数理解析研究所講究録
1118 巻 1999 年 84-95

transition matrix とその余次元 2 以上の connection に対する一般化

京都大学大学院理学研究科　国府寛司 (Hiroshi Kokubu)
龍谷大学理工学部数理情報学科　岡 宏枝 (Hiroe Oka)

1 はじめに

Conley 指数の理論の中で，transition matrix は力学系のパラメータの変動に伴う孤立不変集合の Morse 分解の構造の変化を捉えるものである．例えば図 1 においてパラメータ λ

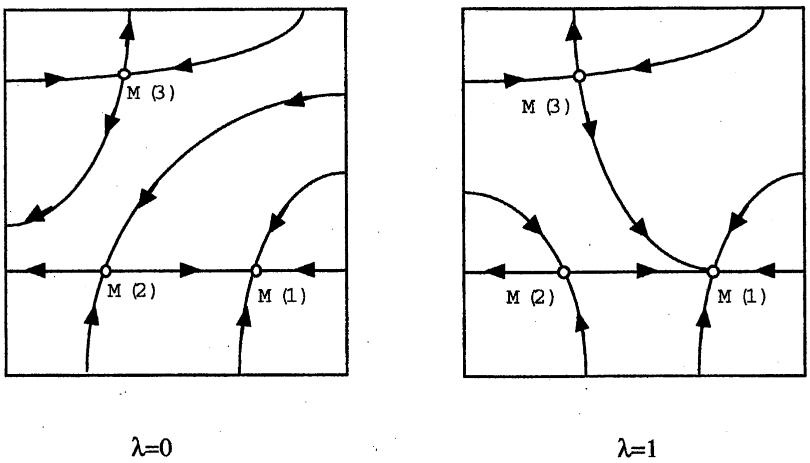

図 1: Change of connecting orbits.

が 0 から 1 まで変化する時に，その間のあるパラメータ値 λ_* で $M(3)$ から $M(2)$ への構造不安定な（余次元 1 の） connecting orbit が存在するであろうと考えられる．この場合の transition matrix は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられる上三角行列であり，その $(2,3)$-非対角成分

が 0 でないことが，あるパラメータ値 $\lambda_* \in (0,1)$ での $M(3)$ から $M(2)$ への connecting orbit の存在を導く．

transition matrix のアイディアはもともと Conley によるが，正確な定式化は Reineck[9] によって初めて与えられた．それ以後，様々な新しい定式化や一般化が以下に述べるようないくつかの仕事においてなされている．

本論文では，第 2 節で基本的な定義を確認した後，第 3 節でまずこれらの先行するいくつかの定式化を比較検討し，それに基づいて第 4 節で transition matrix の新しい公理的な定義を与える．これによりこれまでの定式化が統合され， transition matrix がより扱い易いものになったと考えている．またこの公理的な定式化は 2 個以上のパラメータを含む族においてみられる余次元が高い connecting orbit の存在を扱える形に一般化することもできる．第 5 節では，このような transition matrix の一般化について述べる．

2 準備

この節では Conley 指数理論における基本的な定義を簡潔に述べる．詳しくは Conley[1], Salamon[10], Mischaikow[8] やそこに挙げられた文献を参照されたい．

局所コンパクト距離空間 X 上の位相的な流れ $\varphi : X \times \mathbb{R} \to X$ が与えられた時，その**孤立不変集合**とは X のコンパクト部分集合であってそのコンパクト近傍内で極大な不変集合であり，かつそのコンパクト近傍の内点に含まれるものをいう．またそのコンパクト近傍を孤立不変集合の**孤立近傍**と呼ぶ．孤立不変集合 S の孤立近傍 N に対し，その**出口 (exit set)** L とは N の閉部分集合で以下の 3 つの条件をみたすものをいう：(1) L は N の中で正方向に不変である，すなわち $x \in L$ かつ $\varphi(x,[0,t]) \in N$ ならば $\varphi(x,t) \in L$ である；(2) $\overline{N \setminus L}$ は S の孤立近傍である；(3) N から外に出る軌道は必ず L を通る．このとき対 (N,L) を **index pair** という．実は孤立不変集合 S は必ず index pair (N,L) を持ち，またそれに対する商空間 N/L のホモトピー型は index pair のとり方によらず，孤立不変集合 S のみに依存することが知られている．そこでそのホモトピー型 $[N/L]$ を $h(S)$ と書き，孤立不変集合 S の **Conley 指数**（正確にはホモトピー Conley 指数）と呼ぶ．同様にホモロジー群 $H_*(N/L,[L])$ を $CH_*(S)$ と書き，**ホモロジー Conley 指数**と呼ぶ．Conley 指数は力学系の位相不変量であり，従って位相的に異なる力学系を区別するために用いることができる．

Morse 分解は孤立不変集合のより精密な構造を捉えるために導入されたものである．それは Morse 成分 (Morse component) と呼ばれる互いに交わらない有限個の S の孤立不変部分集合 $M(p)$ から成り，それらは有限な半順序集合 $(P,<)$ によって次の条件をみたすように番号付けられている：$\cup_{p\in P} M(p)$ に含まれない任意の軌道 γ に対し $p<q$ なる $p,q \in P$ が存在して $\alpha(\gamma) \subset M(q)$ および $\omega(\gamma) \subset M(p)$ が成り立つ．このような軌道を $M(q)$ から $M(p)$ への connecting orbit といい，その全体を $C(p,q)$ と書く．従って孤立不変集合 S の Morse 分解 $\mathcal{M}(S) = \{M(p) \mid p \in (P,<)\}$ が与えられれば，

$$S = \left[\bigcup_{p\in P} M(p)\right] \cup \left[\bigcup_{p<q} C(p,q)\right]$$

となっている．定義より $\mathcal{M}_<(S) = \{M(p) \mid p \in (P,<)\}$ が S の Morse 分解ならば，$<$ の任意の拡張 $<'$ に対し $\mathcal{M}_{<'}(S) = \{M(p) \mid p \in (P,<')\}$ もまた S の Morse 分解である．S の互いに素な有限個の孤立不変部分集合 $M(p)$ $(p \in P)$ に対し，それを Morse 分解とする P 上の最小の半順序を**流れによって定まる半順序** (flow-defined order) といい $<^F$ と表す．

Franzosa[2] が導入した connection matrix は Morse 分解においてどの Morse 成分同士の間に connecting orbit が存在するかを判定するのに大変便利である．Morse 分解 $\mathcal{M}_<(S) = \{M(p) \mid p \in (P,<)\}$ に対し，その **connection matrix** Δ は $\oplus_{p\in P}CH_*(M(p))$ からそれ自身への次数 -1 の次数付き加群の準同型写像であり，以下をみたす：

(1) Δ は真に上三角である，すなわち $\Delta(p,q) \neq 0$ ならば $p<q$ が成り立つ；

(2) $\Delta^2 = O$；

(3) $\mathrm{Ker}\Delta/\mathrm{Im}\Delta$ は $CH_*(S)$ と同型となる．

一般に任意の Morse 分解に対して connection matrix は必ず存在するが，それは必ずしも一意には決まらない．詳しくは Franzosa[2] を見られたい．

もし流れによって定まる半順序 $<^F$ に関する Morse 分解 $\mathcal{M}_{<^F}(S)$ から決まる connection matrix の (p,q)-成分 $\Delta(p,q)$ が 0 でないならば，それは $p <^F q$ すなわち $p=p_1$，$q=p_k$ をみたすある p_i $(i=1,\ldots,k)$ が存在して $C(p_i,p_{i+1}) \neq \emptyset$ $(i=1,\ldots,k-1)$ となることを意味する．もし半順序 $<$ が流れによって定まるものでなければ，Morse 分解 $\mathcal{M}_<(S)$ に対するすべての connection matrix の (p,q)-成分が 0 でない時には同じ結論が成り立つ．なぜならば $<$ が $<'$ の拡張である時 $\mathcal{M}_<(S)$ に対する connection matrix 全体の集合には $\mathcal{M}_{<'}(S)$ に対するそれがすべて含まれるから，特に流れによって定まる半順序に対する connection matrix も含まれていなければならないからである．connection matrix は多くの場合その代数的な条件を用いて計算されるので，いくつかの成分が connection matrix のとり方によらず 0 でないということを確かめるのはさほど困難ではない．

応用上は単独の流れでなく，パラメータ λ に依存する流れの族 φ_λ を考え，パラメータ空間 Λ 内を λ が動く時の力学系の構造の変化を調べることが多い．このようなパラメータ族に対して Conley 指数やそれに関連する概念を考えるためには，パラメータ空間と相空間の直積空間上に $\Phi(x,\lambda,t) = (\varphi_\lambda(x,t),\lambda)$ として自然に定義される parametrized flow $\Phi : X \times \Lambda \times \mathbb{R} \to X \times \Lambda$ を考えるのが都合が良い．この状況で各 λ に対する流れ φ_λ の孤立不変集合の族 $\{S_\lambda\}$ がパラメータ空間 Λ **上に連続する**とは $S_\Lambda = \cup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \times \{\lambda\}$ が parametrized flow Φ の孤立不変集合であることをいう．このときには **continuation isomorphism** と呼ばれる $CH_*(S_\lambda)$ と $CH_*(S_\Lambda)$ の間の自然な同型が，index pair の間の包含写像 $(N_\lambda, L_\lambda) \subset (N_\Lambda, L_\Lambda)$ から誘導される．同様にして Morse 分解 $\mathcal{M}(S_\lambda)$ の連続性についても次のように定式化される：各パラメータ λ 毎に与えられた Morse 分解 $\mathcal{M}_{<_\lambda}(S_\lambda)$ がパラメータ空間 Λ 上連続するとは $M_\Lambda(p) = \cup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda(p) \times \{\lambda\}$ $(p \in P)$ が parametrized flow Φ のある半順序

$<_\Lambda$ に関する Morse 分解となっていることをいう．このとき明らかに $<_\Lambda$ は $<_\lambda$ の拡張となっている．特に $<_\lambda$ が各 λ での流れによって定まる半順序のとき，$\{M_\Lambda(p) \mid p \in P\}$ が Φ の Morse 分解となる最小の半順序を Λ 全体の上で流れによって定まる半順序といい $<_\Lambda^F$ と表す．

3 transition matrix のいくつかの定式化

与えられた Morse 分解に対する connecting orbit の存在を検出する connection matrix に対し，transition matrix は流れの 1 パラメータ族における connecting orbit の変化，すなわち connecting orbit の余次元 1 の変化についての代数的な情報を与える．transition matrix にはこれまで Reineck[9] の singular transition matrix，McCord-Mischaikow[5] による topological transition matrix，Franzosa-Mischaikow[3] の algebraic transition matrix という 3 つの異なる定式化が与えられている．

3.1 singular transition matrix

Λ を線分 $[0,1]$，相空間 X を多様体として singular transition matrix は直積空間 $X \times \Lambda$ 上の常微分方程式 $\dot{x} = f(x,\lambda)$，$\dot{\lambda} = g(\lambda)$ で与えられる流れの connection matrix から定義される．ここで $g(\lambda)$ は $g(0) = g(1) = 0$ および $\lambda \in (0,1)$ において $-1 \ll g(\lambda) < 0$ をみたす関数である．例えば 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $g(\lambda) = \varepsilon\lambda(1-\lambda)$ と取ることが多い．このようにして導入されるパラメータ空間上の人工的なダイナミクスは artificial parameter slow drift と呼ばれる．この直積空間上の拡大された流れは $\lambda = 0, 1$ における相空間 X 上の Morse 分解から決まる自然な Morse 分解 $\{(M_i(p), i) \mid i = 0, 1\}$ を持つ．ここで半順序は元の P 上の半順序および任意の $p, q \in P$ に対し $(p,0) < (q,1)$ をみたすものとして与えられる．このことから対応する connection matrix $\tilde{\Delta}$ は

$$\tilde{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta_0 & T \\ O & \Delta_1 \end{pmatrix}$$

なるブロック上三角行列として与えられる．ここで Δ_i $(i = 0,1)$ は $\lambda = i = 0, 1$ における connection matrix である．connection matrix $\tilde{\Delta}$ の代数的性質から行列 T は次数 0 の同型写像

$$T : \bigoplus_{p \in P} CH_*(M_1(p)) \to \bigoplus_{p \in P} CH_*(M_0(p))$$

であり，上三角でしかも

$$\Delta_0 T + T \Delta_1 = O$$

をみたす．この最後の性質は $\tilde{\Delta}^2 = 0$ から直ちに従う．この T を **singular transition matrix** と呼ぶ．半順序 $<$ が Λ 上の流れによって定まる半順序の時，$T(p,q) \neq 0$ ならば $\{\lambda_i\}_{i=1,\ldots,k}$ と $p = p_1$，$q = p_{k+1}$ なる $\{p_i\}_{i=1,\ldots,k+1}$ が存在して，各 $i = 1, \ldots, k$ について $\lambda = \lambda_i$ の時 $C(p_i, p_{i+1}) \neq \emptyset$ となる．さらに，parameter slow drift が単調であることから

パラメータ列 $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,k}$ は単調減少に選べる．もし半順序 $<$ が流れによって定まる半順序の拡張であるならば，すべての可能な transition matrix についてその (p,q)-成分が 0 でない場合に同じ結論が得られる．

このように定式化された transition matrix は様々な分岐問題にうまく適用されているが，transition matrix が parameter slow drift の選び方にどのように依存するかわからないという難点を持っている．特に transition matrix の推移性の問題，すなわち $\lambda=0$ から $\lambda=1$ への transition matrix と $\lambda=1$ から $\lambda=2$ への transition matrix を合成したものは $\lambda=0$ から $\lambda=2$ への transition matrix になるか，ということがこのままでは全くわからない．singular transition matrix を parameter slow drift にできるだけ依存しないようにするために，McCord-Mischaikow[6] は可能なすべての parameter slow drift による拡大された流れの全体を考え，そのパラメータ上の流れが sup ノルムで 0 に近付く時の connection matrix のあらゆる極限点全体としてより正確な定義を与えた．この定義に基づいて [6] ではさらに singular transition matrix と次に説明する topological transition matrix の両方が定義される時にはそれらは本質的に同じものであるということも証明した．このことから直ちにその場合には topological transition matrix の推移性が singular transition matrix にも成り立つことがわかる．[4] ではこの同値性がある種のゆっくり変化するハミルトン系における無限個の connecting orbit の存在を示すために用いられている．

3.2 topological transition matrix

topological transition matrix は McCord-Mischaikow[5] において artificial parameter slow drift に依存しない形で transition matrix が与えられるように導入された．そのために [5] ではパラメータ空間 $\Lambda=[0,1]$ の端点で Morse 分解に connecting orbit がなく，従って $S_i=\sqcup_{p\in P}M_i(p)$ となることを仮定する．この時には $\lambda=i=0,1$ で $\Psi_i: CH_*(S_i)\to\oplus_{p\in P}CH_*(M_i(p))$ なる同型が存在する．一方，これらの不変集合に対して 2 つの continuation isomorphism

$$(F_{01}(S))_*: CH_*(S_1)\to CH_*(S_0)$$

と

$$\bigoplus_{p\in P}(F_{01}(p))_*: \bigoplus_{p\in P} CH_*(M_1(p))\to\bigoplus_{p\in P} CH_*(M_0(p))$$

が定まる．これらによって得られる図式

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{p\in\mathcal{P}} CH_*(M_0(p)) & \overset{\bigoplus_{p\in\mathcal{P}}(F_{01})_*(p)}{\longrightarrow} & \bigoplus_{p\in\mathcal{P}} CH_*(M_1(p)) \\
(\Psi_0)_*\uparrow & & (\Psi_1)_*\uparrow \\
CH_*(S_0) & \overset{(F_{01})_*(S)}{\longrightarrow} & CH_*(S_1)
\end{array}$$

は一般に可換でなく，その非可換性が connecting orbit の変化の情報を与えるというのが topological transition matrix の基本的なアイディアである．すなわち **topological tran-**

sition matrix は local continuation isomorphism $\oplus_{p\in P}(F_{01}(p))_*$ を恒等写像にするような基底を選んだ時の行列

$$T_{\rm top}=(\Psi_1)_*\circ(F_{01}(S))_*\circ(\Psi_0)_*^{-1}$$

として与えられる．これは本質的に continuation isomorphism から決まるものなので，そのことから直ちに topological transition matrix は推移性をもつことがわかる．また $T_{\rm top}$ は可逆な上三角行列であり，$\lambda=0,1$ では connecting orbit はないと仮定しているので $\Delta_0=\Delta_1=0$ であることから関係式 $\Delta_0T+T\Delta_1=0$ は自明に成り立つこともわかる．さらに singular transition matrix と同様に，もし $T_{\rm top}$ の非対角成分が 0 でなければ，それはパラメータが 0 から 1 まで変化する間に対応する Morse component をつなぐ connecting orbit の列が存在することが示されている．

3.3 algebraic transition matrix

明らかに topological transition matrix の最も大きな欠点は，パラメータ区間の境界で connecting orbit がないという仮定の下でしか定義されないことである．この欠点を克服するために Franzosa-Mischaikow[3] は transition matrix を純粋に代数的に構成しようと試みた．これを **algebraic transition matrix** と呼ぶ．[3] では Morse 分解の半順序にある条件を課すことにより次数 0 の上三角可逆行列であってパラメータ区間の境界における connection matrix の間の相似変換として algebraic transition matrix を定式化している．この相似変換であるという条件は singular transition matrix の持つ性質の一つである $\Delta_0T+T\Delta_1=0$ に対応するものである．ここでは algebraic transition matrix の構成の詳細には立ち入らないが，後で述べるように [3] の定義には transition matrix のみたすべき重要な条件が欠落しており，そのために例えば topological transition matrix が定義されるような状況において，任意の次数 0 の上三角可逆行列が algebraic transition matrix の定義の条件をみたすということになってしまっている．

4 transition matrix の公理的定義

前節でみたように，これまでに導入された 3 通りの transition matrix の定式化にはいずれも何らかの問題点を抱えており完全に満足できるものであるとはいえない．ここではこれらの問題を解消し，従来の定式化を統合することを目指して transition matrix の公理的な定義を与える．

α を弧状連結なパラメータ空間 Λ 内の λ_0 と λ_1 を結ぶ道とする．各 $\lambda\in\alpha$ における孤立不変集合 S_λ は Morse 分解 $\mathcal{M}(S_\lambda)$ を持ち，かつそれらは適当な半順序 $<$ に関して α 上連続するとする．Δ_i $(i=0,1)$ を α の端点 $\lambda=i=0,1$ における connection matrix とし，また $\mathcal{C}\Delta_i=\oplus_{p\in P}CH_*(M_i(p))$ をそれを境界準同型とする鎖複体とする．

定義 4.1 この状況の下で，transition matrix とは次数 0 の鎖準同型写像 $T:\mathcal{C}\Delta_1\to\mathcal{C}\Delta_0$,

すなわち

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & (\mathcal{C}\Delta_0)_{n+1} & \longrightarrow & (\mathcal{C}\Delta_0)_n & \longrightarrow & (\mathcal{C}\Delta_0)_{n-1} & \longrightarrow \\
& T_{n+1}\uparrow & & T_n\uparrow & & T_{n-1}\uparrow & \\
\longrightarrow & (\mathcal{C}\Delta_1)_{n+1} & \longrightarrow & (\mathcal{C}\Delta_1)_n & \longrightarrow & (\mathcal{C}\Delta_1)_{n-1} & \longrightarrow
\end{array}$$

であって

(1) T は半順序 $<$ に関して上三角である；

(2) T が誘導するホモロジー準同型写像 $T_*: H_*(\mathcal{C}\Delta_1) \cong CH_*(S_1) \to H_*(\mathcal{C}\Delta_0) \cong CH_*(S_0)$ が global continuation isomorphism と一致する

ものをいう．このような鎖準同型写像全体の集合を $\mathcal{T}_\alpha(\Delta_0, \Delta_1)$ と書き，またそれを $\partial\alpha$ での可能なすべての connection matrix 全体について和集合をとったものを $\mathcal{T}_\alpha(\lambda_0, \lambda_1)$ と書き表す．

この定義による transition matrix は実際に存在する，すなわち次が成り立つ：

定理 4.2 集合 $\mathcal{T}_\alpha(\lambda_0, \lambda_1)$ は空でない．

われわれの transition matrix の定義は [3] の algebraic transition matrix と良く似ているが，次の 2 点において重要な違いがある：まず algebraic transition matrix ではわれわれの定義にある global continuation isomorphism との関係が明確に述べられていない．（ただし [3] における algebraic transition matrix の存在証明を良く見ればそれが実際に使われていることがわかる．）この条件のおかげでわれわれの transition matrix は topological transition matrix が定義できる状況ではそれと完全に一致することがわかり，われわれの transition matrix が $\partial\alpha$ において connecting orbit が存在する状況での topological transition matrix の適切な拡張であると言える．第 2 の重要な違いは singular transition matrix の $\Delta_0 T + T\Delta_1 = 0$ を T が鎖準同型であるための条件と見ることにより，ホモロジー代数の諸概念を有効に利用できるようになったことである．このことは次節において transition matrix を余次元が 2 以上の connecting orbit を検出できるように拡張する際に大変役に立つ．

transition matrix のこのような定式化がひとたび与えられれば，上の存在定理の証明はさほど困難ではない．われわれは [6] で与えられた singular transition matrix の精密な定義，特にそのように定義された singular transition matrix がいわゆる drift partial order に関して上三角になるという事実を用いる．流れによって定まる半順序はこの drift partial order の拡張になっており，従って singular transition matrix は流れによって定まる半順序についても上三角になっている．残りの性質も比較的簡単な議論によって確かめることができる．

5 余次元 2 以上の connection に対する transition matrix の一般化

transition matrix を connection matrix の定める鎖複体の鎖準同型と考えるアイディアはより余次元の高い connecting orbit に対する類似の問題にも自然に拡張される．このことを余次元 2 の connecting orbit の場合について見てみる．

パラメータ空間 Λ は弧状連結かつ単連結とし，その中の 2 点 λ_0, λ_1 を結ぶ 2 つの道 α, α' でそれらが 2-disk D を張るものを考える．道の端点 λ_0, λ_1 における connection matrix Δ_0, Δ_1 と道 α, α' に対し transition matrix $T \in \mathcal{T}_\alpha(\Delta_0, \Delta_1)$ および $T' \in \mathcal{T}_{\alpha'}(\Delta_0, \Delta_1)$ が与えられているとする．鎖準同型 $T : \mathcal{C}\Delta_1 \to \mathcal{C}\Delta_0$ に対し新しい鎖複体

$$\mathcal{C}T = ((\mathcal{C}\Delta_0)_* \oplus (\mathcal{C}\Delta_1)_{*-1}, \Delta_T)$$

を，その境界準同型が

$$(\Delta_T)_n = \begin{pmatrix} -(\Delta_0)_n & T_{n-1} \\ O & (\Delta_1)_{n-1} \end{pmatrix} : (\mathcal{C}\Delta_0)_n \oplus (\mathcal{C}\Delta_1)_{n-1} \to (\mathcal{C}\Delta_0)_{n-1} \oplus (\mathcal{C}\Delta_1)_{n-2}$$

で与えられるものとする．これを鎖準同型 $T : \mathcal{C}\Delta_1 \to \mathcal{C}\Delta_0$ の写像錐という．簡単な計算によりこれは確かに鎖複体になり，しかもそのホモロジー群 $H_*(\mathcal{C}T)$ は $S_\alpha = \cup_{\lambda\in\alpha} S_\lambda$ のホモロジー Conley 指数 $CH_{*+1}(S_\alpha)$ に他ならないことがわかる．T' についても同様にして鎖複体

$$\mathcal{C}T' = ((\mathcal{C}\Delta_0)_* \oplus (\mathcal{C}\Delta_1)_{*-1}, \Delta_{T'})$$

が定義される．今，$A : \mathcal{C}\Delta_1 \to \mathcal{C}\Delta_0$ を次数 +1 の次数付き加群の準同型写像で 2 つの鎖準同型 T, T' の鎖ホモトピー，すなわち図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & (\mathcal{C}\Delta_0)_{n+1} & \xrightarrow{(\Delta_0)_{n+1}} & (\mathcal{C}\Delta_0)_n & \xrightarrow{(\Delta_0)_n} & (\mathcal{C}\Delta_0)_{n-1} & \longrightarrow \\
& T_{n+1} \uparrow\uparrow T'_{n+1} & \nwarrow A_n & T_n \uparrow\uparrow T'_n & \nwarrow A_{n-1} & T_{n-1} \uparrow\uparrow T'_{n-1} & \\
\longrightarrow & (\mathcal{C}\Delta_1)_{n+1} & \xrightarrow{(\Delta_1)_{n+1}} & (\mathcal{C}\Delta_1)_n & \xrightarrow{(\Delta_1)_n} & (\mathcal{C}\Delta_1)_{n-1} & \longrightarrow
\end{array}$$

において

$$T_n - T'_n = (\Delta_0)_{n+1} A_n + A_{n-1} (\Delta_1)_n$$

が成り立つものとすると，それは自然に写像錐の間の鎖準同型

$$\begin{array}{cccc}
\widetilde{A}_n & : & (\mathcal{C}T')_n = (\mathcal{C}\Delta_0)_n \oplus (\mathcal{C}\Delta_1)_{n-1} & \longrightarrow & (\mathcal{C}T)_n \\
& & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x + A_{n-1} y \\ y \end{pmatrix}
\end{array}$$

を導くので，特にそれがホモロジーに誘導する準同型

$$\widetilde{A}_* : CH_{*+1}(S_{\alpha'}) \cong H_*(\mathcal{C}T') \to CH_{*+1}(S_\alpha) \cong H_*(\mathcal{C}T)$$

が意味を持つ．

定義 5.1 以上の状況で，余次元 2 の **connecting orbit** に対する **transition matrix** とは次数 1 の次数付き加群の準同型写像 $A : \mathcal{C}\Delta_1 \to \mathcal{C}\Delta_0$ であって，次の条件をみたすものをいう：

(1) A は上三角，すなわち $A(p,q) \neq 0$ ならば $p < q$ である；

(2) A は transition matrix T, T' の鎖ホモトピーであり，従って写像錐 CT, CT' の間の鎖準同型 $\widetilde{A}$ を誘導する；

(3) 写像錐の鎖準同型 $\widetilde{A}$ が誘導するホモロジー準同型写像 $\widetilde{A}_* : CH_{*+1}(S_{\alpha'}) \to CH_{*+1}(S_\alpha)$ が global continuation isomorphism $(F_{\alpha\alpha'})_*$ に一致する.

λ_0, λ_1 を結ぶ 2 つの道 α, α' によって張られる 2-disk を $D_{\alpha,\alpha'}$ とするとき，上のような鎖ホモトピー写像全体の集合を $\mathcal{A}_{D_{\alpha,\alpha'}}(\Delta_0, \Delta_1; T, T')$ と書き，またそれを λ_0, λ_1 での可能なすべての connection matrix およびそれに対して定義される α, α' 上のすべての transition matrix 全体について和集合をとったものを $\mathcal{A}_{D_{\alpha,\alpha'}}(\lambda_0, \lambda_1)$ と書き表す.

定理 5.2

(1) 集合 $\mathcal{A}_{D_{\alpha,\alpha'}}(\lambda_0, \lambda_1)$ は空でない.

(2) $A \in \mathcal{A}_{D_{\alpha,\alpha'}}(\Delta_0, \Delta_1; T, T')$ の (p,q)-成分が 0 でないならば，$D_{\alpha,\alpha'}$ 内のパラメータの列 $\{\lambda_i\}_{i=1,\ldots,k}$ と $p = p_1$，$q = p_{k+1}$ なる $\{p_i\}_{i=1,\ldots,k+1}$ が存在して，各 $i = 1, \ldots, k$ について $\lambda = \lambda_i$ の時 $C(p_i, p_{i+1}) \neq \emptyset$ となる.

この定理の証明は定理 4.2と同様にできる．定理 4.2の証明では singular transition matrix が本質的に用いられたが，ここではパラメータ次元が大きい場合の Mischaikow[7] による singular transition matrix の拡張を用いる．すなわち singular transition matrix を定義するための parameter slow drift を高次元化して，パラメータ空間 $\Lambda = [0,1]^2$ と相空間との直積空間 $X \times \Lambda$ 上の常微分方程式

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x, \lambda^1, \lambda^2) \\
\dot{\lambda}^i &= \varepsilon \lambda^i (1 - \lambda^i) \ (i = 1, 2)
\end{aligned}
$$

を考える．Λ 上の流れは 4 つの平衡点 $(\lambda^1, \lambda^2) = (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ を持つので，それに対応してこの拡大された流れの Morse 分解は $\{M_{ij}(p) \mid i, j = 0, 1\}$ の形となり，従ってそれに対する connection matrix は

$$
\widetilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Delta_{00} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ O & \Delta_{01} & A_{23} & A_{24} \\ O & O & \Delta_{10} & A_{34} \\ O & O & O & \Delta_{11} \end{pmatrix}
$$

の形となる．ここで Δ_{ij} はパラメータ値 $\lambda = (i, j)$ に対応する connection matrix である．この拡大された流れの connection matrix $\tilde{\Sigma}$ に対しても $\tilde{\Sigma}^2 = O$ が成り立つので，そのことから

$$\begin{aligned}
&\Delta_{00}A_{12} + A_{12}\Delta_{01} = O\\
&\Delta_{01}A_{23} + A_{23}\Delta_{10} = O\\
&\Delta_{10}A_{34} + A_{34}\Delta_{11} = O\\
&\Delta_{00}A_{13} + A_{12}A_{23} + A_{13}\Delta_{10} = O\\
&\Delta_{01}A_{24} + A_{23}A_{34} + A_{24}\Delta_{10} = O\\
&\Delta_{00}A_{14} + A_{12}A_{24} + A_{13}A_{34} + A_{14}\Delta_{10} = O
\end{aligned} \tag{5.1}$$

が導かれる．[7] ではこのような行列を transition matrix の一般化として定式化し，そのいくつかの性質や具体例への応用について考察した．一般にこのようにしてパラメータ次元が k の時の singular transition matrix は 各パラメータ値での connection matrix のサイズの k 倍の大きさの行列として定式化されるが，われわれはそれを見直すことにより本質的な情報が次の形で得られることを見い出した．すなわち余次元 2 の場合には上のパラメータ空間 $[0,1]^2$ から実際のパラメータ空間内の 2 つの道で張られる 2-disk への写像を考え，それによって縦の辺 $\{0,1\} \times [0,1]$ は道 α, α' の共通の端点 λ_0, λ_1 に写されるようにする．この時には拡大された流れにおける λ^2 方向（縦方向）へのパラメータの変動による Morse 分解の変化は自明なので，上の行列 $\tilde{\Sigma}$ において

$$\begin{aligned}
&A_{12} = I,\ A_{23} = O,\ A_{34} = I;\\
&\Delta_{00} = -\Delta_{01} = \Delta_0,\ \Delta_{10} = -\Delta_{11} = \Delta_1;\\
&A_{13} = T,\ A_{24} = -T'
\end{aligned}$$

となる．これにより (5.1) の最初の 3 式は自明に成り立ち，また続く 2 式は T, T' が鎖準同型写像であることを表し，最後の式は A_{14} が T, T' の鎖ホモトピーに他ならないことを示している．

例 5.3 次の図のような $\mathbb{R}^3$ 内の流れを考える．
ここで Morse component $M(2)$ の 2 次元不安定多様体は $M(1)$ の 2 次元安定多様体と横断的に交わっている状況を考える．

2 次元のパラメータ空間で 2 点 λ_0, λ_1 を結ぶある道 α に沿っては Morse component $M(3)$ は $M(1)$ に決してつながらないが，端点を共有する別の道 α' に沿っては途中のあるパラメータ値で $M(3)$ から $M(1)$ への connecting orbit が存在するようなものが考えられる．この時に α, α' の囲む領域内に $M(3)$ の 1 次元不安定多様体が $M(2)$ の 1 次元安定多様体につながるような余次元 2 の connecting orbit の存在問題を考える．

まず λ_0, λ_1 での connection matrix は $M(2)$ から $M(1)$ への横断的な connecting orbit

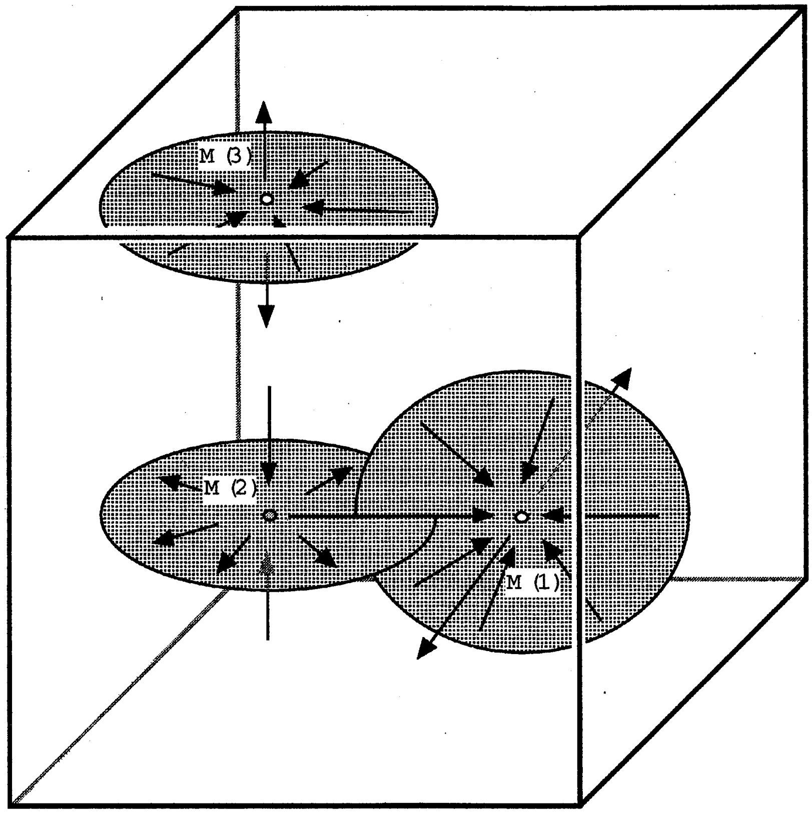

図 2: Codimension 2 connecting orbit.

のみ存在するので

$$\Delta_0 = \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．道 α に沿う transition matrix は単位行列 $T = \mathrm{Id}$ であるが，道 α' に沿う transition matrix は $M(3)$ から $M(1)$ への connecting orbit を反映して

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．これらより $T - T' = \Delta_0 A + A\Delta_1$ をみたす上三角行列 A を求めると，その第 $(2,3)$-成分は（$\mathbb{Z}_2$ 係数で）0 でないので，上の定理より α, α' の囲むパラメータ領域内に $M(3)$ から $M(2)$ への connecting orbit が存在するようなパラメータ値があるということが結論される．

このような余次元 2 の connecting orbit に対する transition matrix の構成は，より余次元の高い connecting orbit についてもほぼ同様に適用できる．すなわち，パラメータ空間内

に2点 λ_0, λ_1 を取り，それを結ぶ2つの道 α, α' が2つの異なる 2-disk D, D' を張り，それらが 3-disk B を囲むという状況を考える．このとき新しく得られた鎖複体 CT と CT' に対し，2つの鎖準同型 $\widetilde{A}, \widetilde{A}'$ が得られるが，それらの間の鎖ホモトピー L は，$\widetilde{A}, \widetilde{A}'$ の写像錐 CA, CA' の間の鎖準同型を導く．これが余次元3の connecting orbit に対する transition matrix となることが同様の議論により示せる．この構成は余次元を上げて繰り返せるので，原理的にはいくらでも余次元の高い connecting orbit についても transition matrix が考えられることになる．

参考文献

[1] C. Conley, *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*, CBMS Lecture Note, Vol.38, 1978, AMS.

[2] R. Franzosa, The connection matrix theory for Morse decompositions, Trans. AMS **311** (1989), 561–592.

[3] R. Franzosa & K. Mischaikow, Algebraic transition matrices, Trans. AMS **350** (1998), 889–912.

[4] H. Kokubu, K. Mischaikow & H. Oka, Existence of infinitely many connecting orbits in a singularly perturbed ordinary differential equations, Nonlinearity **9** (1996), 1263–1280.

[5] C. McCord & K. Mischaikow, Connected simple systems, transition matrices and heteroclinic bifurcations, Trans. AMS **333** (1992), 397–422.

[6] C. McCord & K. Mischaikow, Equivalence of topological and singular transition matrices in the Conley index, Michigan Math. J. **42** (1995), 387–414.

[7] K. Mischaikow, On transition systems, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **112A** (1989), 155–175.

[8] K. Mischaikow, Conley index theory, in *Dynamical Systems, Montecatini Terme 1994* (R. Johnson, ed.), Lecture Notes Math., Vol.1609, 1995, Springer, pp.119–207.

[9] J. Reineck, Connecting orbits in one-parameter families of flows, Ergod. Th. Dynam. Sys. **8*** (1988), 359–374.

[10] D. Salamon, Connected Simple Systems and the Conley index of isolated invariant sets, Trans. AMS **291** (1985), 1–41.