数理解析研究所講究録
1116巻 1999年 29-37



# $\hat{\mathrm{C}}\setminus\{0\}$の有限葉非有界被覆面のMartin境界

瀬川重男 (大同工業大学)
正岡 弘照 (京都産業大学理学部)

**0.** $W$を$\hat{\mathrm{C}}\setminus\{0\}$の$m$葉非有界被覆面$(1<m<\infty)$とし，$\pi$を$W$から$\hat{\mathrm{C}}\setminus\{0\}$への射影とする．$\hat{\mathrm{C}}\setminus\{0\}$の Martin compact 化は$\hat{\mathrm{C}}$と同一視されることはよく知られている．$W^*$を$W$の Martin compact 化，$\Delta^\sim$を$W$の Martin 境界，$\Delta_1^\sim$を$W$の minimal 境界とする．まず，既知の結果を掲げる．

**定理 A(Heins [H]).** $1\leq\sharp\Delta_1^\sim\leq m$.

$\mathcal{M}(0):=\{M|M$は $\hat{\mathrm{C}}\setminus\{0\}$内の領域で，$\hat{\mathrm{C}}\setminus M$は0で thin である.$\}$
$M\in\mathcal{M}(0)$に対し，$n(M)$で$\pi^{-1}(M)$の成分の個数を表すものとする．$\sharp\Delta_1^\sim$は次で特徴付けられる．

**定理 B([M-S 2]).** $\sharp\Delta_1^\sim=\max_{M\in\mathcal{M}(0)}n(M)$.

$\Delta^\sim$の形状を議論したい. 以下の議論では, $W$として, 次のようにして構成される **Heins の$m$葉非有界被覆面**を考察する．$\{a_n\},\{b_n\}$を$0<a_{n+1}<b_n<a_n<1,\ \lim_{n\to\infty}a_n=0$をみたす数列とする．$C=\hat{\mathrm{C}}\setminus I(I=\cup_{n=1}^{\infty}I_n, I_n=[b_n,a_n])$とおく．$C_1,\cdots,C_m$を$C$の copy とする．$j=1,\cdots,m$に対し$C_j$上の切り口$I$の下岸と$C_{j+1}$上の切り口$I$の上岸を溶接して$(j \bmod. m)$得られる$\hat{\mathrm{C}}\setminus\{0\}$の$m$葉 cyclic 非有界被覆面を Heins の$m$葉非有界被覆面と言う．定理Bより，次を得る．

**命題 0.1([M-S 1]). このとき,**
**1) $I$が0でthinであるならば, $\sharp\Delta_1^\sim=m$.**
**2) $I$が0でthinでないならば, $\sharp\Delta_1^\sim=1$.**

$D=\{|z|<1\}, D_0=D\setminus\{0\}, D_0^\sim=\pi^{-1}(D_0)$とおくと, $D_0, D_0^\sim$の Martin 境界はそれぞれ, $\{0\}\cup\partial D, \Delta^\sim\cup\pi^{-1}(\partial D)$と同一視される．また, $D_0, D_0^\sim$の minimal 境界はそれぞれ, $\{0\}\cup\partial D, \Delta_1^\sim\cup\pi^{-1}(\partial D)$と同一視される． 今後は$\hat{\mathrm{C}}\setminus\{0\}, W$のかわりに$D_0, D_0^\sim$を考察する．$p^\sim\in\Delta_1^\sim$で極をもつ$D_0^\sim$上の Martin 関数を$k_{p^\sim}^\sim$と記すことにする．$I$は0で thin であるとする．命題0.1より, $\sharp\Delta_1^\sim=m$. よって, $\Delta_1^\sim=\{p_1^\sim,\cdots,p_m^\sim\}$とおく．このとき, 命題0.1と$\Delta^\sim$の連結性より, $m=2$に対しては, 次が従う．

**系 0.1. 1) $I$が0でthinであり, $m=2$とする．このとき, $\Delta^\sim=[p_1^\sim,p_2^\sim]$. ここで,**
$[p_1^\sim,p_2^\sim]=\{p^\sim\in\Delta^\sim|k_{p^\sim}^\sim=tk_{p_1^\sim}^\sim+(1-t)k_{p_2^\sim}^\sim\quad(t\in[0,1])\}$.
**2) $I$が0でthinでないとする．このとき，$\Delta^\sim=\{1$点$\}$.**

この系より, $I$が0で thin であるという仮定のもとで, $m>2$のときの$\Delta^\sim$の形状が問題になる. 以下では, 話を簡単にするために$m=3$の場合を考察する．また, $k_{p_j^\sim}^\sim(a_1^\sim)=1$ $(j=1,\cdots,m)$をみたすとする．$a_1^\sim$は$\pi(a_1^\sim)=a_1$をみたす点とする．$p_0^\sim$をそれを極にもつ Martin 関数が$\frac{1}{3}(k_{p_1^\sim}^\sim+k_{p_2^\sim}^\sim+k_{p_3^\sim}^\sim)$で与えられる$\Delta^\sim$の元とする．
このとき, 次を得る．

**主定理.** $I$ **が** 0 **で** thin **であり,** $m=3$ **とする. このとき,** $\{I_n\}$ **が十分速く** 0 **に収束するならば,** $\Delta^{\sim}=[p_0^{\sim},p_1^{\sim}]\cup[p_0^{\sim},p_2^{\sim}]\cup[p_0^{\sim},p_3^{\sim}]$.

## 1. 準備

**1.1.** $R$ を開 Riemann 面とし, $R^{\sim}$ を $R$ の $m$ 葉非有界被覆面 $(1<m<\infty)$ とし, $\pi=\pi_{R^{\sim}}$ を $R^{\sim}$ から $R$ への射影とする. まず, $R\notin O_G$ と仮定する. このとき, $R^{\sim}\notin O_G$ となることに注意する (cf. [A-S], [S-N]). $g_z^R=g^R(\cdot,z)$ $(z\in R)$ (resp. $g_{z^{\sim}}^{R^{\sim}}=g^{R^{\sim}}(\cdot,z^{\sim})$ $(z^{\sim}\in R^{\sim})$) を $z$(resp. $z^{\sim}$) で極をもつ $R$ (resp. $R^{\sim}$) 上の Green 関数とする. 定点 $a\in R$ (resp. $\pi_{R^{\sim}}(a^{\sim})=a$ となる $a^{\sim}\in R^{\sim}$) に対し, $k_z^R=g_z^R/g_z^R(a)$ (resp. $k_{z^{\sim}}^{R^{\sim}}=g_{z^{\sim}}^{R^{\sim}}/g_{z^{\sim}}^{R^{\sim}}(a^{\sim})$) を $z$ (resp. $z^{\sim}$) を極とする $R$(resp. $R^{\sim}$) 上の **Martin 関数**と言う.

$$\Sigma(R):=\{\{z_n\}(\subset R)|R\text{ 上}, \lim_{n\to\infty}k_{z_n}^R\text{ が存在する.}\}$$

とおく. $\{z_n\},\{\zeta_n\}$ に対して, 同値関係 $\sim$ を次式

$$\{z_n\}\sim\{\zeta_n\}\iff R\text{ 上}, \lim_{n\to\infty}k_{z_n}^R=\lim_{n\to\infty}k_{\zeta_n}^R.$$

で定義する. $\Delta^R:=\Sigma(R)/\sim$ を $R$ の **Martin 境界**と言う. また,$R^*:=R\cup\Delta^R$ を $R$ の **Martin compact 化**と言う (cf. [C-C], [HL]). 同様にして, $R^{\sim}$ の Martin 境界 $\Delta^{R^{\sim}}$, Martin compact 化 $(R^{\sim})^*$ が定義される. $\{f_w(\cdot)|f_w(\cdot)=k_\cdot^R(w),\ w\in R\}$ の各関数が $[0,\infty]$ 値連続拡張をもつ $R$ の最小の compact 化と $R$ の Martin compact 化とが一致することが知られている (cf. [C-C], [HL]). $p\in\Delta^R$ (resp. $p^{\sim}\in\Delta^{\sim}$) に対し, $k_p^R:=\lim_{R\ni z\to p}k_z^R$ (resp. $k_{p^{\sim}}^{R^{\sim}}:=\lim_{R^{\sim}\ni z^{\sim}\to p^{\sim}}k_{z^{\sim}}^{R^{\sim}}$) とおき, $k_p^R$(resp. $k_{p^{\sim}}^{R^{\sim}}$) を $p$(resp. $p^{\sim}$) で極をもつ $R$(resp. $R^{\sim}$) 上の **Martin 関数**と言う. $k_p^R$ (resp. $k_{p^{\sim}}^{R^{\sim}}$) は $R$(resp. $R^{\sim}$) 上, 正値調和であり, $k_p^R(a)=1$(resp. $k_{p^{\sim}}^{R^{\sim}}(a^{\sim})=1$) をみたす. $R^*$ (resp. $(R^{\sim})^*$) 上に, 次式で距離 $d$(resp. $d^{\sim}$) を定義すると, $d$(resp. $d^{\sim}$) は 上で述べた $R^*$ (resp. $(R^{\sim})^*$) の位相と同値な位相を与える.

$$d(p,q)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left|\frac{k_p^R(z_n)}{1+k_p^R(z_n)}-\frac{k_q^R(z_n)}{1+k_q^R(z_n)}\right|\qquad(p,q\in R^*)$$

$$(\text{resp. } d^{\sim}(p^{\sim},q^{\sim})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left|\frac{k_{p^{\sim}}^{R^{\sim}}(z_n^{\sim})}{1+k_{p^{\sim}}^{R^{\sim}}(z_n^{\sim})}-\frac{k_{q^{\sim}}^{R^{\sim}}(z_n^{\sim})}{1+k_{q^{\sim}}^{R^{\sim}}(z_n^{\sim})}\right|\qquad(p^{\sim},q^{\sim}\in(R^{\sim})^*),$$

ここで, $\{z_n\}\subset R$ (resp. $\{z_n^{\sim}\}\subset R^{\sim}$) は $R$ (resp. $R^{\sim}$) 上の稠密集合とする. また, $p\in\Delta^R$ に対し, $k_p^R$ が **minimal 関数** ($\iff$ $R$ 上の正値調和関数 $h$ が $0\le h\le k_p^R$ をみたすとき, $h=ck_p^R$ となる正定数 $c$ が存在する) であるとき, $p$ を **minimal(境界) 点**であると言う. $R$ (resp. $R^{\sim}$) の minimal 点全体 $\Delta_1^R$ (resp. $\Delta_1^{R^{\sim}}$) を **minimal 境界**と言う. よく知られているように, 各 $R$ 上の正値調和関数 $h$ は $R$ の minimal Martin 境界 $\Delta_1^R$ 上の正測度 $\mu$ と $R$ 上の Martin 関数 $k_p^R$ により,

$$h(z)=\int_{\Delta_1^R}k_p^R(z)d\mu(p)$$

と積分表現される (Martin の表現定理 cf. [C-C], [HL]).

$R \in O_G$ の場合, $R$ の局所円板 $U$ をとり (このとき, $R \setminus Cl_R(U) \notin O_G$, ここで,$Cl_R(U)$ は $U$ の $R$ における閉包を表す), $R^* = (R \setminus Cl_R(U))^* \cup Cl_R(U)$ を $R$ の Martin compact 化と言う. $\Delta^R = R^* \setminus R$ は $U$ の取り方によらないことに注意する.

**1.2.** $R$ を開リーマン面とし, $R \notin O_G$ と仮定する. $R$ 上の正値優調和関数全体を $\mathcal{S}_R$ で表す. $s(\in \mathcal{S}_R)$ と $E(\subset R)$ に対し,

$$ {}^R\hat{\mathrm{R}}_s^E(z) := \liminf_{w \to z} \ \inf\{u(w) | \, u \in \mathcal{S}_R, \ u \geq s \text{ on } E\} $$

を $E$ に関する $s$ の **balayage** と言う. (balayage の基本事項については, [C-C], [HL], [B], [B-H] 等を参照のこと).
$g_z^R = g^R(\cdot, z)(z \in R)$ を $z$ で極をもつ $R$ 上の Green 関数とする. 次に, thinness の定義を与える (thinness の基本事項については, [B], [B-H], [HL] 等を参照のこと).

**定義 1.1.** $\zeta \in R$ とする. $R$ の部分集合 $E$ が $\zeta$ で **thin** であるとは, ${}^R\hat{\mathrm{R}}_{g_\zeta^R}^E \neq g_\zeta^R$ が成立することである.
また, $R$ の開部分集合 $U$ に対し, $U \cup \{\zeta\}$ が $\zeta$ の**細近傍** (fine neighborhood) であるとは $R \setminus U$ が $\zeta$ で thin とあることである.

この近傍系によって導入される位相を**細位相** (fine topology) と言う. 細位相はすべての $R$ 内の正値優調和関数を連続にする最弱の位相であり, $R$ の通常の位相より細かい位相であることが知られている.

**定義 1.2.** $U$ を $R$ の部分領域とし, $\zeta$ を $\partial U$ の (Dirichlet 問題の意味の) 非正則境界点とし, $f$ を $U$ 上の実数値関数とする. このとき, $f$ が $\zeta$ で**細極限** (fine limit)$\gamma$ をもつとは, 任意の $\epsilon$ に対して, ある $\zeta$ の細近傍 $V$ が存在して,

$$ z \in V \setminus \{\zeta\} \Longrightarrow |f(z) - \gamma| < \epsilon $$

がなりたつことである.

今後, 上の $\gamma$ を $\mathcal{F} - \lim_{z \to \zeta} f(z)$ と記すことにする. 細極限に関しては 次の命題が知られている.

**命題 1.1.** **$U$ を $R$ の部分領域とし, $\zeta$ を $\partial U$ の (Dirichlet 問題の意味の) 非正則境界点とし, $s$ を $U$ 上の正値優調和関数とする. このとき, $s$ は $\zeta$ で細極限をもつ.**

## 2. $D_0^\sim$ 上の Green 関数の境界挙動

**2.1.** $\{a_n\}, \{b_n\}, I_n, I, C$ を 0 節と同じものとする. $W$ を $C$ を用いて以下のように構成される Heins の 3 葉非有界被覆面とする. $C_1$, $C_2$, $C_3$ を $C$ の copy とする. $j = 1, 2, 3$ に対し $C_j$ 上の切り口 $I$ の下岸と $C_{j+1}$ 上の切り口 $I$ の上岸を溶接して ($j$ mod. 3) 得られる $\hat{\mathrm{C}}$ の 3 葉 cyclic 非有界被覆面を $W$ とおく. $\pi$ を $W$ 上の射影, $\tau^\sim$ を $C_{j+1} = \tau^\sim(C_j)(j\text{mod}.3)$ をみたす $W$ 上の被覆変換とする. $D_0^\sim = \pi^{-1}(D_0)$, $I_n^\sim = \pi^{-1}(I_n)$, $I^\sim = \cup_{n=1}^\infty I_n^\sim$ とおく. $p^\sim \in \Delta^\sim$ に対して, $k_{p^\sim}^\sim$ を $p^\sim$ で極をもつ $W$ 上の Martin 関数とする. $z^\sim \in W$ に対して, $g_{z^\sim}^\sim$ を $z^\sim$ で極をもつ $W$ 上の Green 関数とする.

**補題 2.1([H]).** $p^{\sim}$ **を** $\Delta_1^{\sim}$ **の点とし,** $\{z_n^{\sim}\}(\subset W)$ **を** $p^{\sim}$ **に収束するとする. このとき,** $D_0^{\sim}$ **上,** $\lim_{n\to\infty} g_{z_n^{\sim}}^{\sim}$ **が存在して, それを** $g_{p^{\sim}}^{\sim}$ **と表すと,** $g_{p^{\sim}}^{\sim}$ **は** $D_0^{\sim}$ **上の正値調和関数となり,** $D_0^{\sim}$ **上,**

$$k_{p^{\sim}} = \frac{g_{p^{\sim}}^{\sim}}{g_{p^{\sim}}^{\sim}(a^{\sim})}.$$

この補題により, 以下の対応

$$p^{\sim} \longleftrightarrow k_{p^{\sim}} \longleftrightarrow g_{p^{\sim}}^{\sim}$$

は 全単射になる. 今後は $k_{p^{\sim}}$ のかわりに $g_{p^{\sim}}^{\sim}$ を考察することにする. $\Delta_1 = \{p_1^{\sim}, p_2^{\sim}, p_3^{\sim}\}$ とおく. 定理 B の証明 ([M-S 2] を参照) より, 各 $C_j (j=1,2,3)$ に対して, $p_j^{\sim} \in \Delta_1^{\sim} (j=1,2,3)$ が 1 対 1 に対応する. よって, 補題 2.1 と合わせると, $j=1,2,3$ に対して, 次の対応

$$C_j \longleftrightarrow p_j^{\sim} \longleftrightarrow k_{p_j^{\sim}} \longleftrightarrow g_{p_j^{\sim}}^{\sim}$$

は 全単射になる.
$j=1,2,3$ に対して, 写像 $\sigma_j : C \ni \zeta \mapsto \zeta_j^{\sim} \in C_j$ を $\pi(\zeta_j^{\sim}) = \zeta$ で定義する. 命題 1.1 より, $g_{\zeta}^{\sim} \circ \sigma_j$ は $C$ 上, 正値調和であるので, $\mathcal{F} - \lim_{z\to 0} g_{\zeta^{\sim}}^{\sim} \circ \sigma_j(z)$ が存在する.
$g_j^{\sim}(\zeta^{\sim}) = \mathcal{F} - \lim_{z\to 0} g_{\zeta^{\sim}}^{\sim} \circ \sigma_j(z)$ とおく. [M-S 1] の議論より, 次がなりたつ (証明の詳細は 省略する).

**補題 2.2.** $g_j^{\sim}$ **は** $D_0^{\sim}$ **上, minimal 関数で,** $C_j$ **上,**

$$^{D_0^{\sim}}\hat{\mathrm{R}}_{g_j^{\sim}}^{D_0^{\sim}\setminus C_j} < g_j^{\sim},$$

**すなわち,** $g_j^{\sim} = g_{p_j^{\sim}}^{\sim}$.

**2.2.** この小節の目的は 以下で述べられる定理 2.1 の核心となる次の命題を示すことである.

**命題 2.1.** $I$ **は, 0 で thin であって,** $\{a_n\}, \{b_n\}$ **が十分速く 0 に収束するとする.** $I^{\sim}$ **上の点列** $\{z_n^{\sim}\}$ **が** $W$ **の Martin 境界点** $\alpha$ **に収束するとする. このとき,**

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \tau^{\sim}(z_n^{\sim}) = \alpha.$$

**証明** $f(z) = 1/z$ に対して, $\bar{a}_n := f(a_n), \bar{b}_n := f(b_n), \bar{I}_n := f(I_n), \bar{I} := f(I)$ とおく. $\bar{a}_n = e^n$, $b_0 = 1$, $\bar{a}_n < \bar{b}_n \le \bar{a}_{n+1}/2$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とする. このとき,

$$0 < \bar{b}_n - \bar{a}_n < e^n/2 < \bar{a}_n - \bar{b}_{n-1} < \bar{a}_{n+1} - \bar{a}_n$$

となる. $D_n := \{|z - \bar{a}_n| < e^n/2\}$, $\phi_n(z) = (z - \bar{a}_n)/(\bar{b}_n - \bar{a}_n)$, $G_n := \{|w| < e^n/2(\bar{b}_n - \bar{a}_n)\}$ とおくと, $w = \phi_n(z)$ により, $D_n$, $\bar{a}_n$, $I_n$ は, それぞれ, $G_n$, 0, $[0,1]$ に写される. $I$ は, 0 で thin であるので, $e^n/(\bar{b}_n - \bar{a}_n) \uparrow \infty$ となり, したがって, $G_n \subset G_{n+1}$, $\cup_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbf{C}$ である.

$\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3$ を $\mathbf{C} - \bar{I}$ の copy とする. $j = 1,2,3$ に対し $\bar{C}_j$ 上の切り口 $\bar{I}$ の上岸と $\bar{C}_{j+1}$ 上の切り口 $\bar{I}$ の下岸を溶接して ($j$ mod. 3) 得られる $\mathbf{C}$ の 3 葉 cyclic 非有界被覆面を $\bar{W}$ とし, $\bar{\pi}$ を射影, $\bar{\tau}^{\sim}$ を $\bar{C}_{j+1} = (\tau^{\sim})^j(\bar{C}_j)$ ($j$ mod.3) をみたす被覆変換とする. $W$ と $\bar{W}$ が等角同値であることに注意しよう. $\bar{D}_0 = f(D_0) = \{|z| > 1\}$ $\bar{D}_0^{\sim} = \bar{\pi}^{-1}(\bar{D}_0)$, $\bar{I}_n^{\sim} = \bar{\pi}^{-1}([\bar{a}_n, \bar{b}_n])$, $\bar{I}^{\sim} = \cup_{n=1}^{\infty} \bar{I}_n^{\sim}$ とおく. $\bar{D}_0^{\sim}$ 上の Green 関数を $\bar{g}^{\sim}(\cdot,\cdot)$ で表す.

仮定より, $\bar{I}^{\sim}$ 上の点列 $\{z_n^{\sim}\}$ がある $\bar{W}$ の Martin 境界点 $\bar{\alpha}$ に収束する. $W$ と $\bar{W}$ が等角同値であるので, 我々の目標は,

$$(*)' \qquad \lim_{n\to\infty} \bar{\tau}^{\sim}(z_n^{\sim}) = \bar{\alpha}$$

を示すことである.
$\{z_n^{\sim}\}$ が収束することと補題 2.1 より, $D_0^{\sim}$ 上, $\lim_{n\to\infty} \bar{g}^{\sim}(\cdot, z_n^{\sim})$ が存在する. $(*)'$ を示すことは, $D_0^{\sim}$ 上,

$$(**) \qquad \lim_{n\to\infty} \bar{g}^{\sim}_{\bar{\tau}^{\sim}(z_n^{\sim})} = \lim_{n\to\infty} \bar{g}^{\sim}_{z_n^{\sim}}$$

を示すことと同値である.
**$(**)$ の証明** $D_n = \{|z - \bar{a}_n| < e^n/2\}$, $G_n = \{|w| < e^n/2(\bar{b}_n - \bar{a}_n)\}$ であった.
$D_n^{\sim} = \bar{\pi}^{-1}(D_n)$ とおくと, $D_n^{\sim}$ は $\{\bar{a}_n, \bar{b}_n\}$ の上に分岐点を持つ $D_n$ の 3 葉の cyclic 非有界被覆面である. $G_n^{(1)}$, $G_n^{(2)}$, $G_n^{(3)}$ を $G_n - [0,1]$ の copy とする. $j = 1,2,3$ に対し $G_n^{(j)}$ 上の切り口 $[0,1]$ の上岸と $G_n^{(j+1)}$ 上の切り口 $[0,1]$ の下岸を溶接して ($j$ mod. 3) 得られる $G_n$ の 3 葉 cyclic 非有界被覆面を $G_n^{\sim}$ とし, $\bar{\pi}_n$ を射影とする. このとき, $\{G_n^{\sim}\}$ の定め方から, $G_n^{\sim}$ は $G_{n+1}^{\sim}$ の部分領域とみなされ, $G^{\sim} := \cup_{n=1}^{\infty} G_n^{\sim}$ は, $\{0,1\}$ の上に分岐点を持つ $\mathbf{C}$ の 3 葉の cyclic 非有界被覆面となる. $\bar{\pi}_1^{-1}(0) = \zeta_0^{\sim}$ とおく. $\bar{W}$, $D_n^{\sim}$, $G_n^{\sim}$, $\phi_n$ の定め方から, $D_n^{\sim}$ から $G_n^{\sim}$ への等角写像 $\varphi_n$ で, $\phi_n \circ \bar{\pi} = \bar{\pi}_n \circ \varphi_n$ をみたすものが存在する.

$\bar{W} - \cup_{n=1}^{\infty} Cl(D_n^{\sim})$ ($Cl(D_n^{\sim})$ は $D_n^{\sim}$ の $W^*$ における閉包をあらわす) の点 $a^{\sim}$ を任意にとり fix する. $\sup_{\cup_{n=1}^{\infty} D_n^{\sim}} \bar{g}^{\sim}(\cdot, a^{\sim}) = M\ (< \infty)$ とおく. $\zeta^{\sim} \in G_n^{\sim}$ に対し,

$$h_n(\zeta^{\sim}) = \bar{g}^{\sim}(a^{\sim}, \varphi_n^{-1}(\zeta^{\sim})) - \bar{g}^{\sim}(a^{\sim}, \bar{\tau}^{\sim}(\varphi_n^{-1}(\zeta^{\sim})))$$

とおくと, $h_n$ は $G_n^{\sim}$ 上の有界調和関数で, $h_n(\zeta_0^{\sim}) = 0$, $\sup_{G_n^{\sim}} |h_n| \le 2M$ $(n = 1, 2, \ldots)$ をみたす. したがって, 正規族の議論により, $\{h_n\}$ の部分列が存在して, $G^{\sim}$ 上の有界調和関数 $h$ に広義一様収束する. $h(\zeta_0^{\sim}) = 0$, $G^{\sim} \in O_G$ より, $h \equiv 0$ となる. この事実は, $\{h_n\}$ の任意の部分列に対しても成立するから, $\{h_n\}$ は, $G$ 上, 0 に広義一様収束する. 各 $l$ に対し, $z_l^{\sim} \in \bar{I}_{n_l}^{\sim}$ となる $n_l \in \mathbf{N}$ をとる. $\varphi_{n_l}(z_l^{\sim}) = \zeta_l^{\sim}$ とおくと, $\{\zeta_l^{\sim}\}$ は $G^{\sim}$ の compact 部分集合 $\bar{\pi}_1^{-1}([0,1])$ 上の点列である. したがって, $\lim_{l\to\infty} h_{n_l}(\zeta_l^{\sim}) = 0$ となる. ここで, $\bar{g}^{\sim}(a^{\sim}, z_l^{\sim}) - \bar{g}^{\sim}(a^{\sim}, \bar{\tau}^{\sim}(z_l^{\sim})) = h_{n_l}(\zeta_l^{\sim})$ であるから,

$$\lim_{l\to\infty} \{\bar{g}^{\sim}(a^{\sim}, z_l^{\sim}) - \bar{g}^{\sim}(a^{\sim}, \bar{\tau}^{\sim}(z_l^{\sim}))\} = 0$$

が成立する. $a^{\sim}$ は $\bar{W} - \cup_{n=1}^{\infty} Cl(D_n^{\sim})$ の任意の点であったから, これより $(**)$ が従う. □

**2.2.** $W, \pi, \tau^{\sim}, D_0^{\sim}, I_n^{\sim}, I^{\sim}$ を **1.1** のように定める. $I$ は0で thin であると仮定する. 定理Bより, $\sharp\Delta_1^{\sim} = 3$. 定理Bの証明より, 各 $C_j(j=1,2,3)$ に対して, $p_j^{\sim} \in \Delta_1^{\sim}(j=1,2,3)$ が1対1に対応する. $k_{p_j^{\sim}}(j=1,2,3)$ を $p_j^{\sim}(j=1,2,3)$ で極をもつ $D_0^{\sim}$ 上の Martin 関数とする. $z^{\sim} \in W$ に対して, $g_{z^{\sim}}^{\sim}$ を $z^{\sim}$ で極をもつ $W$ 上の Green 関数とする.

**補題 2.3([H]).** $z^{\sim}$ **を** $D_0^{\sim}$ **の点とし,** $z = \pi(z^{\sim})$ **とおく. このとき,** $D_0^{\sim}$ **上,**

$$\sum_{j=1}^{3} g_{z^{\sim}}^{\sim} \circ (\tau^{\sim})^j = g_z \circ \pi$$

**特に,** $p^{\sim}$ **を** $\Delta_1^{\sim}$ **の点とする. このとき,** $D_0^{\sim}$ **上,**

$$\sum_{j=1}^{3} g_{p^{\sim}}^{\sim} \circ (\tau^{\sim})^j = g_0 \circ \pi.$$

$\Delta_1^{\sim} = \{p_1^{\sim}, \tau^{\sim}(p_1^{\sim}), (\tau^{\sim})^2(p_1^{\sim})\}$ と補題 2.3 を用いることにより, 次の補題を得る.

**補題 2.4([H]).** $D_0^{\sim}$ **上,**

$$\sum_{j=1}^{3} g_{p_j^{\sim}}^{\sim} = g_0 \circ \pi.$$

$p_0^{\sim}$ を それを極にもつ Martin 関数が $\frac{1}{3}(k_{p_1^{\sim}}^{\sim} + k_{p_2^{\sim}}^{\sim} + k_{p_3^{\sim}}^{\sim})$ で与えられる $\Delta^{\sim}$ の元とする. 上の補題と命題 2.1 より, 次がしたがう.

**定理 2.1.** $D_0^{\sim}$ **上,** $\lim_{I \ni \pi(z^{\sim}) \to 0} g_{z^{\sim}}^{\sim}$ **が存在して,**

$$\lim_{I \ni \pi(z^{\sim}) \to 0} g_{z^{\sim}}^{\sim} = \frac{1}{3} g_0 \pi = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} g_{p_j^{\sim}}^{\sim} = g_{p_0^{\sim}}^{\sim}.$$

**証明** $\alpha \in (\pi^*)^{-1}(0) \cap Cl(I^{\sim})$ に対して, $I^{\sim}$ 上の点列 $\{z_n^{\sim}\}$ で, $\lim_{n\to\infty} z_n^{\sim} = \alpha$ をみたすものをとる. 命題 2.1 より,

$$\lim_{n\to\infty} \tau^{\sim}(z_n^{\sim}) = \alpha,$$

すなわち, $D_0^{\sim}$ 上,

$$\lim_{n\to\infty} g_{\tau^{\sim}(z_n^{\sim})}^{\sim} = \lim_{n\to\infty} g_{z_n^{\sim}}^{\sim}.$$

よって, $D_0^{\sim}$ 上,

$$g_{\alpha}^{\sim} \circ \tau^{\sim} = g_{\alpha}^{\sim}.$$

よって, 補題 2.3 より, $D_0^{\sim}$ 上,

$$g_0 \circ \pi = \lim_{n\to\infty} g_{\pi(z_n^{\sim})} \circ \pi = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{3} g_{z_n^{\sim}}^{\sim} \circ (\tau^{\sim})^j = \sum_{j=1}^{3} g_{\alpha}^{\sim} \circ (\tau^{\sim})^j = 3 g_{\alpha}^{\sim}.$$

よって, 補題 2.4 より, 求める結果を得る. □

**3. 主定理の証明**

$j = 1,2,3$ に対して,

$$\Sigma(C_j) := \{\{z_n^{\sim}\}(\subset C_j) | C_j \text{上}, \lim_{n\to\infty} g_{z_n^{\sim}}^{\sim} \text{が存在する}.\}$$

とおく. $\{z_n^{\sim}\}, \{\zeta_n^{\sim}\}$ に対して, 同値関係 $\sim$ を次式

$$\{z_n^{\sim}\} \sim \{\zeta_n^{\sim}\} \Longleftrightarrow D_0^{\sim} \text{上}, \lim_{n\to\infty} g_{z_n^{\sim}}^{\sim} = \lim_{n\to\infty} g_{\zeta_n^{\sim}}^{\sim}.$$

で定義する. $\tilde{\Sigma}(C_j) := \Sigma(C_j)/\sim (j = 1,2,3)$ とおく. 主定理を証明するためには, 次を示せば, 十分である.

**定理 3.1.** $j = 1,2,3$ **とする. 全単射:** $\tilde{\Sigma}(C_j) \ni [\{z_n^{\sim}\}] \longleftrightarrow t \in [0,1]$ **が次式**

$$\lim_{n\to\infty} g_{z_n^{\sim}}^{\sim} = t g_{p_j^{\sim}}^{\sim} + (1-t) g_{p_0^{\sim}}^{\sim}$$

**によって, 与えられる.**

**証明** 実軸上に中心をもつある互いに交わらない円板列 $\{B_n\}$ と等角写像 $\phi : E \to C(E = D_0 \setminus B, B = \cup_0^\infty B_n)$ が存在する. $I$ が 0 で thin であるので, $B$ も 0 で thin であることがわかる. 古典的なポテンシャル論 (cf. [B-H, p.336]) により, 次が知られている.

**事実** $G(\subset \mathbf{C})$ **を有界領域とし,** $\zeta \in \partial G$ **の (Dirichlet 問題の意味の) 非正則点で,** $\zeta \in Cl_{\mathbf{C}}(B(\mathbf{C} \setminus G))(B(\mathbf{C} \setminus G)$ **は** $\partial G$ **の (Dirichlet 問題の意味の) 正則点全体と** $\mathbf{C} \setminus G$ **の内部の合併集合である).**

$$\Sigma_1(G) := \{\{z_n\}(\subset G) | \lim_{n\to\infty} z_n = \zeta, \{\omega_{z_n}^G\} \text{が弱収束する}.\}$$

**とおく. ただし,** $\omega_{z_n}^G$ **は** $z_n$ **と** $D$ **に関する調和測度である.** $\{z_n\}, \{\zeta_n\}$ **に対して, 同値関係** $\sim_1$ **を次式**

$$\{z_n\} \sim_1 \{\zeta_n\} \Longleftrightarrow \partial G \text{ 上}, \lim_{n\to\infty} \omega_{z_n}^G = \lim_{n\to\infty} \omega_{\zeta_n}^G.$$

**で定義する.** $\tilde{\Sigma}_1(G) := \Sigma_1(G)/\sim_1$ **とおく. このとき, 全単射:** $\tilde{\Sigma}_1(G) \ni [\{z_n\}] \longleftrightarrow t \in [0,1]$ **が次式**

$$\lim_{n\to\infty} \omega_{z_n}^G = t\omega_\zeta^G + (1-t)\epsilon_\zeta,$$

**すなわち, 任意の** $\partial G$ **上の連続関数** $f$ **に対して,**

$$\lim_{n\to\infty} H_f^G(z_n) = t\left(\mathcal{F} - \lim_{z\to\zeta} H_f^G(z)\right) + (1-t)f(\zeta)$$

**によって, 与えられる. ここで,** $H_f^G(z_n)$ **は** $f$ **の** $z_n$ **における** $G$ **上の Dirichlet 解とする.**

$\zeta$ を $D_0$ の点とする. $j = 1,2,3$ に対して, 写像 $\phi_j : E \to C_j$ を $\phi_j := \sigma_j \circ \phi$ によって定義する. ただし, $\sigma_j$ は補題 2.2 の上で定義した写像とする. $g_\zeta$ を $\zeta$ で極をもつ $D$ 上の Green 関数とする.

このとき, $\zeta$ で極をもつ $E$ 上の Green 関数を考察することにより, 次式が成立する.
$j=1,2,3$ に対して,

$$(1) \qquad g_\zeta \circ \phi - H^E_{g_\zeta \circ \phi} = g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \phi_j - H^E_{g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \phi_j},$$

ここで, $\zeta = \pi(\zeta^\sim)$ とする. 定理 2.1 より, $g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \phi$ は $\partial E$ 上, 連続である. $\partial E$ 上の連続関数 $g_\zeta \circ \phi$ と $g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \phi_j$ に対して, 上の事実を用いると, 全単射 $\tilde{\Sigma}_1(\phi(C_j)) \ni [\{z_n\}] \longleftrightarrow t \in [0,1]$ が存在して, 次式

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} H^E_{g_\zeta \circ \phi}(z_n) = t\left(\mathcal{F} - \lim_{z\to 0} H^E_{g_\zeta \circ \phi}(z)\right) + (1-t) g_\zeta \circ \phi(0)$$

および

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} H^E_{g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \phi_j}(z_n) = t\left(\mathcal{F} - \lim_{z\to 0} H^E_{g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \phi_j}(z)\right) + (1-t) g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \phi_j(0)$$

がなりたつ. ここで, $g^\sim(\cdot,\cdot)$ の対称性と定理 2.1 より, $g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \phi_j(0) = g_{p_0^\sim}^\sim(\zeta_j^\sim)$. したがって, (3) より,

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} H^E_{g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \phi_j}(z_n) = t\left(\mathcal{F} - \lim_{z\to 0} H^E_{g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \phi}(z)\right) + (1-t) g_{p_0^\sim}^\sim(\zeta_j^\sim).$$

よって, (2), (1), (4) により,

$$\begin{aligned}
& g_\zeta \circ \phi(0) - \left(t\left(\mathcal{F} - \lim_{z\to 0} H^E_{g_\zeta \circ \phi}(z)\right) + (1-t) g_\zeta \circ \phi(0)\right) \\
= & \lim_{n\to\infty} \left(g_\zeta \circ \phi(z_n) - H^E_{g_\zeta \circ \phi}(z_n)\right) \\
= & \lim_{n\to\infty} \left(g_{\zeta_j^\sim \circ \phi_j}^\sim (z_n) - H^E_{g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \phi_j}(z_n)\right) \\
= & \lim_{n\to\infty} g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \phi_j(z_n) - \left(t\left(\mathcal{F} - \lim_{z\to 0} H^E_{g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \phi_j}(z)\right) + (1-t) g_{p_0^\sim}^\sim(\zeta_j^\sim)\right),
\end{aligned}$$

すなわち,

$$(5) \qquad \begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \phi_j(z_n) \quad = \quad & t\left(g_\zeta \circ \phi(0) - \left(\mathcal{F} - \lim_{z\to 0} H^E_{g_\zeta \circ \phi}(z)\right) + \left(\mathcal{F} - \lim_{z\to 0} H^E_{g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \phi_j}(z)\right)\right) \\
& +(1-t) g_{p_0^\sim}^\sim(\zeta_j^\sim).
\end{aligned}$$

一方, (1), および命題 1.1 より,

$$(6) \qquad g_\zeta \circ \phi(0) - \left(\mathcal{F} - \lim_{z\to 0} H^E_{g_\zeta \circ \phi}(z)\right) + \left(\mathcal{F} - \lim_{z\to 0} H^E_{g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \phi_j}(z)\right) = \mathcal{F} - \lim_{z\to 0} g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \phi_j(z).$$

(6),$\phi_j$ の定義 および補題 2.2 を用いると,

$$(7) \qquad (6) \text{ の右辺} = \mathcal{F} - \lim_{z\to 0} g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \sigma_j(z) = g_{p_j^\sim}^\sim(\zeta_j^\sim).$$

(5), (6), (7) より,

$$\lim_{n\to\infty} g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \phi_j(z_n) = t g_{p_j^\sim}^\sim(\zeta_j^\sim) + (1-t) g_{p_0}^\sim(\zeta_j^\sim).$$

これで, 定理 3.1 の証明が完成した. □

## 参考文献

[A-S] Ahlfors, L.V., Sario, L.: *Riemann Surfaces*, Princeton, 1960.

[B] M. Brelot, *On Topologies and Boundaries in Potential Theory*, Lecture Notes in Math. **175**, Springer, 1971.

[B-H] J. Bliedtner and W. Hansen, *Potential Theory*, Springer, 1986.

[C-C] C. Constantinescu and A. Cornea, *Ideale Ränder der Riemannscher Flächen*, Springer, 1963.

[F] Forster, O.: *Lectures on Riemann Surfaces*, GTM 81, Springer, 1981.

[H] M. Heins, *Riemann surfaces of infinite genus*, Ann. of Math., **55**(1952), 296-317.

[HL] L. Helms, *Introduction to Potential Theory*, Wiley-Interscience, 1969.

[M-S1] H. Masaoka and S. Segawa, *Harmonic dimension of covering surfaces*, Kodai Math. J., **17**(1994), 351-359.

[M-S2] H. Masaoka and S. Segawa, *Harmonic dimension of covering surfaces and minimal fine neighborhood*, Osaka J. Math., **34**(1997), 659-672.

[S-N] L. Sario and M. Nakai, *Classification theory of Riemann surfaces*, Springer, 1970.