数理解析研究所講究録
1116 巻 1999 年 139-146

α 次放物型作用素に関する平均値の性質

大阪市大・理　西尾昌治 (Masaharu NISHIO)

$0<\alpha\leq 1$ に対し, ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+1}=\mathbf{R}^{n}\times\mathbf{R}$ 上の放物型作用素

$$L^{(\alpha)}:=\frac{\partial}{\partial t}+(-\Delta)^{\alpha}$$

を考える. ここで, $\mathbf{R}^{n}\times\mathbf{R}$ 上の点を $(x,t)=(x_{1},\cdots,x_{n},t)$ であらわし, $\Delta=\partial_{x_{1}}^{2}+\cdots+\partial_{x_{n}}^{2}$ とする. $\alpha=1$ のとき, $L^{(1)}u=0$ は熱方程式である. $0<\alpha<1$ に対しては, $L^{(\alpha)}$ は非局所的作用素になる. そのため $\mathbf{R}^{n}\times\mathbf{R}$ の開集合 D で $L^{(\alpha)}$-調和 $(L^{(\alpha)}u=0)$ な関数は, 一般に $\mathbf{R}^{n}\times\mathbf{R}$ 全体で定義されている必要がある. 以下に述べるように (Theorem 1), そのような関数も本質的には D のみで定まっている.

ここでは, そのあたりの事情を明らかにしていく第一歩として, 基本的な平均値の定理について考察する. 掃散測度を詳しく調べることで, [9] において得られた平均値の性質のよる $L^{(\alpha)}$-調和関数の特徴づけを精密化することが, 本稿での目的である.

そして最後に, 帯状領域の平均値の性質による特徴づけについて述べる.

1 準備

$L^{(\alpha)}$に関するポテンシャル論について基本的なことを準備する (cf. [4], [6]). $0<\alpha<1$ のとき, $(-\Delta)^{\alpha}$ は, $-C_{n,\alpha}\,\mathrm{p.f.}|x|^{-n-2\alpha}$ による convolution operator すなわち,

$$(-\Delta)^{\alpha}\varphi(x,t)=-C_{n,\alpha}\lim_{\delta\downarrow 0}\int_{|y-x|>\delta}(\varphi(y,t)-\varphi(x,t))|y-x|^{-n-2\alpha}\,dy.$$

である. ここで $C_{n,\alpha}=-4^{\alpha}\pi^{-n/2}\Gamma((n+2\alpha)/2)/\Gamma(-\alpha)>0$ は定数である.

$L^{(\alpha)}$の基本解は

$$W^{(\alpha)}(x,t)=\begin{cases}(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^{n}}\exp(-t|\xi|^{2\alpha}+\sqrt{-1}\,x\cdot\xi)d\xi & t>0\\ 0 & t\leq 0\end{cases}$$

である. すなわち

Lemma 1. $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$ に対し

$$W^{(\alpha)} * (L^{(\alpha)}\varphi) = L^{(\alpha)}(W^{(\alpha)} * \varphi) = \varphi$$

が成り立つ.

また, $\widetilde{W}^{(\alpha)}(x,t) := W^{(\alpha)}(x,-t)$ とおけば $\widetilde{W}^{(\alpha)}$は $L^{(\alpha)}$の adjoint operator $\widetilde{L}^{(\alpha)} = \partial_t + (-\Delta)^\alpha$ の基本解になる. このように, 以下では adjoint operator に関する記号はその上に "∼"をつけて表すことにする.

特に, $\alpha = 1, 1/2$ のときには $t > 0$ に対し

$$W^{(1)}(x,t) = (4\pi t)^{-n/2\alpha} \exp(-|x|^2/4t),$$
$$W^{(1/2)}(x,t) = \Gamma((n+1)/2) t \{\pi(|x|^2 + t^2)\}^{-(n+1)/2}$$

と具体的な形がわかっている. 一般の $0 < \alpha < 1$ に対しては簡単な関数で表示することはできないが, $W^{(\alpha)} \geq 0$, $|x|$ について単調減少で $|x| \to \infty$ での order が $|x|^{-n-2\alpha}$ であることなどがわかっている. ここでは, $W^{(\alpha)}$の次の性質を用いる.

Lemma 2. $\phi_\alpha(|x|) = W^{(\alpha)}(x,1)$ で ϕ_α を定義すると

$$W^{(\alpha)}(x,t) = t^{-n/2\alpha} \phi_\alpha(t^{-1/2\alpha}|x|)$$

である.

$s > 0$ に対し $P_s^{(\alpha)} = W^{(\alpha)}(x,s)\,dx \otimes \varepsilon_s$ とおくと $\{P_s^{(\alpha)}\}_{s>0}$ は $-L^{(\alpha)}$ を生成作用素とする convolution semigroup になる. ここで ε_s は $\{s\}$ での Dirac 測度を表す.

Definition 1. 下半連続でほとんどいたるところ有限値をとる関数 $u \geq 0$ で

$$u \geq P_s^{(\alpha)} * u \quad \text{for all } s > 0$$

をみたすもの全体を S_α で表す.

Radon 測度 $\mu \geq 0$ を用いて $u = W^{(\alpha)} * \mu$ と表される関数はほとんどいたるところ有限な値をとるとき $u \in S_\alpha$ である. そのとき u を potential という.

Proposition 1. $u \in S_\alpha$ に対し, 測度 $\mu \geq 0$ および $h \in S_\alpha$ がただ一つ存在し

$$u = W^{(\alpha)} * \mu + h, \qquad h = P^{(\alpha)} * h$$

が成り立つ. 特に, $0 < \alpha < 1$ の場合 h は定数である.

有限値連続な $u \in S_\alpha$ とコンパクト集合 $K \subset \mathbf{R}^{n+1}$ に対し

$$Q_K^{(\alpha)} u(Y) := \inf\{v(Y); v \in S_\alpha, v \geq u \text{ on } K\}$$

$$R_K^{(\alpha)} u(X) := \liminf_{Y \to X} Q_K^{(\alpha)} u(Y)$$

とおく. そして, 任意の $u \in S_\alpha$ と任意の集合 $A \in \mathbf{R}^{n+1}$ に対し

$$R_A^{(\alpha)} u(X) := \sup\{R_K^{(\alpha)} v(X)\}$$

とする. ここで sup は $v \leq u$ なる有限値連続な $v \in S_\alpha$ とコンパクト集合 $K \subset A$ すべてをうごかしてとる.

Definition 2. $u = W^{(\alpha)} * \mu$, $v = \widetilde{W}^{(\alpha)} * \nu$ を potential とし, $A \subset \mathbf{R}^{n+1}$ とする. そのとき, 測度 μ'_A, ν''_A を次式で定義し掃散測度という.

$$R_A^{(\alpha)} W^{(\alpha)} * \mu = W^{(\alpha)} * \mu'_A, \qquad \widetilde{R}_A^{(\alpha)} \widetilde{W}^{(\alpha)} * \nu = \widetilde{W}^{(\alpha)} * \nu''_A$$

掃散測度の性質には

$$W^{(\alpha)} * \mu \geq W^{(\alpha)} * \mu'_A \quad \text{on} \quad \mathbf{R}^{n+1}$$

$$W^{(\alpha)} * \mu = W^{(\alpha)} * \mu'_A \quad \text{on} \quad \mathrm{Int}(A)$$

$$\int W^{(\alpha)} * \mu \, d\nu''_A = \int W^{(\alpha)} * \mu'_A \, d\nu$$

など Laplacian のときと類似の性質もあるが, 一般には $(\mu'_A)'_A = \mu'_A$ とはならない点などに注意が必要である.

2 容量と平衡分布

まず, 平衡分布を導入し, 基本的な性質を述べる. $1 \in S_\alpha \cap \widetilde{S}_\alpha$ であるので, 集合 A に対し $R_A^{(\alpha)}1$ (resp. $\widetilde{R}_A^{(\alpha)}1$) が potential であるとき

$$R_A^{(\alpha)}1 = W^{(\alpha)} * \mu_A \quad (\text{resp. } \widetilde{R}_A^{(\alpha)}1 = \widetilde{W}^{(\alpha)} * \nu_A)$$

で測度 μ_A (resp. ν_A) を定義し, (核 $W^{(\alpha)}$(resp. $\widetilde{W}^{(\alpha)}$) に関する) 平衡分布という.

Lemma 3. コンパクト集合 K に対し

$$\int d\mu_K = \int d\nu_K$$

が成り立つ.

そこで容量を次で定義する.

DEFINITION 3. 集合 A に対し

$$\underline{\mathrm{cap}}^{(\alpha)}(A) := \sup\{\int d\mu_K; K \subset A : \text{compact}\}$$

$$\overline{\mathrm{cap}}^{(\alpha)}(A) := \inf\{\underline{\mathrm{cap}}^{(\alpha)}(O); O \supset A : \text{open}\}$$

とし, $\underline{\mathrm{cap}}^{(\alpha)}(A) = \overline{\mathrm{cap}}^{(\alpha)}(A)$ のとき A は可容といい, その値を単に $\mathrm{cap}^{(\alpha)}(A)$ で表す.

容量の可容性に関しては次が成り立つ.

Proposition 2. $\mathrm{cap}^{(\alpha)}(\cdot)$ は*Choquet* 容量である. したがって, すべての解析集合は可容である.

また, 平衡分布を特徴付けるために集合 A に対し

$$\Phi_A^{(\alpha)} := \{\mu \geq 0; \text{positive measure, } \mathrm{supp}(\mu) \subset\subset A, W^{(\alpha)} * \mu \leq 1\}$$

とおく. ここで $\mathrm{supp}(\mu) \subset\subset A$ は $\mathrm{supp}(\mu)$ が A で relatively compact であることを表す.

Proposition 3. $A \subset \mathbf{R}^{n+1}$ に対し $R_A^{(\alpha)}1$ が *potential* であるとする．そのとき，

$$W^{(\alpha)} * \mu_A(X) = \sup\{W^{(\alpha)} * \mu(X); \mu \in \Phi_A^{(\alpha)}\}$$

$$\underline{\mathrm{cap}}^{(\alpha)}(A) = \sup\{\int d\mu; \mu \in \Phi_A^{(\alpha)}\}$$

具体的な平衡分布の例としては，$\mathbf{R}^n$ の可測集合 M に対して $M \times \{t_0\}$ の平衡分布は超平面 $\mathbf{R}^n \times \{t_0\}$ 上の n 次元 Lebesgue 測度の制限である．われわれには次が必要である．

Lemma 4. $H \subset \mathbf{R}^n$ を超平面とし

$$L := H \times \{t > 0\}$$

とする．H 上の $n-1$ 次元*Lebesgue* 測度を ℓ_{n-1} とかけば L および $\overline{L}$ の平衡分布は

$$\mu_L = \mu_{\overline{L}} = 0 \qquad (0 < \alpha \leq 1/2)$$

$$\mu_L = \mu_{\overline{L}} = C\,\ell_{n-1} \otimes t^{1/2\alpha - 1}\,dt \qquad (1/2 < \alpha \leq 1)$$

となる．ここで C は定数 $C = (B(1-\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2\alpha})\phi_\alpha(0))^{-1}$ $(n=1)$, $C = (B(1-\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2\alpha})\omega_{n-2}\int_0^\infty \phi_\alpha(r) r^{n-2}\,dr)^{-1}$ ($n \geq 2$, ω_{n-2} は $n-2$ 次元球面の体積) である．

3 掃散測度

主結果 Theorem 3 の証明のためにいくつか Lemma をあげる．

Lemma 5. $E \subset \mathbf{R}^{n+1}$ を $n+1$ 次元 *Lebesgue* 測度 0 の閉集合とし $A \supset E$ とする．いま，測度 μ の *potential* $W^{(\alpha)} * \mu$ が E を含むある開集合上で有限値連続であれば

$$\mu'_E = \mu'_A|_E + (\mu'_A|_{E^C})'_E$$

が成り立つ．

Lemma 6. $0 < \alpha < 1$ とする．相対コンパクトな開集合 $\omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$ とその内点 X_0 に対し，その掃散測度は，$\overline{\omega}^c$ 上

$$\varepsilon'_{X_0,\omega^c} = \left(C_{n.\alpha}\int_{\mathbf{R}^n} |x-y|^{-n-2\alpha}\,(W^{(\alpha)} * \varepsilon_{X_0} - R_{\omega^c}^{(\alpha)} W^{(\alpha)} * \varepsilon_{X_0})dy\right) dxdt$$

である．

境界上の掃散測度を評価するために次を用いる.

Lemma 7. *Lemma* 4 と同じ設定で考える. $x_0 \notin H$ とすると, 掃散測度 $\varepsilon'_{(x_0,0),\overline{L}}$ は L 上の n 次元 *Lebesgue* 測度に関して絶対連続でその密度関数は有界である.

4 $L^{(\alpha)}$-調和関数と平均値の性質

DEFINITION 4. D を $\mathbf{R}^{n+1}$ の開集合とする. $\mathbf{R}^{n+1}$ 上の可測関数 h は, 次を満たすとき, D 上の $L^{(\alpha)}$-調和関数という:

(a) h は D 上連続,

(b) 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対し $\iint h \cdot \widetilde{L}^{(\alpha)}\varphi\, dxdt = 0$.

このように, $0 < \alpha < 1$ のときには D の $L^{(\alpha)}$-調和関数は少なくとも $D^* := \{(x,t);$ ある $y \in \mathbf{R}^n$に対し $(y,t) \in D\}$ 上で定義されている必要がある. これに関して次が成り立つ.

Theorem 1. $0 < \alpha < 1$ とする. $\mathbf{R}^{n+1}$ の開集合 D 上の $L^{(\alpha)}$-調和関数 h_1, h_2 が D 上 $h_1 = h_2$ ならば D^* 上 $h_1 = h_2$ である.

われわれの主定理は, 次である.

Theorem 2. $\mathbf{R}^{n+1}$ の開集合 D と $\mathbf{R}^{n+1}$ 上の可測関数 h に対し, 以下は同値:

(a) h は D 上 $L^{(\alpha)}$-調和,

(b) 任意の $X_0 \in \omega \subset\subset D$ に対し $h(X_0) = \int h\, d\varepsilon''_{X_0,\omega^c}$,

これにより, 掃散測度 ε''_{X,D^c} は $L^{(\alpha)}$-調和測度と考えることができる. h が D 上連続である場合の結果は [9] で示されている. したがって, 連続性が問題であるが, それは, 次の結果からしたがう. 関数 f に対し測度 $\mu_f^{(\alpha)}$ を

$$\mu_f^{(1)} := 1_{\{|x|\le 1\}\times[0,1]}(x,t)\, f(x,t)\, dxdt$$
$$\mu_f^{(\alpha)} := 1_{[0,1]}(t)\, f(x,t)(1+|x|)^{-n-2\alpha}\, dxdt \qquad (0<\alpha<1)$$

で定める. ここで 1_A は集合 A の定義関数とする.

Theorem 3. $\mathbf{R}^{n+1}$ の二つの開集合 $\omega \subset\subset D$ に対して, 有界な $f \geq 0$ が存在し *Theorem* 2 の (a) または (b) をみたす関数 h に対し

$$h = h * \mu_f^{(\alpha)} \quad \text{on } \omega$$

が成り立つ.

5 平均値の性質による帯状領域の特徴付け

この節の結果は, [9] による. 平均値の性質で領域の形を特徴付ける問題は, 以前から論じられてきた. たとえば, 球の特徴付けとして,

Theorem 4. (Kuran, [5]**)** 体積有限で原点を含む $\mathbf{R}^n$ の開集合 D が, 任意の D 上の可積分な調和関数 h に対して平均値の性質

$$h(0) = \frac{1}{|D|}\int_D h(x)\,dx$$

をもてば, D は原点中心の球である.

がある. また, 次のような帯状領域上の調和関数に対する平均値の定理

Theorem 5. (Armitage-Goldstein, [1]**)** 帯状領域 $\mathbf{R}^n \times (-1,1)$ で可積分な調和関数 h に対し次が成り立つ.

$$2\int_{\mathbf{R}^n} h(x,0)\,dx = \iint_{\mathbf{R}^n \times (-1,1)} h(x,t)\,dxdt$$

が得られれば, その平均値の性質で帯状領域を特徴付けることが考えられ, 実際, Armitage-Nelson [2] による結果がある. そして, Watson は調和関数のかわりに熱方程式の基本解に関する平均値の性質で帯状領域を特徴付けた [11]. これらは, Lebesgue 測度の (co)potential の性質を調べることによって導かれている. 我々は全く別の考察によって次を得た.

Theorem 6. 開集合 $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ は平面 $\mathbf{R}^n \times \{0\}$ を含み任意の $\tau \in \mathbf{R}$ に対し, $\mathbf{R}^n \times (-\infty, \tau) \not\subset D$ とする. そのとき, 任意の D 上 $L^{(\alpha)}$-調和な関数 $h \geq 0$ に対して

$$\int_{\mathbf{R}^n} h(x,0)\,dx = \iint_D h(x,t)\,dxdt$$

ならば, D は帯状領域 $D = \mathbf{R}^n \times (a, a+1)$, $(-1 < a < 0)$ である.

参考文献

[1] D.H. Armitage and M. Goldstein, *Qudrature and harmonic approximation of subharmonic functions in strip*, J. London Math.Soc., 46(1992), 171–179.

[2] D.H. Armitage and C.S. Nelson, *A harmonic quadrature formula characterizing open strip*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 113(1993), 147–151.

[3] M. Itô, *α-harmonic functions*, Nagoya Math. J. 26(1966), 205–221.

[4] M. Itô and M. Nishio, *Poincaré type conditions of the regularity for the parabolic operator of order α*, Nagoya Math. J., 115(1989), 1–22.

[5] Ü. Kuran, *On the mean-value property of harmonic functions*, Bull. London Math. Soc. 4 (1972), 311–312.

[6] M. Nishio, *The Wiener criterion of regular points for the parabolic operator of order α*, Nagoya Math. J., 116(1989), 163–179.

[7] M. Nishio, *Riesz capacity and regular points for the parabolic operator of order α*, Nagoya Math. J., 139(1995), 185–196.

[8] M. Nishio, *Capacity associated with an α–parabolic operator*, in Proceedings of the 7th international colloquium on differential equations, D Bainov, ed., pp.253–260, VSP, Utrecht, 1997.

[9] M. Nishio and N. Suzuki, *A characterization of strip domains by a mean value property for the parabolic operator of order α*, preprint.

[10] N.A. Watson, *Thermal capacity*, Proc. London Math. Soc., 37(1978), 342–362.

[11] N.A. Watson, *Characterizations of open strips by temperatures and harmonic functions*, New Zealand J. Math., 25(1996), 243–248.