補題 3. f, F をある区間 $[t_0, \infty)$ 上正値可積分かつ $f \le F$ なる連続関数とする.
a) F が単調減少なるとき

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\int_{F^{-1}(f(t))}^\infty F(u)du}{\int_t^\infty f(u)du} \ge 1.$$

b) Φ を $(0, \varepsilon]$ 上の可積分でない正値連続関数とする. そのとき

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{f(t)\Phi\left(\int_t^\infty f(u)du\right)}{F(t)\Phi\left(\int_t^\infty F(u)du\right)} \ge 1.$$

を $f(t) = |x'(t)|/|x'(0)|$, $F(t) = H(t)$ に適用すれば

定理 3. H を $\int_0^\infty H(t)dt < \infty$ なる $\mathcal{H}$ 関数とする. D を x_0 を基点とする H-領域, $y \in \partial D$, γ を x_0 と y を結ぶ擬双曲測地線とする. そのとき

a) $H(t)$ が十分大きい t に対し単調減少であれば

$$\limsup_{\gamma\ni x\to y}\frac{\delta_D(x_0)}{|\gamma(x,y)|}\int_{H^{-1}\left(\frac{\delta_D(x)}{\delta_D(x_0)}\right)} H(u)du \geq 1.$$

b) Φ が上記の補題の条件を満たすとき

$$\limsup_{\gamma\ni x\to y}\frac{\frac{\delta_D(x)}{\delta_D(x_0)}\Phi\left(\frac{|\gamma(x,y)|}{\delta_D(x_0)}\right)}{H(k_D(x,x_0))\Phi\left(\int_{k_D(x,x_0)}^{\infty} H(u)du\right)} \geq 1.$$

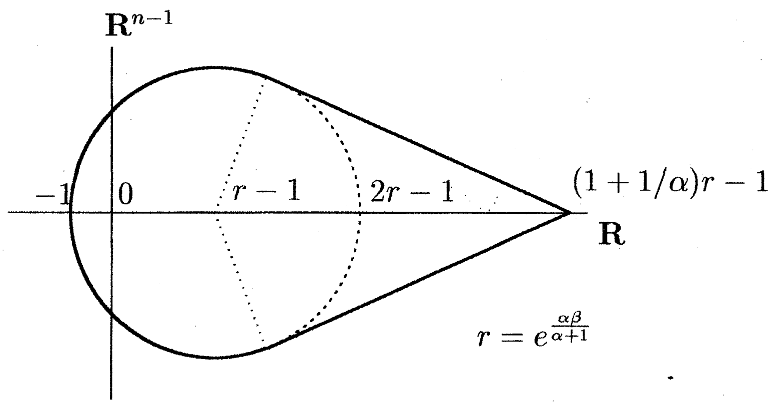
定理 3 における評価は H が $\mathcal{H}_1$ 関数である場合には最良である. 実際, 与えられた $\mathcal{H}_1$ 関数に対応する標準領域の中心測地線に対しては, 上極限をとる以前に, すでに定理における不等式が等号で成立している.

5 Hölder 領域

(α,β)-Hölder 領域は $H_{\alpha\beta}(t)=e^{\alpha\beta}e^{-\alpha t}$ に関する $H_{\alpha\beta}$-領域であった. この場合 $H_{\alpha\beta}$ の正規化

$$\hat{H}_{\alpha\beta}(t)=\begin{cases} e^t, & 0\leq t\leq \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+1},\\ e^{\alpha\beta}e^{-\alpha t}, & \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+1}<t<\infty,\end{cases}$$

は $\mathcal{H}_1$ 関数となっており, 定理 1 より 極値的標準 $\hat{H}_{\alpha\beta}$-領域が存在する (下図).



よって (α,β)-領域 D 上の x_0 を始点とする擬双曲測地線 γ のユークリッド弧長についての 評価 (3) は最良である. 特に x_0 と D の境界点を結ぶ任意の擬双曲測地線 γ

に対し

$$|\gamma| \le \delta_D(x_0) \int_0^\infty \hat{H}_{\alpha\beta}(t)dt = \delta_D(x_0) \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) e^{\frac{\alpha\beta}{\alpha+1}} - 1 \right].$$

定理 2 より Hölder 領域の各境界点は領域内から到達可能である. また定理 3 より, 定理 3 の仮定を満たす Φ に対し γ を x_0 と $y \in \partial D$ を結ぶ擬双曲測地線として

$$\limsup_{\gamma \ni x \to y} \frac{\delta_D(x)}{\delta_D(x_0)} \Phi\left(\frac{|\gamma(x,y)|}{\delta_D(x_0)}\right) \Phi\left(\frac{e^{\alpha\beta}}{\alpha} e^{-\alpha k_D(x,x_0)}\right)^{-1} e^{\alpha k_D(x,x_0)} \ge e^{\alpha\beta}.$$

特に $\phi(t) = 1/t$ とおけば

$$\limsup_{\gamma \ni x \to y} \frac{\delta_D(x)}{|\gamma(x,y)|} \ge \alpha. \tag{4}$$

この評価 (4) は Smith-Stegenga [8], [9] による. さらに $\phi(t) = (t \log(1/t))^{-1}$ とおけば

$$\limsup_{\gamma \ni x \to y} \frac{\delta_D(x)}{|\gamma(x,y)|} k_D(x,x_0) \left(\log \frac{\delta_D(x_0)}{|\gamma(x,y)|}\right)^{-1} \ge 1. \tag{5}$$

ここで (3) ($t_2 = \infty$) より

$$k_D(x,x_0) \le \frac{1}{\alpha} \log \frac{\delta_D(x_0)}{|\gamma(x,y)|} + \frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{\alpha} + \beta, \tag{6}$$

であり (5) は (4) よりも強い評価となっている. 評価 (6) も, 最良の加法定数を除いては Smith-Stegenga [8], [9] による.

評価 (4) に関連して, $\delta_D(x)$ の $|\gamma(x,y)|$ による下からの, 各点毎の評価としては

$$\frac{\delta_D(x)}{\delta_D(x_0)} \ge e^{-\frac{\beta}{2}} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\frac{1+\alpha}{2\alpha}} \left(\frac{|\gamma(x,y)|}{\delta_D(x_0)}\right)^{\frac{1+\alpha}{2\alpha}}, \qquad x \in \gamma,$$

が成立する. この評価は, 右辺の乗法定数をその 4 倍で置き換えることができないということ, 及び $\phi(t) = o(t^{\frac{1+\alpha}{2\alpha}})$ なる任意の ϕ に対し (α,β)-Hölder 領域 D 及び $y \in \partial D$ で

$$\liminf_{\gamma \ni x \to y} \frac{\delta_D(x)}{\delta_D(x_0)} \phi\left(\frac{|\gamma(x,y)|}{\delta_D(x_0)}\right)^{-1} = 0,$$

なるものが存在するという意味において, 最良である.

6 その他の例

ここでは第 2 節で扱った残り二例について考える.

(その 1) 境界の近傍で

$$k_D(x,x_0) \le C\left(\frac{\delta_D(x_0)}{\delta_D(x)}\right)^q, \quad C,\ q>0,$$

なる場合. この場合は $H(t)=Mt^{-\alpha}$ ($M=C^{-1/\alpha}$, $\alpha=1/q$) として ∂D の近傍で $\delta_D(x)\le\delta_D(x_0)H(k_D(x,x_0))$ となる. また有限区間上 H の値をうまく取り直すことで H を $\mathcal{H}_1$ 関数とできるので, 以下の評価はすべて最良である. まず定理 1 よりこのような領域がすべて有界, 或いは, あらゆる境界点が D 内より到達可能となるのは $\alpha>1$ なるときに限る. また $\alpha>1$ なるとき γ を x_0 と $y\in\partial D$ を結ぶ擬双曲測地線として (3) ($t_2=\infty$) より γ 上の, ∂D に十分近い x に対し

$$\frac{|\gamma(x,y)|}{\delta_D(x_0)}k_D(x,x_0)^{\alpha-1}\le\frac{M}{\alpha-1},$$

また, 定理 3 b) ($\Phi(t)=1/t$) 及び 定理 3 a) より

$$\limsup_{\gamma\ni x\to y}\frac{\delta_D(x)}{|\gamma(x,y)|}k_D(x,x_0)\ge\alpha-1.$$

$$\limsup_{\gamma\ni x\to y}\frac{\delta_D(x)}{\delta_D(x_0)}\left(\frac{|\gamma(x,y)|}{\delta_D(x_0)}\right)^{\frac{-\alpha}{\alpha-1}}\ge M^{\frac{-1}{\alpha-1}}(\alpha-1)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

(その 2) 境界の近傍で

$$k_D(x,x_0)\le C\left(\log\frac{\delta_D(x_0)}{\delta_D(x)}\right)^2, \quad C>0,$$

なる場合. この場合は $H(t)=\exp(-q\sqrt{t})$, ($q=1/C$) として ∂D の近傍で $\delta_D(x)\le\delta_D(x_0)H(k_D(x,x_0))$ となる. やはり有限区間上 H の値をうまく取り直すことで H を $\mathcal{H}_1$ 関数とできるので, 以下の評価はすべて最良である. ((7) と (5) の類似性に注意.) 定理 3 b) ($\Phi(t)=1/t$, $\phi(t)=(t\log(1/t))^{-1}$) 及び 定理 3 a) より

$$\limsup_{\gamma\ni x\to y}\frac{\delta_D(x)}{|\gamma(x,y)|}\sqrt{k_D(x,x_0)}\ge\frac{q}{2},$$

$$\limsup_{\gamma\ni x\to y}\frac{\delta_D(x)}{|\gamma(x,y)|}k_D(x,x_0)\left(\log\frac{\delta_D(x_0)}{|\gamma(x,y)|}\right)^{-1}\ge\frac{1}{2}, \tag{7}$$

$$\limsup_{\gamma\ni x\to y}\frac{\delta_D(x)}{|\gamma(x,y)|}\log\frac{\delta_D(x_0)}{\delta_D(x)}\ge\frac{q^2}{2}.$$

参考文献

[1] R. Bañuelos, Intrinsic ultracontractivity and eigenfunction estimations for Schrödinger operators, J. Funct. Anal., 100 (1991), 181-206.

[2] F. W. Gehring and O. Martio, Lipschitz classes and quasiconformal mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. 10 (1985), 203-219.

[3] F. W. Gehring and B. G. Osgood, Uniform domains and the quasi-hyperbolic metric, J. Analyse. Math., 36 (1979), 50-74.

[4] F. W. Gehring and B. P. Palka, Quasiconformally homogeneous domains, J. Anal. Math., 30 (1976), 172-199.

[5] Y. Gotoh, On domains with some growth conditions for quasihyperbolic metric, to appear.

[6] G. J. Martin, Quasiconformally and bi-Lipschitz homeomorphisms, uniform domains and the quasihyperbolic metric, Trans. Amer. Math. Soc., 292 (1985), 169-191.

[7] G. J. Martin and B. G. Osgood, The quasihyperbolic metric and associated estimates on the hyperbolic metric J. Anal. Math., 47 (1986), 37-53.

[8] W. Smith and D. Stegenga, A geometric characterization of Hölder domain, J. London Math. Soc., 35 (1987), 471-480.

[9] W. Smith and D. Stegenga, Hölder domains and Poincaré domains, Trans. Amer. Math. Soc., 319 (1990), 67-100.