数理解析研究所講究録
1118 巻 1999 年 129-146

The suspension of an orientation preserving diffeomorphism on D^2 with a hyperbolic fixed point and universal template

奈良女子大学大学院人間文化研究科
金　英子　(Eiko Kin)

1　序文

$D^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ を 2 次元円板とし、$\phi: D^2 \to D^2$ を向きを保つ同相写像とする。いま $\{\phi_t\} = \{\phi_t\}_{0\leq t\leq 1}$ を D^2 上の恒等写像 id_{D^2} と ϕ を結ぶアイソトピー(i.e. $\phi_0 = id_{D^2}, \phi_1 = \phi$) とする。$\phi$ の周期軌道の有限個の和集合(i.e. ϕ-不変な有限集合) P に対して、$\mathcal{S}_{\{\phi_t\}}P \subset D^2 \times S^1 (\cong D^2 \times I/(x,0) \sim (x,1))$ を次で定める。

$$\mathcal{S}_{\{\phi_t\}}P = \bigcup_{0\leq t\leq 1} (\phi_t(P) \times \{t\})/(x,0) \sim (x,1).$$

集合 $\mathcal{S}_{\{\phi_t\}}P$ を $\{\phi_t\}$ による P の suspension という.

3 次元球 S^3 内の、向きを持つコンパクトで滑らかな 1 次元多様体を絡み目という。1 つの成分からなる絡み目を結び目という。2 つの絡み目 L_1, L_2 が同じ絡み目型であるとは、S^3 上のアンビエントアイソトピー $\{H_t\}_{0\leq t\leq 1}$ が存在し、$H_0 = id_{S^3}, H_1(L_1) = L_2$ を満たすこととする。このとき、$L_1 = L_2$ とかく。

以下では $\tilde{V} = D^2 \times S^1$ とかくことにする。$V \subset S^3$ を 標準的に埋め込まれたソリッドトーラス (即ち、$c\ell(S^3 - V)$ もまたソリッドトーラスとなるようなもの) とする。整数 $n \in \mathbf{Z}$ に対し、同相写像 $h_n: \tilde{V} \to V$ を、$\partial\tilde{V}$ 上の経線 $\tilde{\ell}$の、h_n による像が定める結び目 k_nと、V の core circle の絡み数が n であるものとする(図 1 参照)。ϕ の周期軌道の有限個の和集合 P に対して、$h_n(\mathcal{S}_{\{\phi_t\}}P)$ は絡み目を定めることに注意する。

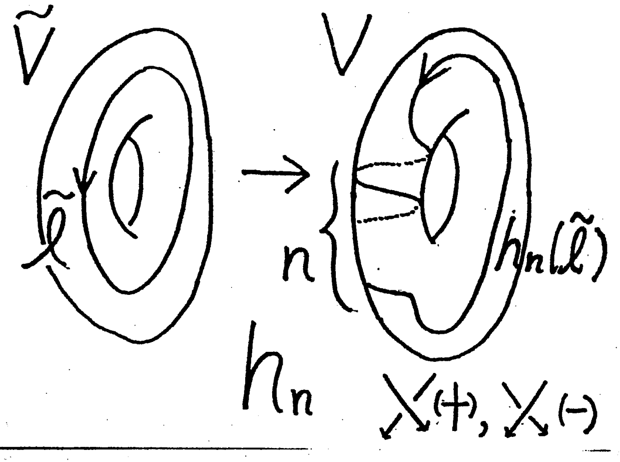

図 1

Definition 1.1 ϕ の suspension が全ての絡み目型を含むとは、恒等写像 id_{D^2} と ϕ を結ぶ任意のアイソトピー $\{\phi_t\} = \{\phi_t\}_{0\leq t\leq 1}$ $(\phi_0 = id_{D^2}, \phi_1 = \phi)$ に対し、ある $m \in \mathbf{Z}$ が存在して次が成立することとする。

> 任意の絡み目 L に対して、$h_m(\mathcal{S}_{\{\phi_t\}}P_L) = L$ を満たす、ϕ のある周期軌道の有限個の和集合 P_L が存在する。

結び目 $K \subset S^3$ がiterated torus knot であるとは、次を満たすある S^3 内のソリッドトーラスの列が存在することとする。
(I1) $V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_r$.
(I2) V_i の core は ∂V_{i-1} 上に存在する。$(1 \leq i \leq r)$。
(I3) V_i の core は $H_1(V_{i-1})$ の自明な要素でない $(1 \leq i \leq r)$。
(I4) V_r の core は 結び目 K。

[3; Theorem A] により、ϕ の位相的エントロピーが0ならば、任意のアイソトピー $\{\phi_t\} = \{\phi_t\}_{0\leq t\leq 1}$ と、任意の $m \in \mathbf{Z}$ と、任意の1つの周期軌道 P に対して、$h_m(\mathcal{S}_{\{\phi_t\}}P)$ が定める結び目はiterated torus knotであることがわかる。したがって、$\{\phi_t\}$ による ϕ の1つの周期軌道 P のsuspensionが定める結び目の集合は、S^3 内の全ての結び目の集合の中で制限される。即ち、位相的エントロピーが0であるような ϕ に対しては、そこから定まる結び目型は制限されたものになっている。従って次のような問題が考えられる。

Problem 1.2 Suspensionが全ての絡み目型を含むような ϕ は存在するか？また存在するとすると、どのような ϕ に対して ϕ の suspension が全ての絡み目型を含むか？

今回は、この問題に関連した次の結果について報告する（双曲型不動点, $W^u(p)$, $W^s(p)$ 等の定義については2節を参照のこと)。

Theorem 1.3 $\phi: D^2 \to D^2$ を向きを保つ C^1 微分同相写像とする。いま ϕ は双曲型不動点 p を持ち、$W^u(p) \cap W^s(p) \setminus \{p\} \neq \emptyset$ かつ、$W^u(p)$ と $W^s(p)$ の全ての交点は横断的とする。このとき、ϕ^n の suspension が全ての絡み目型を含むような $n \geq 1$ が存在する。

この定理は、R. Ghrist ([5]) によってその存在が証明されたuniversal template の概念を用いて証明される。

2 準備

2.1 双曲型力学系

一般に、多様体 M 上のの可微分同相写像 $\phi: M \to M$ の不動点 $p \in M$ が双曲型であるとは、ϕ の p における微分 $D_p\phi: T_pM \to T_pM$ が、絶対値 1 の固有値をもたないときを

いう。

$$
\begin{aligned}
W^s(p) &= \{x \mid x \in M,\ \phi^n(x) \to p\ (n \to \infty)\}, \\
W^u(p) &= \{x \mid x \in M,\ \phi^n(x) \to p\ (n \to -\infty)\}
\end{aligned}
$$

とおく。安定多様体定理 (resp. 不安定多様体定理) により、上の集合は ϕ と同じだけのなめらかさを持った部分多様体である。

$q \in W^s(p) \cap W^u(p) \setminus \{p\}$ をホモクリニック点という。とくに、$W^s(p)$ と $W^u(p)$ が横断的であるとき、即ち、

$$
T_q(W^s(p)) \oplus T_q(W^u(p)) = T_qM
$$

であるとき、q を横断的ホモクリニック点という。

$\Lambda \subset M$ が以下を満たすとき、Λ を双曲型集合という。

(h1) Λ 上の接空間 T_zM は、ϕ-不変な部分空間への分解

$$
T_zM = E_z^u \oplus E_z^s, \quad z \in \Lambda
$$

を持つ。

(h2) 定数 $c > 0, \lambda > 1$ が存在し、任意の自然数 n に対して、

$$
\begin{aligned}
\|D_z\phi^n(v)\| &\geq c\lambda^n\|v\|, \quad v \in E_z^u, \\
\|D_z\phi^{-n}(v)\| &\geq c\lambda^n\|v\|, \quad v \in E_z^s
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

2.2 組み紐群

D^2 上の n 次の組み紐の configulation space $F_{0,n}D^2$ を次のように定める。

$$
F_{0,n}D^2 = \{(z_1, \cdots, z_n) \mid (z_1, \cdots, z_n) \in \prod_{i=1}^{n} D^2,\ z_i \neq z_j\ (i \neq j)\}.
$$

$Z = (z_1, \cdots, z_n)$, $Z' = (z'_1, \cdots, z'_n) \in F_{0,n}D^2$ が同値であるとは、対称群 S_n のある要素 σ が存在し、$(z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(n)}) = (z'_1, \cdots, z'_n)$ を満たすこととする。明らかにこの関係は同値関係である。この同値関係による $F_{0,n}D^2$ の商空間を $B_{0,n}D^2$ とかき、$B_{0,n}D^2$ の基本群 $\pi_1(B_{0,n}D^2, Z)$ を n-組み紐群という。$B_{0,n}D^2$ 内の Z を基点とする loop ℓ が定める $\pi_1(B_{0,n}D^2, Z)$ の元を $[\ell]$ とかく。

$p : F_{0,n}D^2 \to B_{0,n}D^2$ を商空間への射影とする。基本群 $\pi_1(F_{0,n}D^2, \tilde{Z})$ の基点 $\tilde{Z} = (\tilde{z}_1, \cdots, \tilde{z}_n)$ をとり、$p(\tilde{Z}) = Z_0$ ($Z_0 = (z_1^0, \cdots, z_n^0)$) とする。$\pi_1(B_{0,n}D^2, Z_0)$ の要素は loop $\ell : I \to B_{0,n}D^2$ ($\ell(0) = \ell(1) = Z_0$) を定める。$\tilde{\ell}$ を ℓ の $F_{0,n}D^2$ への持ち上げで $\tilde{\ell}(0) = \tilde{Z}$ なるものとする。$\tilde{\ell}(t) = (\tilde{\ell}_1(t), \cdots, \tilde{\ell}_n(t))$ ($t \in I$) とおく. そのとき $\tilde{\ell}_i$ は弧 $\alpha_i = \bigcup_{0 \leq t \leq 1} (\tilde{\ell}_i(t) \times \{t\}) \subset D^2 \times I$ を定める. このとき、各 α_i は $D^2 \times I$ 内で I 成分に関して単調であることに注意する。また任意の $t \in I$ に対して、$\tilde{\ell}(t)$ は $F_{0,n}D^2$ の要素なので、弧 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ は互いに交わらないこ

とに注意する。これより $\alpha = \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n$ は所謂幾何的n-ブレイド(geometric n-braid)になっていることがわかる。弧 α_i を i-string 又は単に stringという. αとβをそれぞれ $[k], [\ell] \in \pi_1(B_{0,n}D^2, Z_0)$ から定義される幾何的n-ブレイドとする。$\tilde{k}$, $\tilde{\ell}$ をそれぞれ k, ℓ の $F_{0,n}D^2$ への持ち上げで、$\tilde{k}(0) = \tilde{\ell}(0) = \tilde{Z}$ なるものとする。$\tilde{k}(t) = (\tilde{k}_1(t), \cdots, \tilde{k}_n(t))$, $\tilde{\ell}(t) = (\tilde{\ell}_1(t), \cdots, \tilde{\ell}_n(t))$ $(t \in I)$ とおく。このとき、αとβが同値であるとは、次を満たす、ある連続写像$\mathcal{G} : I \times I \to F_{0,n}D^2$ が存在することとする。

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(0,t) &= (\mathcal{G}_1(0,t), \cdots, \mathcal{G}_n(0,t)) = (\tilde{k}_1(t), \cdots, \tilde{k}_n(t)), \\
\mathcal{G}(1,t) &= (\mathcal{G}_1(1,t), \cdots, \mathcal{G}_n(1,t)) = (\tilde{\ell}_1(t), \cdots, \tilde{\ell}_n(t)), \\
\mathcal{G}(s,0) &= (\mathcal{G}_1(s,0), \cdots, \mathcal{G}_n(s,0)) = (\tilde{z}_1, \cdots, \tilde{z}_n), \\
\mathcal{G}(s,1) &= (\mathcal{G}_1(s,1), \cdots, \mathcal{G}_n(s,1)) = (\tilde{z}_{\sigma(1)}, \cdots, \tilde{z}_{\sigma(n)}).
\end{aligned}$$

ここで、σはn次対称群S_nの要素である。ホモトピー$\mathcal{G}$は、幾何的n-ブレイドの列

$$\alpha(s) = \alpha_1(s) \cup \cdots \cup \alpha_n(s) \ (s \in I)$$

$(\alpha(0) = \alpha, \alpha(1) = \beta)$ を定める。ここで、$\alpha_i(s) = \bigcup_{0 \le t \le 1} (\mathcal{G}_i(s,t) \times \{t\})$ である。明らかに、この関係は同値関係である。幾何的n-ブレイド α の、この同値関係による同値類を $[\alpha]$ とかく。定義より、$[k] = [\ell]$ ならば $[\alpha] = [\beta]$ である。逆に $[\alpha] = [\beta]$ ならば $[k] = [\ell]$ であることが容易にわかる。

αの stringsにβのそれを図 2 のようにくっつけて得られる幾何的n-ブレイドを$\alpha\beta$とかくことにする。明らかに、$\alpha\beta$ は、$[k][\ell] \in \pi_1(B_{0,n}D^2, Z_0)$から定義される幾何的$n$-ブレイドである。

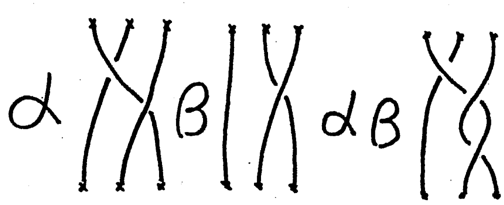

図 2

ここで$\widetilde{V} = D^2 \times S^1$, $V(\subset S^3)$ を 3 次元球面内に標準的に埋め込まれたソリッドトーラス、また整数 $n \in \mathbf{Z}$ に対し$h_n : \widetilde{V} \to V$ を、$\partial\widetilde{V}$ 上の経線の像と V の core circle の絡み数がnとなるような同相写像とおいたことを思い出しておく。以下 $h : \widetilde{V} \to V$ をそのような同相写像の一つとする。幾何的 n-ブレイド $\alpha(\subset D^2 \times I)$に対して、それぞれのstringの両端点を同一視して得られる集合を$\widehat{\alpha}(\subset D^2 \times S^1)$ とおく。$[\alpha] = [\beta]$ならば、$h(\widehat{\alpha})$ と $h(\widehat{\beta})$ が定める2つの絡み目は同じ絡み目型であることに注意する。

ϕ の周期軌道の有限個の和集合を P, n を P の要素の数、恒等写像 id_{D^2} と ϕ を結ぶアイソトピーを $\{\phi_t\}_{0\leq t\leq 1}$ $(\phi_0 = id_{D^2}, \phi_1 = \phi)$ とする。そのとき、集合

$$\bigcup_{0\leq t\leq 1} \phi_t(P) \times \{t\} (\subset D^2 \times I)$$

は幾何的 n-ブレイドを定める。$\{\tilde{\phi}_t\}_{0\leq t\leq 1}$ $(\tilde{\phi}_0 = id_{D^2}, \tilde{\phi}_1 = \phi)$ を、恒等写像 id_{D^2} と ϕ を結ぶ、もう一つのアイソトピーとする。$\bigcup_{0\leq t\leq 1} \phi_t(P) \times \{t\}$, $\bigcup_{0\leq t\leq 1} \tilde{\phi}_t(P) \times \{t\}$ によって定まる幾何的 n-ブレイドを、それぞれ $\alpha(P)$, $\tilde{\alpha}(P)$ とおく。D^2 の原点を中心に D^2 が m 回転 $(m \in \mathbf{Z})$ するとき、P の軌跡として得られる幾何的 n-ブレイドを Δ_P^m (図 3 参照) とかく。次の lemma は $\alpha(P)$ と $\tilde{\alpha}(P)$ の間の関係を述べている。

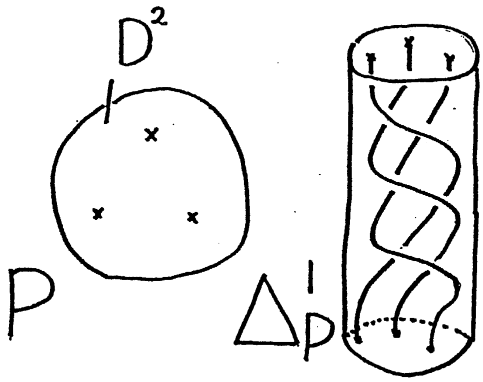

図 3

Lemma 2.2.1([6; p32]) ϕ の周期軌道の有限個の和集合 P に対してある $m \in \mathbf{Z}$ が存在し、$[\alpha(P)] = [\Delta_p^m \tilde{\alpha}(P)]$ が成立する。

Remark 2.2.2 明らかに、恒等写像 id_{D^2} と id_{D^2} を結ぶアイソトピー $\{\tilde{\phi}_t\}_{0\leq t\leq 1}$ $(\tilde{\phi}_t = id_{D^2})$ と有限集合 $A \subset D^2$ に対して、$[\tilde{\alpha}(P)] = [\Delta_P^0]$ が成り立つ。よって上の lemma より、id_{D^2} と id_{D^2} を結ぶアイソトピー $\{\phi_t\}_{0\leq t\leq 1}$ に対してある $m \in \mathbf{Z}$ が存在し、$[\alpha(P)] = [\Delta_p^m]$ が成立する。

Lemma 2.2.3 id_{D^2} と ϕ を結ぶアイソトピー $\{\phi_t\}_{0\leq t\leq 1}$, $\{\tilde{\phi}_t\}_{0\leq t\leq 1}$ に対してある $m \in \mathbf{Z}$ が存在し、ϕ の周期軌道の任意の有限個の和集合 P に対して、$[\alpha(P)] = [\Delta_p^m \tilde{\alpha}(P)]$ が成立する。

Proof アイソトピー $\{\Phi_t\}_{0\leq t\leq 1}$ を

$$\Phi_t = \begin{cases} \phi_{2t} & \text{if } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{\phi}_{2-2t} & \text{if } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

で定める ($\Phi_0 = id_{D^2}, \Phi_1 = id_{D^2}$ に注意する)。有限集合 $A \subset D^2$ に対して、$\bigcup_{0\le t\le 1} \Phi_t(A)\times\{t\}$ から定まる幾何的ブレイドをβ_Aとおく。

Claim ある$m \in \mathbf{Z}$が存在して、任意の有限集合$A \subset D^2$ に対して$[\beta_A] = [\Delta_A^m]$が成り立つ。

Proof of Claim. 任意の有限集合$A, B \subset D^2$ をとる。Remark 2.2.2 より、$[\beta_A] = [\Delta_A^\ell]$, $[\beta_B] = [\Delta_B^m]$ を満たす$\ell, m \in \mathbf{Z}$が存在する。$\ell \neq m$と仮定する。$C = A \cup B$とおく。Remark 2.2.2 より、$[\beta_C] = [\Delta_C^n]$ を満たす$n \in \mathbf{Z}$が存在する。β_Cを定める集合 $\bigcup_{0\le t\le 1} \Phi_t(C)\times\{t\}$ をその部分集合 $\bigcup_{0\le t\le 1} \Phi_t(A)\times\{t\}$ に制限して定まる幾何的ブレイドは β_A であり、$[\beta_A] = [\Delta_A^\ell]$ であるから$n = \ell$が成り立つ. β_Cを定める集合 $\bigcup_{0\le t\le 1} \Phi_t(C)\times\{t\}$ をその部分集合 $\bigcup_{0\le t\le 1} \Phi_t(B)\times\{t\}$ に制限して得られる幾何的ブレイドは β_B であるから、上と同じ議論を使って、$n = m$ が成り立つ。これは、$\ell \neq m$ に反する。よってClaimが成り立つ。

Claim よりある$m \in \mathbf{Z}$が存在して、任意の有限集合$A \subset D^2$ に対して$[\beta_A] = [\Delta_A^m]$が成り立つ。とくに $\{\Phi_t\}_{0\le t\le 1}$ の定義より、ϕ の周期軌道の任意の有限個の和集合 P に対して $[(\alpha(P))(\tilde{\alpha}(P))^{-1}] = [\Delta_p^m]$ が成り立つ. 従って、$[\alpha(P)] = [\Delta_p^m \tilde{\alpha}(P)]$ が成り立つ。よって lemma の主張が成立する。□

Lemma 2.2.4 ϕを上と同じとする。いま、D^2 上の恒等写像 id_{D^2} と ϕ を結ぶあるアイソトピー$\{\phi_t\} = \{\phi_t'\}_{0\le t\le 1}$ ($\phi_0 = id_{D^2}$, $\phi_1 = \phi$) に対してある $\ell \in \mathbf{Z}$ が存在し、次が成り立つとする。

> 任意の絡み目 Lに対して$h_\ell(\mathcal{S}_{\{\phi_t\}} P_L) = L$を満たす、$\phi$ のある周期軌道の有限個の和集合 P_L が存在する。

このとき ϕ の suspension は全ての絡み目型を含む.

Proof D^2 上の恒等写像 id_{D^2} と ϕ を結ぶアイソトピー$\{\tilde{\phi}_t\}_{0\le t\le 1}$ ($\tilde{\phi}_0 = id_{D^2}, \tilde{\phi}_1 = \phi$) をとる。Lemma 2.2.3 よりある$m \in \mathbf{Z}$が存在して、$\phi$ の周期軌道の任意の有限個の和集合 P に対して$[\alpha(P)] = [\Delta_p^m \tilde{\alpha}(P)]$が成立する。ここで、$\alpha(P), \tilde{\alpha}(P)$ は、それぞれ $\bigcup_{0\le t\le 1} \phi_t(P)\times\{t\}$ と $\bigcup_{0\le t\le 1} \tilde{\phi}_t(P)\times\{t\}$ により定まる幾何的ブレイドである。従って、$h_{m+\ell}(\mathcal{S}_{\{\tilde{\phi}_t\}} P_L) = L$ が成り立つ. よって lemma の主張が成り立つ。□

2.3 Universal Template

2.3.1 Template

ここでは Birman-Williams によって導入された 3 次元多様体上のある種の flow から定まる template(:knot holder) の概念について紹介する。

一般に templateとは、境界を持つコンパクトな branched 2-manifold であり、その上に拡大的な半流が定義されていて、各点が局所的には図 4 のような (T1) 分岐線を覆う、有限個の incoming strips, (T2) 有限個の outgoing strips からなるものである.

$\mathcal{T}$をS^3内に埋め込まれたtemplateとする。$\mathcal{T}$上の半流の周期軌道の有限個の和集合はS^3内の絡み目を定める。

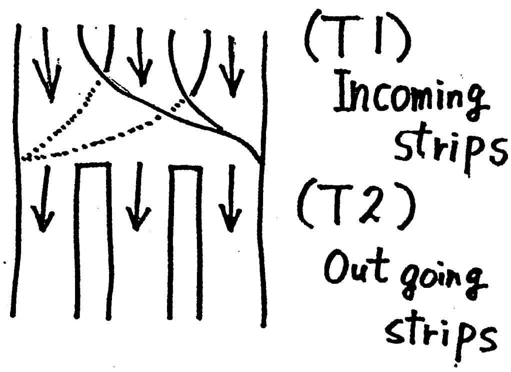

図 4

Mを3次元多様体、$f_t : M \to M$ を流れとする。$x \in M$ が f_t の鎖回帰点であるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある点列 $x = x_1, x_2, \cdots, x_{n-1} = x$ と実数 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$ $(t_i > 1)$ が存在し、$\|f_{t_i}(x_i) - x_{i+1}\| < \epsilon$ $(1 \leq i \leq n-1)$ を満たすことである。f_t の鎖回帰点全体の集合を鎖回帰集合という。

いま f_tは双曲型鎖回帰集合を持つとする. このような流れに対して次のような性質を持つ template $\mathcal{T}_M \subset M$ が定まることが Birman-Williams によって示されている:

Theorem 2.3.1.1 ([2]) f_tを上と同じとする。このとき、ある template $\mathcal{T}_M \subset M$ と、f_tの周期軌道（ただし、高々2つの周期軌道を除いて）の有限個の和集合から定まる絡み目の集合$\mathcal{L}_f$から$\mathcal{T}_M$の周期軌道の有限個の和集合から定まる絡み目の集合$\mathcal{L}_T$への全単写Θ があって、任意の絡み目 $L \in \mathcal{L}_f$ に対して、Lと$\Theta(L)$ はアンビエントアイソトピックである。

2.3.2 Smaleの馬蹄型写像から得られるtemplate

$R = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] (\subset D^2)$, S_1, S_2を図 5 の半円とする。$H : D^2 \to D^2$を Smale の馬蹄型写像とする。

即ち H は次の条件を満たす微分同相写像である。

$(H1)$ $S_1 \cup R \cup S_2$はHによって図 6 のように写される。

$(H2)$ $H|_{V_i}$ $(i = 0, 1)$ はアフィン写像で、水平方向に伸び、垂直方向に縮む。ここで、V_iは図 6 の長方形である。つまり、V_iの上辺と下辺はRの上辺と下辺にそれぞれ含まれ、$H(V_i)$の右辺と左辺はHの右辺と左辺にそれぞれ含まれる。

$(H3)$ $H|_{S_1}: S_1 \to S_1$ は縮小写像である。(従って 不動点 $p \in S_1$ を持つ。)
$(H4)$ $\Omega(H) = p \cup (\Omega(H) \cap R)$ が成り立つ。ただし、$\Omega(H)$ は H の非遊走集合、即ち $x \in D^2$ の任意の近傍 U に対し、ある $n \neq 0$ があって $H^n(U) \cap U \neq \emptyset$ を満たす x の集合である。

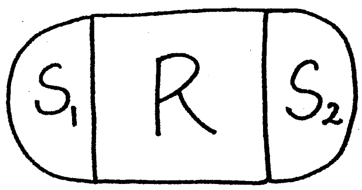

図 5

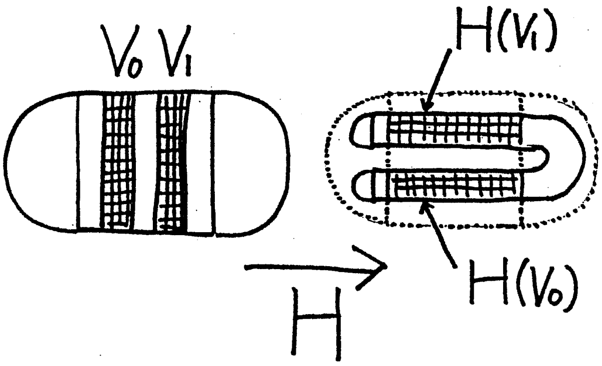

図 6

$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} H^n(V_0 \cup V_1)$ とおく。上の H の条件によって、Λは双曲型集合であることがわかる。$\{H_t\} = \{H_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ $(H_0 = id_{D^2}, H_1 = H)$ を、$S_1 \cup R \cup S_2$ を図 7 のような図形にうつす D^2 上の恒等写像 id_{D^2} と H を結ぶアイソトピーとする。

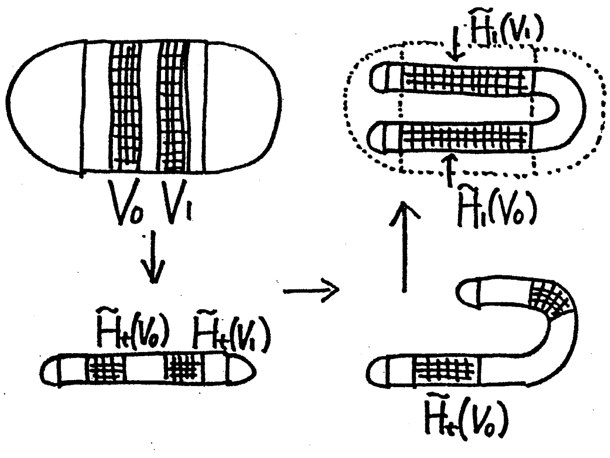

図 7

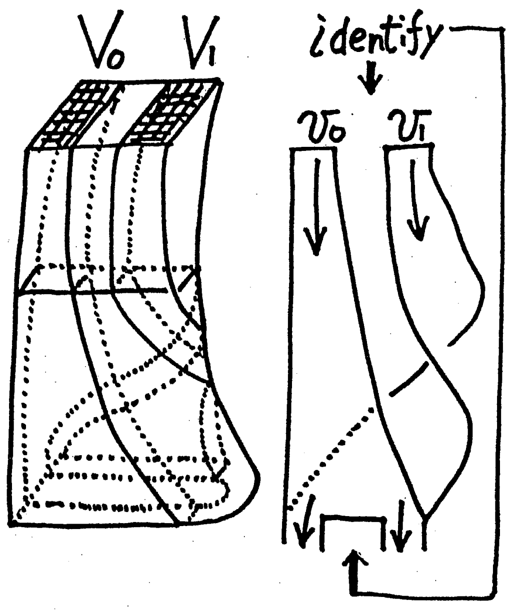

図 8

v_0, v_1, rをそれぞれV_0, V_1, Rの下辺とし、v_i $(i=0,1)$のH_tによる像を考える。双曲型集合Λの要素の安定多様体にそって、$H_1(v_i)\times\{1\}$を$r\times\{1\}$へ潰し、$v_i\times\{0\}$と$v_i\times\{1\}$を同一視することによってtemplate $\mathcal{U}_H$ (図 8 参照)が定まる. $h_0:\tilde{V}\to V$ を1章で与えた同相写像とする。Theorem 2.3.1.1 の証明の中の、鎖回帰集合の有限個の基本集合への分解で得られる1つの基本集合の次元が1の場合の考察より、([4; p39] or [2; p11])、次が成り立つ:

Claim 2.3.2.1 Λ に含まれる H の周期軌道の任意の有限個の和集合 P に対して、$h_0(S_{\{H_t\}}P)$ が定める絡み目の集合と、$\mathcal{U}_H$ の周期軌道の有限個の和集合が定める絡み目の集合は等しい。

2.3.3 Universal template

S^3に埋め込まれたtemplate $\mathcal{T}$が universalであるとは、任意の絡み目 $L\subset S^3$ に対して、$\mathcal{T}$ の周期軌道の有限個の和集合 P_Lがあって、P_L から定まる絡み目と L が同じ絡み目型であることとする。Birman-Williams はこのような template は存在しないであろうと予想していたが1997年 R. Ghrist は実際に universal template が存在することを示した([5])。ここでは R. Ghrist によって universal である事が証明された template について紹介し、さらにそれを用いていくつかの template が universal である事を示す。

整数$m,n\in\mathbf{Z}$に対して、図 9 の templateを$\mathcal{L}(m,n)$とかく.

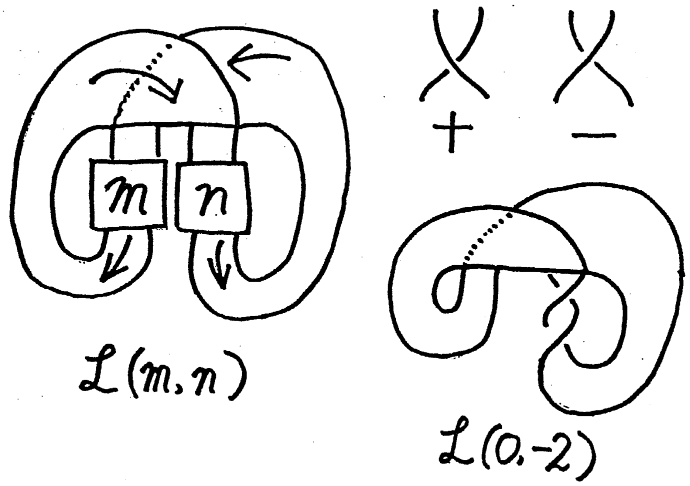

図 9

$\mathcal{L}(m,n)$ は一般にLorenz-like templateと呼ばれている。

Theorem 2.3.3.1 ([5]) $n<0$ に対して、$\mathcal{L}(0,n)$ はuniversalである.

Template $\mathcal{T}$ の部分集合 $\tilde{\mathcal{T}}$ が $\mathcal{T}$ の subtemplateであるとは、$\mathcal{T}$ の $\tilde{\mathcal{T}}$ への半流の制限が、templateの定義を満たすこととする。

Lemma 2.3.3.2 (1) 図 10 の template $\mathcal{U}$ はuniversalである.

(2) 図 11 の template $\mathcal{V}$ は universal である.

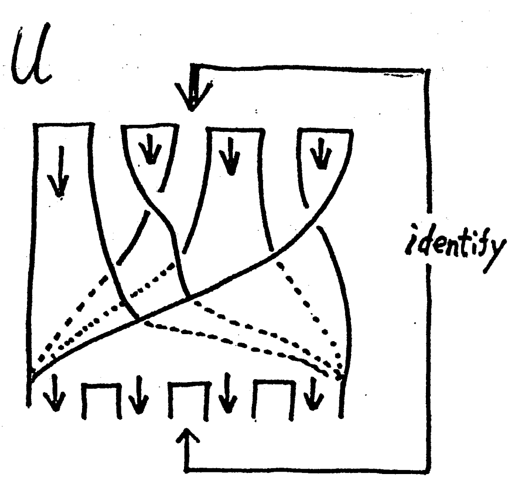

図 10

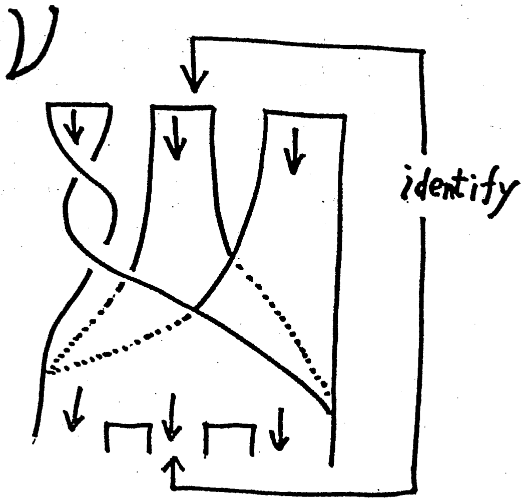

図 11

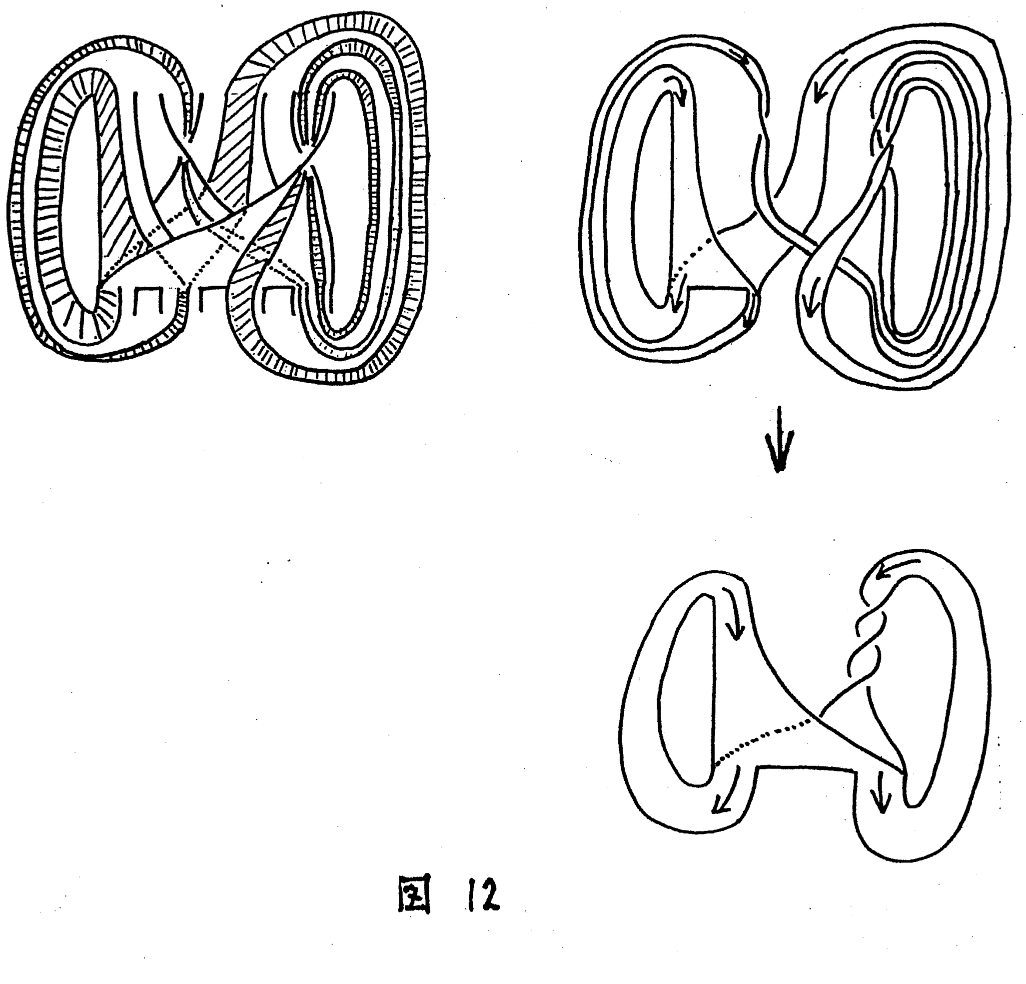

図 12

Proof of (1) $\mathcal{U}$ の subtemplate $\tilde{\mathcal{U}}$ を図 12 のようにとる。$\tilde{\mathcal{U}}$ の周期軌道の有限個の和集合か

ら定まる絡み目の集合と、$\mathcal{L}(0,-3)$ の周期軌道の有限個の和集合から定まる絡み目の集合が等しいことがわかる (図 12 参照) ので、Theorem 2.3.3.1 より $\widetilde{\mathcal{U}}$ は universal である. 従って $\mathcal{U}$ は universal である.

Proof of (2) $\mathcal{V}$ の subtemplate $\widetilde{\mathcal{V}}$ を図 13 のようにとる。$\widetilde{\mathcal{V}}$ の周期軌道の有限個の和集合から定まる絡み目の集合と、$\mathcal{L}(0,-6)$ の mirror image の template の周期軌道の有限個の和集合から定まる絡み目の集合が等しいことがわかる (図 13 参照)。よって Theorem 2.3.3.1 より $\widetilde{\mathcal{V}}$ は universal である. 従って $\mathcal{V}$ は universal である. □

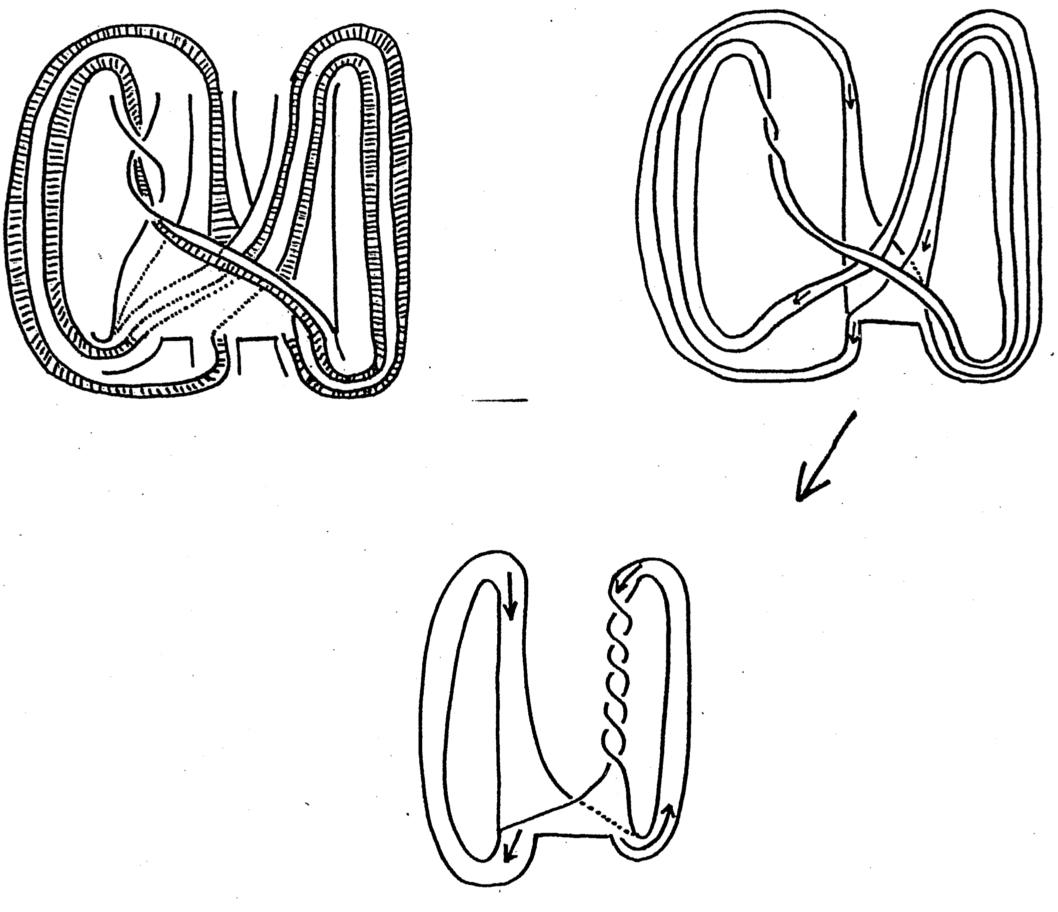

図 13

3 Proof of Theorem 1.3

$\phi : D^2 \to D^2$ を向きを保つ同相写像とする。$x \in D^2$ を ϕ の孤立不動点とする。B_x を x を中心とする円板で、x 以外の不動点を含まないものとする。$S_x = \partial B_x$ とおく。$i : S_x \to S^1$ を $y \mapsto (y - \phi(y))/\|y - \phi(y)\|$ で与える。i の degree を x の index という。

p を ϕ の双曲型不動点とし、$q \in W^s(p) \cap W^u(p) \setminus \{p\}$ とする. $W^s(p)$ (resp. $W^u(p)$) 内の p と q を結ぶ弧を $\ell^s_{(p,q)}$ (resp. $\ell^u_{(p,q)}$) とかく。ホモクリニック点 q が primary とは、$\ell^s_{(p,q)}$ と $\ell^u_{(p,q)}$ がなす閉曲線が 2 重点を持たないこととする。

Proof of Theorem 1.3 一般性を失うことなく、不動点 p の指数は負としてよい(不動点 p の指数が正ならば、$\phi^2(=\phi\circ\phi)$ を考えればよい).

W^u_+, W^u_- を $W^u(p)\setminus\{p\}$ の連結成分とする. U^s を p を含む $W^s(p)$ 内の十分小さい線分とし、U^s_+, U^s_- を $U^s\setminus\{p\}$ の連結線分をする. 横断的ホモクリニック点 $q\in W^s(p)\cap W^u(p)\setminus\{p\}$ をとる. 一般性を失うことなく、$q\in W^u_+\cap W^s$ としてよい. (従って $W^u_+\cap U^s\neq\emptyset$.) $q\in W^u_-\cap W^s(p)$ の場合も、同様に証明できる。

p から出る W^u_+ が U_s と初めて交わる点を q_0 とする。(従って q_0 はprimaryである.) 定理の仮定より、q_0 は横断的ホモクリニック点である. 一般性を失うことなく、$q_0\in W^u_+\cap U^s_+$ としてよい. $q_0\in W^u_+\cap U^s_-$ の場合も同様に証明できる。

D_{q_0} を $\ell^s_{(p,q_0)}$ と $\ell^u_{(p,q_0)}$ で囲まれる円板とする. そのとき、次の4つの場合(1),(2),(3),(4)が起こりうる(図 14 参照)。

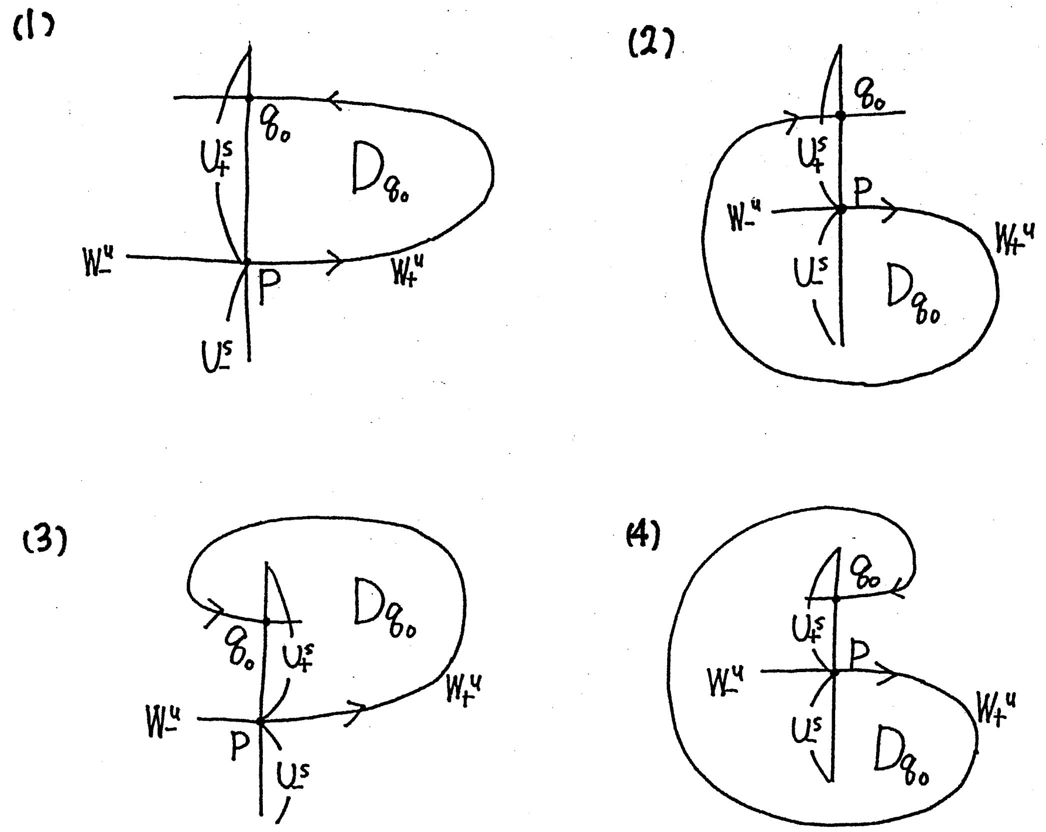

図 14

(1) W^u_+ は U^s_+ の右から q_0 と交わり、Int $D_{q_0}\cap U^s_-=\emptyset$ が成り立つ.
(2) W^u_+ は U^s_+ の左から q_0 と交わり、Int $D_{q_0}\cap U^s_-\neq\emptyset$ が成り立つ.
(3) W^u_+ は U^s_+ の左から q_0 と交わり、Int $D_{q_0}\cap U^s_-=\emptyset$ が成り立つ.
(4) W^u_+ は U^s_+ の右から q_0 と交わり、Int $D_{q_0}\cap U^s_-\neq\emptyset$ が成り立つ.

q_0 は横断的ホモクリニック点なので、次が成り立つ:

Claim 3.1 ([7; p288]) $\ell^s_{(p,q_0)}$ を含む十分小さな長方形と $N>0$ が存在し、次を満たす。
(i) R 内のϕ^N による極大不変集合 Λ (i.e. $\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbf{Z}} \phi^{Nn}(R)$) は双曲型集合である。
(ii) $\phi^N|_\Lambda$ は2つの記号$\{0,1\}$ に関する両側無限列空間$\sum = \{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ 上のシフト$\sigma : \sum \to \sum$ と位相共役である。

(1)の場合について考える。$\Phi = \phi^N$ とおく. 上の claim の証明により、R と R の Φ による像は図 15 のようになる.

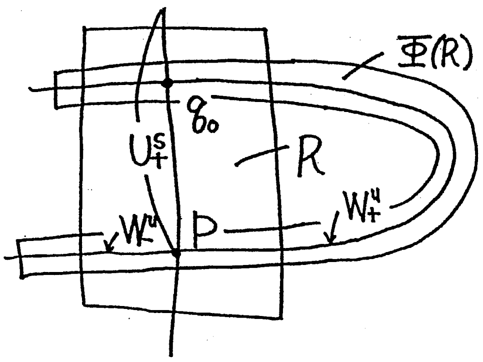

図 15

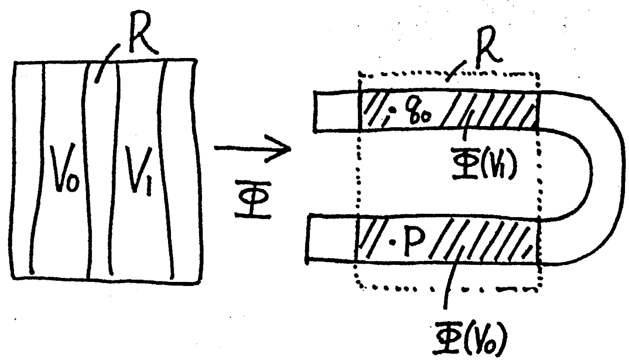

図 16

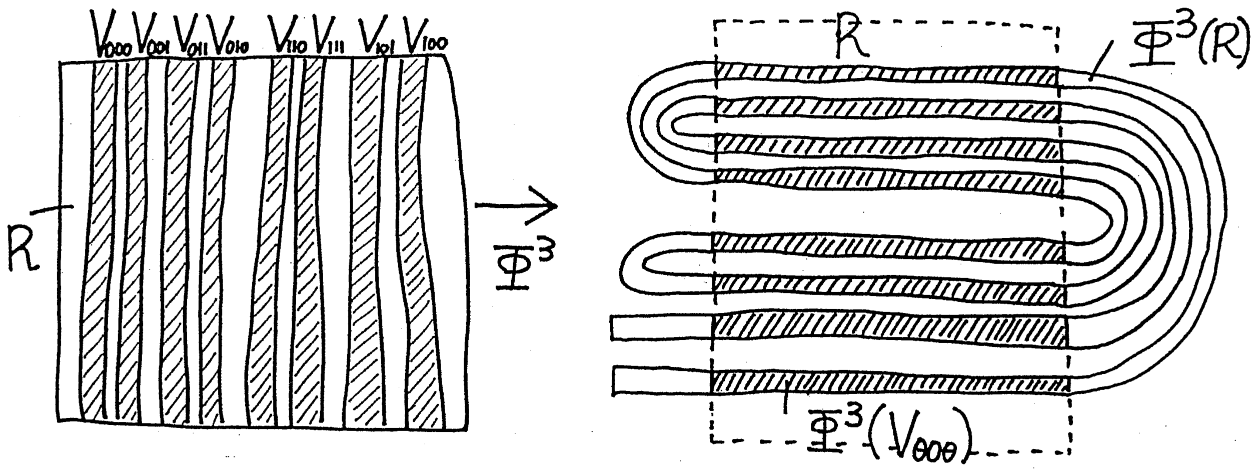

図 17

V_0 (resp. V_1) を $R \cap \Phi^{-1}(R)$ の連結成分で、$p \in \Phi(V_0)$ (resp. $q_0 \in \Phi(V_1)$) を満たすもの

とする (図 16 参照). $V_{a_0a_1} = \Phi^{-1}(V_{a_1}) \cap V_{a_0}$, $V_{a_0a_1a_2} = \Phi^{-1}(V_{a_1a_2}) \cap V_{a_0}$ $(a_i \in \{0,1\})$ とおく (図 17 参照)。

D^2 上の恒等写像 id_{D^2} と Φ^3 を結ぶアイソトピー $\{\tilde{\Phi}_t\} = \{\tilde{\Phi}_t\}_{0\le t\le 1}$ $(\tilde{\Phi}_0 = id_{D^2}, \tilde{\Phi}_1 = \Phi^3)$ として、R の $\tilde{\Phi}_t$ による像が、図 18 のようになるものをとる。

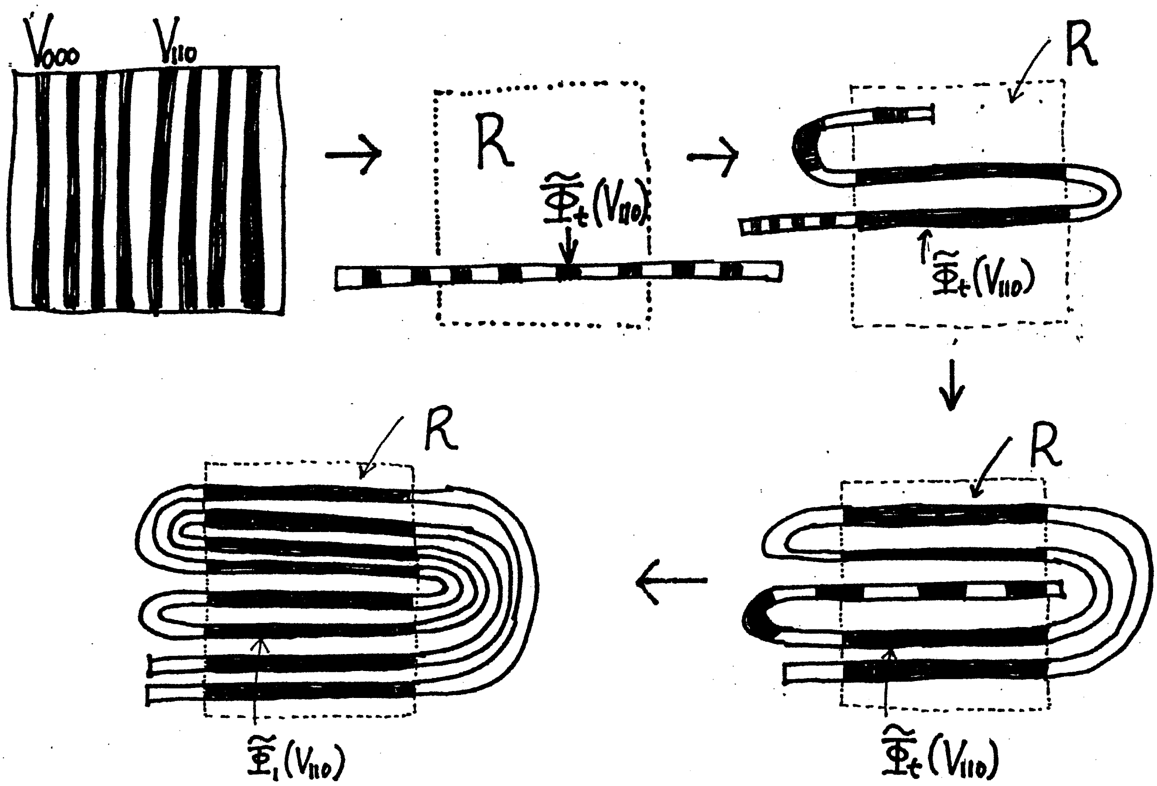

図 18

$v_{a_0a_1a_2}$ を $V_{a_0a_1a_2}$ の下辺とする. $v_{a_0a_1a_2}$ の $\tilde{\Phi}_t$ による像を考える. 双曲型集合Λの要素の安定多様体にそって、$\tilde{\Phi}_1(v_{a_0a_1a_2}) \times \{1\}$ を $r \times \{1\}$ へ潰し、$v_{a_0a_1a_2} \times \{0\}$ と $v_{a_0a_1a_2} \times \{1\}$ を同一視することによって、template $\mathcal{U}_{\Phi^3}$ (図 19 参照) が定まる. Claim 2.3.2.1 と同様に次が成り立つ:

Claim 3.2 Λ に含まれる Φ^3 の周期軌道の任意の有限個の和集合 P に対して、$h_0(\mathcal{S}_{\{\tilde{\Phi}_t\}}P)$ が定める絡み目の集合と、$\mathcal{U}_{\Phi^3}$ の周期軌道の有限個の和集合が定める絡み目の集合は等しい。

Claim 3.2 と Lemma 2.2.4 により定理を証明するためには template $\mathcal{U}_{\Phi^3}$ が universal であることを示せば十分である. $\mathcal{U}_{\Phi^3}$ の subtemplate $\tilde{\mathcal{U}}_{\Phi^3}$ を図 20 の様にとる。$\tilde{\mathcal{U}}_{\Phi^3}$ の周期軌道の有限個の和集合が定める絡み目の集合と、Lemma 2.3.3.2 の (1) における $\mathcal{U}$ の周期軌道の有限個の和集合が定める絡み目の集合が等しいことがわかるので、Lemma 2.3.3.2 の (1) より $\tilde{\mathcal{U}}_{\Phi^3}$ は universal である. 従って $\mathcal{U}_{\Phi^3}$ は universal である. これより、定理の主張が成り立つ。

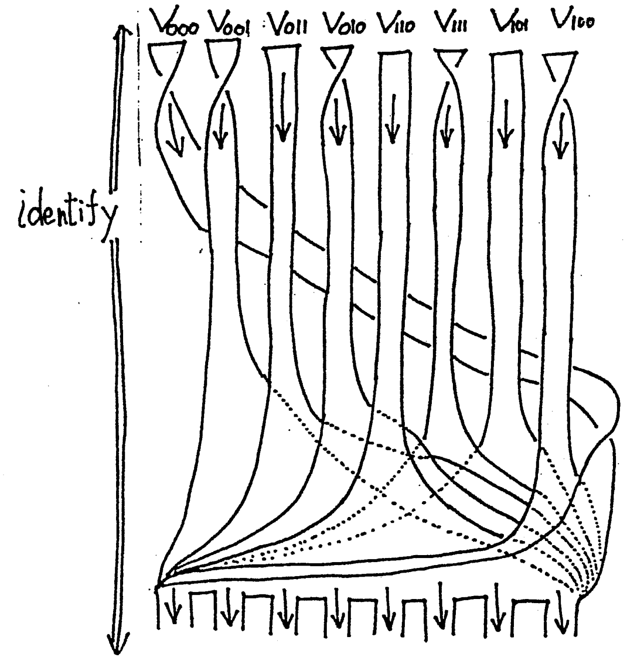

図 19

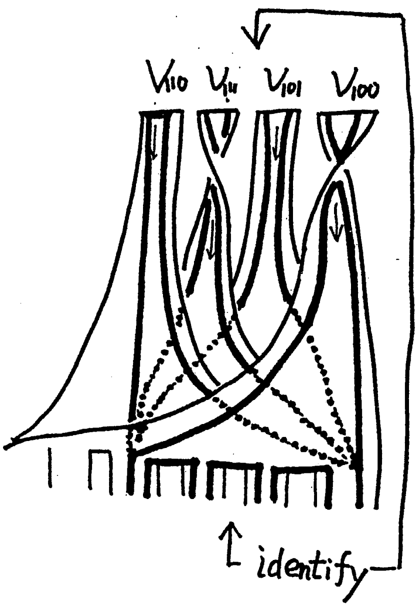

図 20

(2) の場合について考える. $\Psi = \phi^N$ とおく. Claim 3.1 の証明により、Rと RのΨによる像は図 21 のようになる.

W_0 (resp. W_1) を $R \cap \Psi^{-1}(R)$ の成分で $p \in \Psi(W_0)$ (resp. $q_0 \in \Psi(W_1)$) を満たすものとする (図 22 参照). $W_{a_0a_1} = \Psi^{-1}(W_{a_1}) \cap W_{a_0}$ $(a_i \in \{0,1\})$ とする (図 23 参照)。

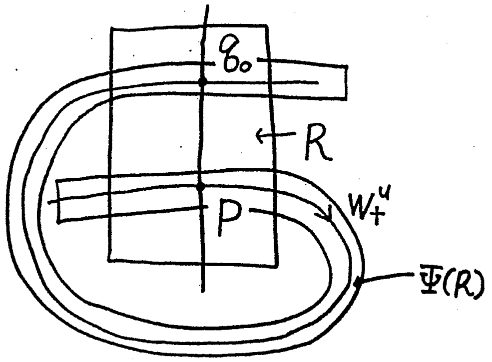

図 21

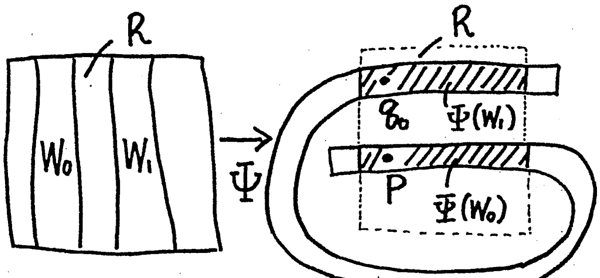

図 22

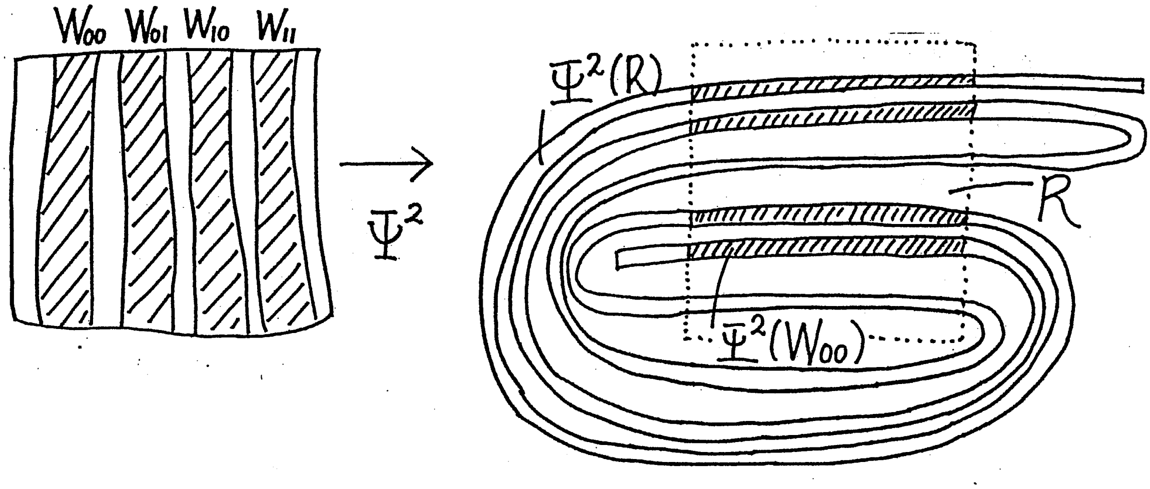

図 23

D^2 上の恒等写像 id_{D^2} と Ψ^2 を結ぶアイソトピー $\{\tilde{\Psi}_t\} = \{\tilde{\Psi}_t\}_{0\leq t\leq 1}$ $(\tilde{\Psi}_0 = id_{D^2}, \tilde{\Psi}_1 = \Psi^2)$ として、R の $\tilde{\Psi}_t$ による像が、図 24 になるものをとる。

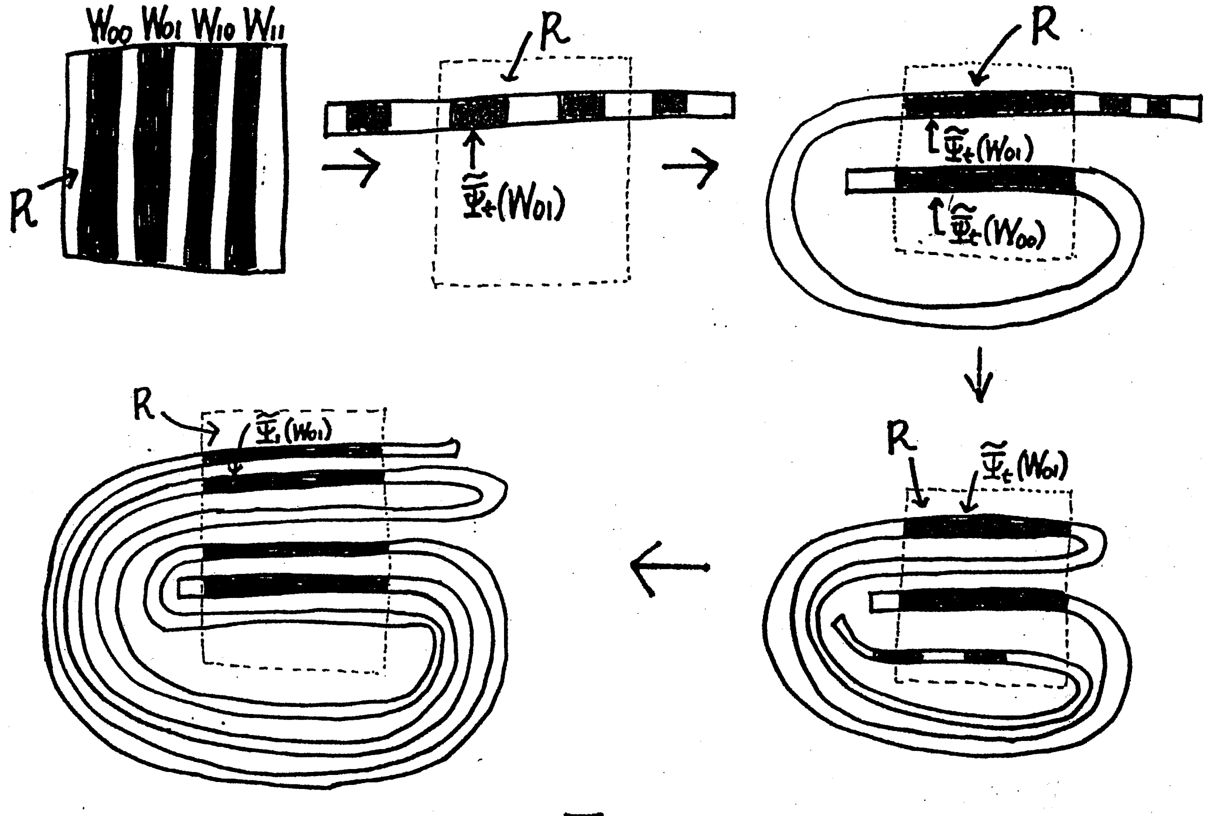

図 24

$w_{a_0a_1}$ を $W_{a_0a_1}$ の底辺とする. $w_{a_0a_1}$ の $\widetilde{\Psi}_t$ による像を考える. 双曲型集合Λの要素の安定多様体にそって$\widetilde{\Psi}_1(w_{a_0a_1})$ を $r \times \{1\}$ へ潰し、$w_{a_0a_1} \times \{0\}$ と $w_{a_0a_1} \times \{1\}$ を同一視することによって template $\mathcal{V}_{\Psi^2}$ (図 25 参照)が定まる.

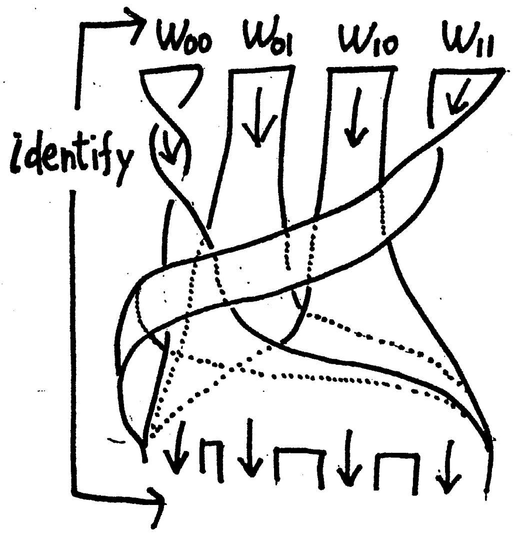

図 25

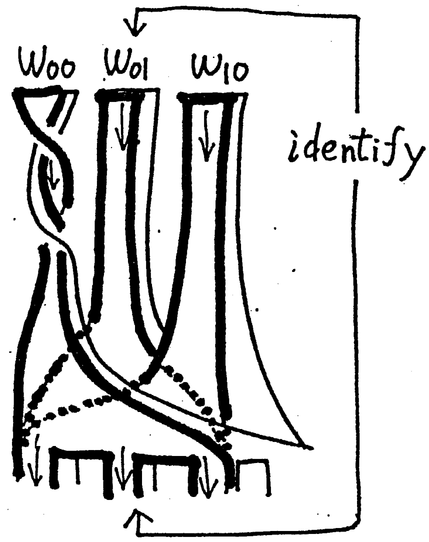

図 26

Claim 2.3.2.1 と同様に、次が成り立つ:

Claim 3.3 Λ に含まれる Ψ^2 の周期軌道の任意の有限個の和集合P に対して、$h_0(\mathcal{S}_{\{\widetilde{\Psi}_t\}}P)$ が定める絡み目の集合と$\mathcal{V}_{\Psi^2}$の周期軌道の有限個の和集合が定める絡み目の集合は等しい。

Claim 3.3 と Lemma 2.2.4 により、定理を証明するためには template $\mathcal{V}_{\Psi^2}$ が universal であることを示せば十分である. $\mathcal{V}_{\Psi^2}$ の subtemplate $\widetilde{\mathcal{V}}_{\Psi^2}$ を次の様にとる (図 26 参照)。$\widetilde{\mathcal{V}}_{\Psi^2}$ の周期軌道が定める絡み目の集合と、Lemma 2.3.3.2 の (2) における $\mathcal{V}$ の周期軌道が定める絡み目の集合が等しいことがわかるので、Lemma 2.3.3.2 より、$\widetilde{\mathcal{V}}_{\Psi^2}$ は universal である. 従って、 $\mathcal{V}_{\Psi^2}$ は universal である. これより、定理の主張が成り立つ。

Claim 3.4 (i) (3) の場合、ある primary かつ 横断的ホモクリニック点 $q_1 \in W^u_+ \cap U^s_+$ で、W^u_+ は U^s_+ の右から q_1 と交わり、Int $D_{q_1} \cap U^s_- = \emptyset$ となるものが存在する。
(ii) (4) の場合、ある primary かつ 横断的ホモクリニック点 $q_1 \in W^u_+ \cap U^s_+$ で、W^u_+ は U^s_+ の左から q_1 と交わり、Int $D_{q_1} \cap U^s_- \neq \emptyset$ となるものが存在する.

Proof of Claim 3.4 (i) について示す。ϕ は向きを保存するので、W^u_+ は U^s_+ の左から $\phi(q_0)$ と交わる. 従って、$W^u_+ \cap \mathrm{Int}(\ell^s_{(p,q_0)} \setminus \ell^s_{(p,\phi(q_0))}) \neq \emptyset$. q_0 から出る W^u_+ が Int $(\ell^s_{(p,q_0)} \setminus \ell^s_{(p,\phi(q_0))})$ と初めて交わる点を q_1 とする。仮定より、q_1 は横断的ホモクリニック点である。q_0 が

primary であることと q_1 の選び方より、q_1 は primary である。さらに W_+^u は U_+^s の右から q_1 と交わり、$\mathrm{Int}\ D_{q_1} \cap U_-^s = \emptyset$ が成立する. よって (i) が成立する。同様の議論を用いて、(ii) を示すことができる。

Claim 3.4 により、(3),(4) の場合はそれぞれ (1),(2) の場合に帰着できる。よって、定理の主張が成り立つ。□

参考文献

[1] J. S. Birman: Braids, Links, and Mapping Class Groups, Ann. Math. Studies 82, Princeton Univ. Press, Princeton, 1974.

[2] J. Birman and R. F. Williams: Knotted priodic oribits in dynamical systems-II: Knot holders for fibered knots Cont. Math. 20 (1) 1-60.

[3] J. M. Gambaudo, S. van Strien and C.Tresser: The periodic orbits structure of orientation preserving diffeomorphisms on D^2 with topological entropy zero, Ann.Inst. H. Poincare Phys. Theor. 50 (1989), 335-356.

[4] Robert W. Ghrist, Philip J.Holmes, and Michael C.Sullivan, Knots and Links in Three-Dimensional Flows: Lect. Notes in Math. 1654, Springer-Verlag.

[5] Robert W. Ghrist: Branched two-manifolds supporting all links, Topology 36 (2)(1997), 423-448.

[6] T. Hall: Periodicity in chaos: the dynamics of surface automorphisms. Thesis, Cambridge, 1991.

[7] C. Robinson: Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos (second edition). CRC Press, Ann Arbor, MI, 1995.