

## 大域結合写像におけるカオスの遍歴の発生機構

帝京科学大学 小室元政 (Motomasa Komuro)

### § 1 はじめに

低次元の力学系でも複雑な振舞いをし得るといことは、今日広く認められている。すなわち、「カオス」である。では高次元の力学系には、「カオス」とは本質的に異なる新しい振舞いは現れないのだろうか？

1990年に金子、池田、津田によって提唱された「カオスの遍歴」はこのような高次元力学系に特有の振舞いだと言われている。秩序状態にあったシステムが内的要因で乱れはじめ、やがて完全にバラバラになった後、別の秩序状態を見つけて落ち着く。しかし、それも長くは続かず、また乱れはじめバラバラになる。こうした動きを永遠に続ける振舞いをカオスの遍歴とよぶ。

ここで言う高次元とは、100次元あるいはそれ以上の次元を考えているようである。しかし、高次元で初めて出現する振舞いだとしても、「出現し得る最低の次元はいくらなのか」とか、「低次元力学系に既にその徴候はないのか」など、素朴な疑問がいくつも残る。さいわい、金子氏が扱った大域結合写像はきれいな対称性を持つため、数学的に扱いやすいシステムである。先ず、このシステムを解剖して高次元力学系を数学的に解析していく足がかりとしたい。

### § 2 大域結合写像

パラメータ  $a$  ( $1.0 \leq a \leq 2.0$ ) をもつ1次元写像  $g_a(x) = 1 - ax^2$  を考える。この写像はカオスの研究ではよく知られた写像でロジスティックマップと呼ばれている。パラメータ  $a$  を1から2まで変化させるとき図1のような興味深い分岐を起こす。

このロジスティックマップ  $g_a$  を  $N$  個用意し相互に結合させたシステムを考える。各  $g_a$  のパラメータ  $a$  にばらつきを持たせるとか、結合の仕方に変化を持たせるとか、いろいろなバリエーションが考えられるが、ここでは最もシンプルな場合として、すべての  $g_a$  のパラメータ  $a$  は同一の値を取り、結合の仕方はすべての  $g_a$  が対等な立場で全結合する平均場結合をとることにする。このようなシステムは大域結合写像 (Globally Coupled Map, GCM) と呼ばれる。具体的には次の式で定義される、2つのパラメータ  $a$  ( $0 \leq a \leq 2.0$ )、 $\varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon \leq 0.5$ ) をもつ  $R^N$  ( $N \geq 1$ ) 上の写像である。

$$F_{a,\varepsilon} : R^N \rightarrow R^N, \quad x = (x_1, \dots, x_N)^T \mapsto y = (y_1, \dots, y_N)^T$$

$$y_i = (1 - \varepsilon)g_a(x_i) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N g_a(x_j) \quad (1 \leq i \leq N)$$

例として  $N=3$  の場合は次のようになる。

$$y_1 = (1 - \varepsilon)g_a(x_1) + \frac{\varepsilon}{3} \{g_a(x_1) + g_a(x_2) + g_a(x_3)\}$$

$$y_2 = (1-\varepsilon)g_a(x_2) + \frac{\varepsilon}{3}\{g_a(x_1) + g_a(x_2) + g_a(x_3)\}$$

$$y_3 = (1-\varepsilon)g_a(x_3) + \frac{\varepsilon}{3}\{g_a(x_1) + g_a(x_2) + g_a(x_3)\}$$

$N$ は通常、数 100 程度の大きな数が使われる。十分大きな  $N$  に対して、普遍的に現れる振舞いを知りたいという欲求が背後にあるからである。しかし、数学的な構造を解明していくには  $N=100$  は大きすぎ、まずは  $N=10$  程度のシステムから解析することになる。

幾つかの振動子が相互に結合したシステム（結合振動子系）において、ばらばらの振動をしていた振動子が同期して同一の振動を始める現象がある。このような現象は「引き込み」と呼ばれている。ロジスティックマップを振動子と考えれば、GCM もひとつの結合振動子系と見ることができ、引き込みが生じることが予想される。金子邦彦氏（東大）は 1990 年に、パラメータ  $(a, \varepsilon)$  を変化させたとき、GCM にどのような引き込みが起こるかを調べ、図 2 の相図を作った（文献[1][2]）。ランダムに選んだ初期値に対して、 $F_{a,\varepsilon}$  を繰り返し施し、軌

道を計算する。過渡的状态が終了したと思われる時点まで、数万回の繰り返しを行う ([3])。その後、引き込んで同一の動きをしているロジスティックマップを 1 つのクラスとしてまとめ、いくつのクラスに分けられるかという、クラスター形成の視点から、GCM の振舞いを調べる。金子は、 $N=200$  の GCM に対して、 $a$  を 0.01 きざみ、 $\varepsilon$  を 0.02 きざみで変えて行きながら、ランダムに選んだ 500 個の初期値からクラスターを求めた。そして、GCM の振舞いを次の 4 つの相に分類した。

- 1) コヒーレント相：すべての要素（すなわち、ロジスティックマップ）が完全に引き込んで振動する。クラスターの数は 1 つ。非線型性のパラメータ  $a$  が小さく、結合の強さを表すパラメータ  $\varepsilon$  が大きい左上の領域で発生している。
- 2) 非同期相：各要素がすべて、まったくばらけて振動する。クラスターの数は  $N$  個。非線型性のパラメータ  $a$  が大きく、結合の強さを表すパラメータ  $\varepsilon$  が小さい右下の領域で発生している。
- 3) 秩序相：いくつかのクラスターに分かれて、それぞれでそろって振動する。クラスターの数は  $N$  に比べて非常に小さい。相図の中にある数字は 10% 以上の割合を占めたクラスター数。たとえば、秩序相(2)からパラメータをとるとき、システムは過渡状態を終えた後、2 クラスターの状態に落ち着く。2 クラスターの構成比は 100 : 100 や 120 : 80 など様々な値を取りうるが、どのような値を取るかは初期値に依存して決まる。また、たとえば、秩序相(2,3) からパラメータをとるとき、システムは過渡状態を終えた後、2 クラスターの状態か 3 クラスターの状態かに落ち着く。どちらの状態に落ち着くか、構成比はどのような値を取るかは初期値に依存して決まる。他のラベル(1,2), (2,3,4)なども同様の意味である。この状態は、一度実現すれば安定で、クラスターの組換えが起こることは無い。
- 4) 部分秩序相：ここでは、クラスターの組み替えが間欠的に起きる。すなわち、ランダムに初期値を与えて、 $F_{a,\varepsilon}$  を繰り返し施す。すると、システムはたとえば 2 クラスター状

態を見つけて、しばらくこの状態を保つ。しかし、しばらくすると、この状態が乱れ始め、いったん完全にバラけた状態になる。そして、しばらくすると、別のクラスター状態、たとえば 3 クラスター状態を見つけて、しばらくその状態を保つ。しかし、この状態もやがて乱れ始めて、再び完全にバラけた状態になる。このような過程を際限無く繰

り返すのが部分秩序相である。部分秩序相は2つの領域に分かれており、秩序相と非同期相との間に位置する領域を部分秩序相 I, コヒーレント相と秩序相との間に位置する領域を部分秩序相 II と名付けた。相図の中で「部分秩序相 II (2)」とあるのは初期値のとり方によっては2クラスター状態に落ち着くことがあることを示している。

このように、準安定な状態の間を乱れた状態を通して経巡る現象をカオスの遍歴(Chaotic Itinerancy)と呼ぶ。カオスの遍歴は池田・大塚・松本による光乱流のシミュレーション, 津田の生理的な非平衡神経回路モデル, そして金子の GCM で同時に見出されたものであり, その英訳(Chaotic Itinerancy)は Peter Davis の示唆によってつけられたものである。カオスの遍歴の発生メカニズムはどのシステムでも同じであるとは限らないと思う。むしろ, いくつかの典型的な発生メカニズムが存在している可能性があると思はれている。

### § 3 数学的解釈

クラスターに分かれるという現象を数学的に解釈すると次のようになる。すべてが引き込んで同期するコヒーレント状態は

$$H^1 = \{x \in R^N \mid x_1 = x_2 = \dots = x_N\}$$

で定義される1次元の不変部分空間があり, 軌道は  $H^1$  上のアトラクターに引き寄せられたと考えられる。また, 2クラスター状態が安定であるということは, ある2次元の不変部分空間, 例えば,

$$H^2 = \{x \in R^N \mid x_1 = x_2 = \dots = x_n, x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_N\}$$

上のアトラクターに引き寄せられたと考えられる。一般に, 安定な  $k$  クラスター状態の存在は, ある  $k$  次元不変部分空間とその上のアトラクターが存在して, 軌道はそのアトラクターに引き寄せられ, 結果として自由度  $k$  の運動をするようになったと考えられる。

カオスの遍歴は幾つかの不変部分空間上にアトラクターの残骸(吸引的性質とともに, 反発的性質を持つ不変集合。この実体が何であるかということが問題である。)が存在し, これらのアトラクター残骸間を軌道が経巡る現象と考えられる。たとえば, 2 クラスター状態をしばらく続け, やがて乱れ始め, 完全にばらばらの状態を経て, 3 クラスター状態を見つけ, しばらくその状態を続けるが, やがて乱れ始める, という現象は次のように解釈できる。すなわち, 軌道は2次元不変部分空間上のアトラクタ残骸に引き寄せられ, しばらくそこに滞在するが, やがてそこを離脱し, さ迷う。そして, 3次元不変部分空間上のアトラクタ残骸を見つけ, しばらくそこに滞在した後, また離脱する。真正のアトラクタが存在せず, いくつかのアトラクタ残骸が共存する場合にこのような遍歴を生じると考えられる。

この論文では, 次の順序でカオスの遍歴の発生メカニズムを明らかにする。§ 4 では不変部分空間がどのような仕方で, どれだけ存在するかを明らかにする。(この結果として, 不変部分空間の階層構造が明らかになる。) § 5 では不変部分空間の補空間方向への不安定性を明らかにする。§ 6, § 7 で一本の典型的軌道を解析することにより, 10GCM のおけるカオスの遍歴の発生メカニズムを明らかにする。結論として, 低次元の不変部分空間上のアトラクタがクライシス誘導型間欠性を起こし, 直交補空間方向が安定になったり不安定になったりすることにより, カオスの遍歴が生じていることが明らかになる。

### § 4 不変部分空間の階層構造

$N$  次対称群を  $S_N$  で表す。置換  $\sigma \in S_N$  に対して写像  $P_\sigma : R^N \rightarrow R^N$  を

$$P_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_N) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(N)})$$

で定義する. すなわち,  $P_\sigma$  は  $\sigma$  による座標の置換である. また,  $R^N$  の線形部分空間  $H_\sigma$  を

$$H_\sigma = \{x \in R^N : x_i = x_{\sigma(i)}, 1 \leq i \leq N\}$$

で定義する.  $\sigma$  を巡回置換表示するとき, 巡回置換の長さを大きいほうから順に並べてできる列を  $\sigma$  の型といい,  $[\sigma]$  で表す.

例  $N=6$  で

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = (12)(3)(456) \quad (\text{巡回置換表示})$$

とする. このとき,

$$P_\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_2, x_1, x_3, x_5, x_6, x_4)$$

$$H_\sigma = \{x \in R^6 : x_1 = x_2, x_4 = x_5 = x_6\}$$

$$[\sigma] = [3, 2, 1]$$

定理  $F: R^N \rightarrow R^N$  を GCM とする.

(1) 任意の  $\sigma \in S_N$  に対して,  $F$  は  $P_\sigma$  - 不変である.

$$P_\sigma F = F P_\sigma$$

(2) 任意の  $\sigma \in S_N$  に対して,  $H_\sigma$  は  $F$  - 不変な線形部分空間である.

$$F(H_\sigma) \subset H_\sigma$$

(3)  $\sigma_1, \sigma_2 \in S_N$  が群の意味で共役とする. すなわち, ある  $\tau \in S_N$  に対して

$$\tau \sigma_1 = \sigma_2 \tau$$

が成立つとする. このとき,  $F$  を  $H_{\sigma_1}, H_{\sigma_2}$  に制限した力学系  $F|_{H_{\sigma_1}}, F|_{H_{\sigma_2}}$  は位相共役である. すなわち,

$$P_\tau F|_{H_{\sigma_1}} = F|_{H_{\sigma_2}} P_\tau$$

が成り立つ.

置換  $\sigma_1, \sigma_2$  が共役であるための必要十分条件は  $\sigma_1, \sigma_2$  の型が一致することである. したがって, 部分力学系の族  $\{(H_\sigma, F|_{H_\sigma}) : \sigma \in S_N\}$  の位相共役類は  $\sigma$  の型  $[\sigma]$  によって決定される.

例 4 GCM を考える. 図 3 は不変部分空間の階層構造を表している. 部分空間は対応する置換の巡回置換で表されている. 3次元不変部分空間は全部で6個あるがそれらは全て位相共役である. タイプが全て  $[2, 1, 1]$  であるからである. 2次元不変部分空間は全部で7個あり, そのうちタイプが  $[3, 1]$  であるものが4個, タイプが  $[2, 2]$  であるものが3個存在する.

命題  $k$ 次元不変部分空間の異なるタイプの数は,  $N$  を  $k$ 個の正整数に分割する場合の数に等しく, 母関数

$$x^k (1-x)^{-1} (1-x^2)^{-1} (1-x^3)^{-1} \dots (1-x^k)^{-1}$$

の  $x^N$  の係数に等しい ([4]).

$N=50$  のとき, 異なるタイプの数は  $k=11$  のとき最大値 17475 となり,  $N=100$  では, 異

なるタイプの数は  $k=18$  のとき最大値 11087828 をとる. GCM は多数の不変部分空間を持ち,  $N$  が増えると不変部分空間の数も階乗のオーダーで増加するシステムである.

次に, 軌道がある時刻にどの不変部分空間の近くにいるかを知るために, 有効次元の概念を導入する.

定義 (平均有効次元) 点  $x \in R^N$  の精度  $\delta$  の有効次元(Effective Dimension)を

$$ED(x, \delta) = \min\{\dim H_\sigma : H_\sigma \cap B_\delta(x) \neq \emptyset\}$$

で定義する. すなわち,  $x$  の  $\delta$  近傍と交わる最低次元の不変部分空間の次元である.

$x$  の精度  $\delta$  時間  $T$  の平均有効次元(Mean of Effective Dimension, MED)を

$$MED(x, \delta, T) = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} ED(F^i(x), \delta)$$

で定義する.

$x$  の精度  $\delta$  部分空間型(Subspace Type)を  $x$  の  $\delta$  近傍と交わる最低次元の不変部分空間の型で定義する.

$$ST(x, \delta) = \{\sigma : \dim H_\sigma = ED(x, \delta), H_\sigma \cap B_\delta(x) \neq \emptyset\}$$

図 4 は 10GCM において  $a=1.90$  を固定し,  $0.0 \leq \varepsilon \leq 0.5$  の範囲で  $\varepsilon$  を 0.0005 刻みで変化させたときの平均有効次元を表したものである. 初期値をランダムに与え, 5000 回のトランジェントを切った後,  $\delta=10^{-4}, T=10^4$  を使って MED を計算する. この試行を各  $\varepsilon$  に対して 10 回行い, 10 回分を重ねてプロットする. 異なる次元の部分空間にアトラクタが共存している可能性があるからである.

$0.44 \leq \varepsilon \leq 0.5$  の範囲では,  $MED=1.0$  となり, コヒーレント状態に対応していることがわかる.  $\varepsilon=0.3$  の近くでは,  $MED=2.0$  となり, 2 クラスタ状態に対応していることがわかる.  $\varepsilon=0.24$  の近くでは,  $MED=2.0$  と  $MED=3.0$  の2つの値をとり, 2 クラスタ状態と 3 クラスタ状態が共存していることがわかる.  $\varepsilon=0.41$  と  $\varepsilon=0.18$  の付近で見られるばらつきのある点は, MED が非整数値をとり, 軌道がいろいろな次元の不変部分空間の周りをさま迷ったことを表しており, カオス的遍歴を起こしていると考えられる.  $0.0 \leq \varepsilon \leq 0.14$  の範囲では, MED は, ほぼ 10.0 となり, 非同期状態に対応していることがわかる. これらのことから, MED が GCM の振舞いを解析する上で有効な概念であることがわかる.

そこで, 更に広いパラメータの範囲で MED を計算するため, 次の手順に従ってデータを集める.

計算手順 パラメータ空間をメッシュに分割する.

1. パラメータを1つ取り, セットする.
2. 初期点をランダムに与える.
3. トランジェントを切る. (例えば, 5000 回)
4. MED を計算する. (例えば,  $\delta=10^{-4}, T=10^3$ )
5. 最終点に対して部分空間型 ST と周期 PE を計算する. (たとえば, 精度  $10^{-4}$  で 32 周期以下の周期点であればその周期を PE とし, それ以外の場合は PE=0 とする.)
6. 2. に戻る (繰り返し 10 回)
7. 1. に戻り次のパラメータに移る.

こうして得られたデータを条件に応じてソートして条件にあうパラメータ位置に点をプロットする.

図 5(b) は  $MED=2$  となったパラメータ領域を示している. 平均有効次元が整数値 2 を取るということは, 軌道は, トランジェントを切った後, ずっとある 2 次元不変部分空間の上 にいたことを意味し, この 2 次元不変部分空間上にアトラクタが存在していることがわかる.

そこでこの領域を 2d 安定パラメータ領域と呼ぶ。同様に図 5(a),(c)および(d)は、それぞれ MED=1, 3 および 4 となった領域である。今は 10GCM を使っているから、このような図は全部で 10 枚作れるが、複雑になりすぎるのを避けるため、これら 4 つの領域のみを使い、境界を抽出して重ねて描いたのが図 6 である。MED=1 のみの領域(1)はコヒーレント相に対応する。MED=1 と 2 が重なった領域(1,2)は秩序相(1,2)に、MED=2 のみの領域(2)は秩序相(2)に、それぞれ対応する。また、MED=2 と MED=3 が重なった領域(2,3)は秩序相(2,3)に対応する。9 < MED ≤ 10 となる領域は図 7(a)に示すように非同期相に対応する。1 < MED < 9 で非整数のもの領域は図 7(b)である。ある次元の不変部分空間に入ったり出たり、また別の次元の不変部分空間に入ったり出たりを繰り返しているために、整数値を取らなかったと考えられ、カオス的遍歴が生じているパラメータ領域を示していると推測される。

次に MED=2 のデータを更に、部分空間型 ST の値でソートしてプロットすると図 8 を得る。10GCM の場合、2 次元の不変部分空間のタイプは 5 つ ([5,5], [6,4], [7,3], [8,2], [9,1]) である。これらの領域の境界を抽出し、重ねて描いたのが図 9 である。例えば領域([55]) にパラメータを取ったとき実現する 2 クラスターの構成比は常に 5 対 5 であることがわかる。また、領域([55],[64]) にパラメータを取るとき実現する 2 クラスターの構成比は 5 対 5 か 6 対 4 であり、それ以外の構成比は安定なクラスターとしては実現し得ないことがわかる。

### § 5 補空間方向の不安定性

$F = F_{a,\varepsilon}$  を § 2 で定義した大域結合写像とする。

$x = (x_1, \dots, x_N)^T \in R^N$  のとき、 $F$  の微分は次で与えられる。

$$DF(x) : R^N \rightarrow R^N, (\xi_1, \dots, \xi_N)^T \rightarrow (\eta_1, \dots, \eta_N)^T$$

$$\eta_i = (1 - \varepsilon) Dg_a(x_i) \cdot \xi_i + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N Dg_a(x_j) \cdot \xi_j \quad (i=1, \dots, N)$$

すなわち、

$$DF(x) = (1 - \varepsilon) \begin{pmatrix} Dg_a(x_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Dg_a(x_N) \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon}{N} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (Dg_a(x_1), \dots, Dg_a(x_N))$$

ここで、 $g_a(t) = 1 - at^2$  であったから、 $Dg_a(t) = -2at$  である。この  $DF$  の表現から次の命題が導かれる。

命題 任意の  $\sigma \in S_N$  を与える。  $x \in H_\sigma$  とする。

(1)  $H_\sigma$  の直交補空間  $H_\sigma^\perp$  は  $DF(x)$  に関して不変である。

$$DF(H_\sigma^\perp) \subset H_\sigma^\perp$$

(2)  $\sigma$  の巡回置換表示を

$$\sigma = (i_{11}, \dots, i_{1m_1})(i_{21}, \dots, i_{2m_2}) \cdots (i_{k1}, \dots, i_{km_k})$$

とすると、直交補空間  $H_\sigma^\perp$  方向の  $DF(x)$  の固有値は

$$(1 - \varepsilon) Dg_a(x_{i_{j1}}) \quad j=1, \dots, k$$

で与えられる。

(3)  $H_\sigma$  の横断 Lyapunov 指数

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |DF^n(x)(v)|, \quad x \in H_\sigma, v \in H_\sigma^\perp$$

は  $H_\sigma$  上での偏 Lyapunov 指数

$$\lambda_{i,j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \log |Dg_a(\pi_{i,j} \circ F^m(x))|, \quad x \in H_\sigma, j=1, \dots, k$$

に  $\log(1-\varepsilon)$  を加えた数に等しい。ただし、

$$\pi_{i,j} : R^N \rightarrow R; \pi_{i,j}(x) = x_{i,j}, \quad j=1, \dots, k$$

は  $x_{i,j}$  成分への射影である。

例 10GCM を考える。

$$\sigma = (1,2,3,4,5,6)(7,8,9,10)$$

$$H_\sigma = \{x \in R^{10} : x_1 = x_2 = \dots = x_6, x_7 = \dots = x_{10}\}$$

$x \in H_\sigma$  とする。このとき、

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)^T \\ u_{1,2} &= (1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \\ u_{1,3} &= (1, 1, -2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \\ u_{1,4} &= (1, 1, 1, -3, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \\ u_{1,5} &= (1, 1, 1, 1, -4, 0, 0, 0, 0, 0)^T \\ u_{1,6} &= (1, 1, 1, 1, 1, -5, 0, 0, 0, 0)^T \\ u_{2,1} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)^T \\ u_{2,2} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0)^T \\ u_{2,3} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, -2, 0)^T \\ u_{2,4} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, -3)^T \end{aligned}$$

と置くと、 $u_{1,1}, u_{2,1}$  は  $H_\sigma$  の直交基底を与え、 $u_{1,2}, u_{1,3}, u_{1,4}, u_{1,5}, u_{1,6}, u_{2,2}, u_{2,3}, u_{2,4}$  は  $H_\sigma^\perp$  の直交基底を与える。  $u_{1,2}, u_{1,3}, u_{1,4}, u_{1,5}, u_{1,6}, u_{2,2}, u_{2,3}, u_{2,4}$  は  $DF(x)$  の固有ベクトルで、

$u_{1,2}, u_{1,3}, u_{1,4}, u_{1,5}, u_{1,6}$  の固有値は  $(1-\varepsilon)Dg_a(x_1)$  :

$$DF(x) \cdot u_{1,i} = (1-\varepsilon)Dg_a(x_1) \cdot u_{1,i} \quad (i=2, \dots, 6)$$

$u_{2,2}, u_{2,3}, u_{2,4}$  の固有値は  $(1-\varepsilon)Dg_a(x_7)$  :

$$DF(x) \cdot u_{2,i} = (1-\varepsilon)Dg_a(x_7) \cdot u_{2,i} \quad (i=2, \dots, 4)$$

で与えられる。また、 $x_1, x_7$  方向の偏 Lyapunov 指数は

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{m=0}^{n-1} |Dg_a(\pi_i \circ F^m(x))|, \quad i=1,7$$

で与えられ、 $H_\sigma$  の横断 Lyapunov 指数は

$$\log(1-\varepsilon) + \lambda_1 \quad : \text{重複度} = 6 - 1 = 5$$

$$\log(1-\varepsilon) + \lambda_7 \quad : \text{重複度} = 4 - 1 = 3$$

となる。

この命題から不変部分空間  $H_\sigma$  の補空間方向の不安定性は  $H_\sigma$  上の軌道によって決まり、全空間の次元  $N$  には依存しないことがわかる。したがって、例えば、図 8 で示した 10GCM の  $2d[6,4]$  安定パラメータ領域は、100GCM の  $2d[60,40]$  安定パラメータ領域とも 200GCM の  $2d[120,80]$  安定パラメータ領域とも一致することがわかる。

## § 6 カオスの遍歴の観測

この節と次の節で 10GCM のにおけるカオスの遍歴の発生機構を明らかにする。結論として、低次元の不変部分空間上のアトラクタがクライシス誘導型間欠性を起こし、直交補空間方向が安定になったり不安定になったりすることにより、カオスの遍歴が生じていることが明らかになる。

さて、部分秩序相の計算においては、「見かけの引き込み」と呼ばれる問題がしばしば起こる ([6])。たとえば、二つの要素  $x_i, x_j$  が  $10^{-30}$  まで接近し、その後、再び離れていく、という現象が理論上あったとする。ところが、たとえば倍精度の計算でも一番下の桁は  $10^{-15}$  であり、われわれのデジタル計算機の上では、いったんはまったく同じ値となってしまふ。いったん同じ値になってしまふと、二つの要素が元来離れようとしていても、このデジタル計算機の上ではもはや離れようがなくなってしまう。これを「見かけの引き込み」問題という。こうした問題を取り除くために、金子の手法に従い、もとの系に小さな雑音を加えることにする。つまり、 $[\sigma, -\sigma]$  からとった一様な乱数  $\eta_i$  をくわえる。

$$y_i = (1 - \varepsilon) g_a(x_i) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N g_a(x_j) + \eta_i, \quad \eta_i \in [\sigma, -\sigma], \quad (1 \leq i \leq N)$$

$\sigma$  をノイズの大きさと呼ぶ。

10GCM において、パラメータを  $a=1.9$ ,  $\varepsilon=0.186$  に固定する。有効次元の精度  $\delta$  を  $10^{-13}$ 、ノイズの大きさ  $\sigma$  を  $10^{-15}$  とし、軌道を倍精度で計算する。図 10 は、ランダムに与えた初期値  $x(0) \in R^{10}$  の軌道を  $x(t)$  とし、点  $x(t)$  における有効次元  $ED(x(t), \delta)$  を 32 ステップ毎に 5000 回記録したものである。 $ED(x(t), \delta)$  は 6 と 10 の間の値をとりながら (まれに 4, 5 の値をとる)、増減しており、カオスの遍歴が起きていることがわかる。

この振舞いを詳しく調べるため、あらためてランダムにとった初期値を  $x(0)$  とし、同じ条件 (有効次元の精度  $\delta=10^{-13}$ 、ノイズの大きさ  $\sigma=10^{-15}$ 、倍精度計算) で軌道を計算し、10000 ステップ分の  $x(t)$  の座標をすべて記録する。図 11 (上) は 0 ステップ (初期値) から 10000 ステップまでの有効次元  $ED(x(t), \delta)$  のグラフである。図 11 (下) は 4000 ステップから 6000 ステップまでの間を拡大したものである。4000 ステップから 4500 ステップにかけて  $ED(x(t), \delta)$  は 10 から 6 まで減少し、4500 ステップから 5100 ステップあたりまで 6 の値をとりつづけ、5100 ステップから 5500 ステップまでで  $ED(x(t), \delta)$  は 10 に増加する。

4600 ステップにおける  $x = x(t)$  の座標  $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$  は次のようになっている。

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0.8680111717440510 & x_2 = 0.7132627407502350 \\ x_3 = 0.8680111717440530 & x_4 = -0.3057604271100400 \\ x_5 = 0.7108613712018920 & x_6 = -0.3057604271100450 \end{array}$$



$$\begin{aligned} x_7 &= -0.0088623218480510 & x_8 &= 0.7122016989087070 \\ x_9 &= -0.0088623218480513 & x_{10} &= -0.3057604271100360 \end{aligned}$$

これを並べ替えると次のようになる。

$$\begin{aligned} x_4 &= -0.3057604271100\ 400 \\ x_6 &= -0.3057604271100\ 450 \\ x_{10} &= -0.3057604271100\ 360 \\ x_1 &= 0.86801117174405\ 10 \\ x_3 &= 0.86801117174405\ 30 \\ x_7 &= -0.008862321848051\ 0 \\ x_9 &= -0.008862321848051\ 3 \\ x_2 &= 0.71\ 32627407502350 \\ x_5 &= 0.71\ 08613712018920 \\ x_8 &= 0.71\ 22016989087070 \end{aligned}$$

すなわち、 $x_4, x_6, x_{10}$  は  $10^{-13}$  まで同期しており、 $x_1$  と  $x_3$ 、および  $x_7$  と  $x_9$  はそれぞれ  $10^{-14}$  まで同期している。これらの同期により有効次元が 6 次元になっている。これらの同期がどのようにして実現し、どのようにして外れていくのかを見るため、

$|x_4 - x_6|$ 、 $|x_4 - x_{10}|$ 、 $|x_1 - x_3|$ 、 $|x_7 - x_9|$  の値の変化を 4000 ステップから 6000 ステップまで示したものが図 12 である。グラフの縦軸は対数目盛で、たとえば  $|x_4 - x_6| = 0$  の場合には  $1.0E - 17$  をとるようにしている ( $1.0E - 15$  の精度で計算している)。

これらの図から、軌道は

$$H = \{x \in R^{10} \mid x_4 = x_6 = x_{10}, x_1 = x_3, x_7 = x_9\}$$

で定義される [322111] 型の 6 次元不変部分空間に接近し、しばらくその近くに滞在した後、離れていったことがわかる。図 13 は 4600 ステップから 5000 ステップまでの軌道と、5200 ステップから 5600 ステップまでの軌道をそれぞれ  $(x_4, x_1)$  平面へ射影したものである。この図から、6 次元不変部分空間  $H$  上に図 13 (左) のような吸引力のある集合 (擬アトラクタ) があり、軌道はしばらくここに引き付けられているが、図 13 (右) に見られるように、何らかの理由で吸引力を失い、軌道は  $H$  から離れていったことが予想される。この吸引力を失った原因が  $H$  上のアトラクタのクライシスによることを次の節で明らかにする。

## § 7 カオス的遍歴のメカニズム

前節で述べた [322111] 型 6 次元不変部分空間  $H \subset R^{10}$  に制限したシステムは、次の重み付き 6 次元 GCM と同値である。

$$G_{a,\varepsilon} : R^6 \rightarrow R^6, \quad y = (y_1, \dots, y_6)^T \mapsto z = (z_1, \dots, z_6)^T$$

$$z_i = (1 - \varepsilon)g_a(y_i) + \sum_{j=1}^6 c_j g_a(y_j), \quad (1 \leq i \leq 6)$$

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) = (3, 2, 2, 1, 1, 1)$$

§ 6 の  $x_4, x_6, x_{10}$  は  $10^{-13}$  まで一致していたことから、これらを代表させて  $y_1 = -0.3057604271100$  と定める。同様に  $x_1$  と  $x_3$ 、および  $x_7$  と  $x_9$  はそれぞれ  $10^{-14}$  まで一致していたことから、これらをそれぞれ代表させて  $y_2 = 0.86801117174405$ ,  $y_3 = -$

0.008862321848051 と定める。  $x_2, x_3, x_8$  は同期していないと判断して、そのままの値を  $y_4, y_5, y_6$  とする。このようにして 6 次元空間の点  $y(0) = (y_1, \dots, y_6) \in R^6$  を次のように定める。

$$\begin{aligned} y_1 &= -0.3057604271100 & y_2 &= 0.86801117174405 \\ y_3 &= -0.008862321848051 & y_4 &= 0.7132627407502350 \\ y_5 &= 0.7108613712018920 & y_6 &= 0.7122016989087070 \end{aligned}$$

点  $y(0)$  を初期値とし、ノイズの大きさ  $\sigma = 10^{-15}$  で軌道を計算し、5000 ステップ分の軌道  $y(t)$  の座標をすべて記録する。この軌道データから、瞬間横断 Lyapunov 数

$$\mu_i(t) = \log |(1 - \varepsilon) Dg_a(y_i(t))|, \quad i = 1, 2, 3$$

を計算する。これは、§ 5 で述べたように、 $R^{10}$  における部分空間  $H$  の直交補空間方向の拡大率をあらわす。 $\mu_i(t)$  自身は変動が激しく、特徴をとらえ難いので 128 ステップにわたる移動平均 (局所横断 Lyapunov 数)

$$\bar{\mu}_i(t) = \frac{1}{128} \sum_{j=0}^{127} \mu_i(t-j)$$

をとったものが図 14 である。ステップ 128 からステップ 500 までは局所横断 Lyapunov 数は負であり、部分空間  $H$  の直交補空間方向は安定であることがわかる。このとき対応する軌道 (ステップ 0 からステップ 500 まで) の  $(y_1, y_2)$  平面への射影は図 15 (左上) のように局在化している。更に、ステップ 501 からステップ 1000 までの軌道、ステップ 1001 からステップ 1500 までの軌道のそれぞれ  $(y_1, y_2)$  平面への射影は、図 15 (右上)、(左下) のようになり、局在化していた軌道は、しだいに拡散していく様子がわかる。このときの対応する局所横断 Lyapunov 数は主に正の値をとり、部分空間  $H$  の直交補空間方向は不安定であることがわかる。拡散した軌道は図 15 (右下) にあるように再び局在化することがある。このとき局所横断 Lyapunov 数が負になれば、 $H$  の直交補空間方向は吸引的性質を持つことになる。(今のデータではステップ 4500~5000 において  $\mu_1(t)$  は 0 に近いが負であるとはいえないので、吸引的性質を持つとはいえない。)

パラメータ  $\varepsilon$  を 0.187 に増加させ、初期値  $y(0)$  の軌道を 5000 ステップ計算すると図 17 のように局在したままであり、局所横断 Lyapunov 数は図 16 のようにすべて負である。逆に  $\varepsilon$  を 0.15 に減少させ、初期値  $y(0)$  の軌道を 5000 ステップ計算すると図 19 のように拡散したままであり、局所横断 Lyapunov 数は図 18 のようにすべて正である。

以上から次のことが結論付けられる。すなわち、 $R^{10}$  における部分空間  $H$  上には、 $\varepsilon = 0.187$  のときアトラクタ  $\Lambda_1$  があり、これは  $H$  の直交補空間方向に安定で吸引的性質を持つ。 $\varepsilon = 0.150$  のときには  $\Lambda_1$  に比べて大きな ( $\Lambda_1$  を含むような) アトラクタ  $\Lambda_2$  があり、これは  $H$  の直交補空間方向には不安定で反発的性質を持っている。

$\varepsilon$  を 0.187 から減少させるとき、アトラクタ  $\Lambda_1$  は  $\varepsilon = 0.1865$  付近でクライシスを起こす。クライシスによって  $\Lambda_1$  には出口が生じ、 $\Lambda_1$  は「擬アトラクタ」となる。 $\varepsilon = 0.186$  では、 $\Lambda_1$  内にいた軌道は出口を見つけて、やがて外に出るが、外に出た軌道は  $\Lambda_2$  の内部を動き回り、時々、 $\Lambda_1$  に帰って来たりもする。

$H$  には含まれないが、 $H$  の近くにいる点  $x \in R^{10}$  の動きは、 $H$  上への射影点  $y$  の動きと、直交補空間  $H^\perp$  方向の射影点  $y^\perp$  の動きとの合成で近似される。 $\varepsilon = 0.186$  で射影点  $y$  が「擬アトラクタ」 $\Lambda_1$  の内部を動くとき、直交補空間方向に安定であるから射影点  $y^\perp$  は 0 に収束

していく。射影点  $y$  が  $\Lambda_1$  の内部に滞在する時間が十分にあれば、 $x$  は  $H$  の  $\delta$  近傍に入り、有効次元は 6 に低減する。しかし、滞在時間が十分でなければ、有効次元は 8 や 7 までしか低減しないであろう。やがて、射影点  $y$  が「擬アトラクタ」 $\Lambda_1$  の出口を見つけ、外に出て  $\Lambda_2$  の内部を動き回るようになると、直交補空間方向は不安定となり、射影点  $y^+$  のノルムは拡大していき、 $x$  が  $H$  の  $\delta$  近傍の外に出れば、有効次元は 6 から増大する (図 20)。

一般に  $H$  と位相共役な不変部分空間は多数ある。 $R^{10}$  において [322111] 型の 6 次元不変部分空間の数は、 ${}_{10}C_3 \times {}_7C_2 \times {}_5C_2 = 25200$  である。一つの  $H$  に「擬アトラクタ」 $\Lambda_1$  があるということは、他の位相共役な不変部分空間にも同様の「擬アトラクタ」があることを意味する。すなわち、 $\varepsilon = 0.186$  では 25200 個の「擬アトラクタ」が共存しており、 $H$  の  $\delta$  近傍の外に出た  $x$  は  $R^{10}$  の内部を動き回るうちに、別の「擬アトラクタ」に引き寄せられ、やがて離れる、という動きを永遠に繰り返すこととなる。これが大域結合写像におけるカオスの遍歴の基本的なメカニズムであると考えられる。

## § 8 最後に

前述の議論では、クライシスによってアトラクタ  $\Lambda_1$  に出口が生じ、 $\Lambda_1$  は「擬アトラクタ」となる、ことが重要な役割を果たした。クライシスの典型的な例は図 21 のような 1 次元写像である。区間  $\Lambda_1$  に滞在していた軌道は出口  $E$  を見つけると外に出て区間  $\Lambda_2 = [0, 1]$  を動き回る。時には、再び区間  $\Lambda_1$  に帰ってきて、滞在する。このような振舞いはクライシス誘導型間欠性 (crisis-induced intermittency) とよばれる ([7, 8])。したがって、この小論での主張は

GCM におけるカオスの遍歴は、不変部分空間上でのクライシス誘導型間欠性と直交補空間方向の安定性の反転によって生じる。

ということができる。

ところで、図 21 のような 1 次元写像では、アトラクタ  $\Lambda_1$  がサドル点  $P$  に接触して、クライシスが生じていることは明瞭である。しかしながら、GCM のような高次元の不可逆写像のクライシスについては数値解析も、数学的術語の定式化も不十分の点が多く、今後の課題として残されている。

## 注および参考文献

- [1] K. Kaneko, *Physica D* 41 (1990) 137.
- [2] 金子邦彦・津田一郎著、「複雑系のカオスのシナリオ」複雑系双書 1, 朝倉書店 1996.
- [3]  $N$  が大きい場合、過渡的状态が終了したのか否かを判断するのは難しい。  
実際には勘や計算時間との兼ね合いで、決める場合が多い。
- [4] C. ベルジュ著 野崎明弘訳 「組み合わせ論の基礎」  
(サイエンスライブラリ数学 9 サイエンス社 1973.) p.46 の命題 2° を参照。
- [5] Jorge Buescu, *Exotic Attractors - From Liapunov Stability to Riddled Basins -*,  
*Progress in Mathematics, Volume 153, Birkhauser Verlag, 1997.* この本の p.86  
の Proposition 3.3.20 および関連する定義を参照
- [6] K. Kaneko, *Physica D* 77 (1994) 456.
- [7] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. York, *Phys. Rev. Lett.* 48, 1507 (1982).
- [8] C. Grebogi, E. Ott, F. J. Romeiras, and J. A. York, *Phys. Rev. A* 36, 5365 (1987).

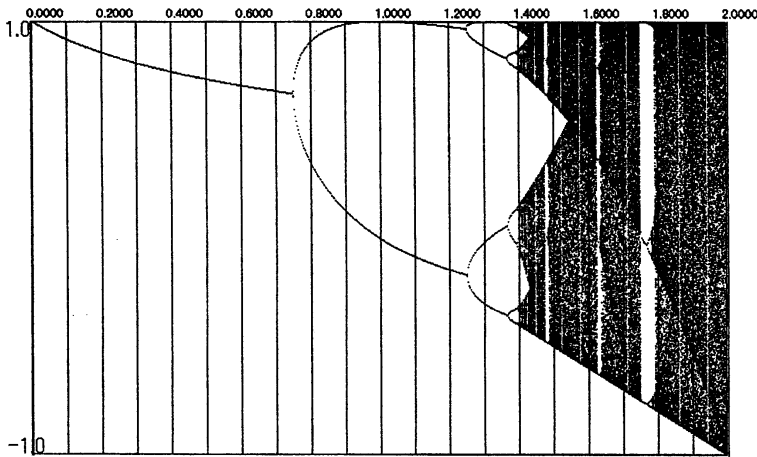


図1 ロジスティックマップの分岐図.  
横軸は  $0 \leq a \leq 2$ , 縦軸は  $-1 \leq x \leq 1$ .

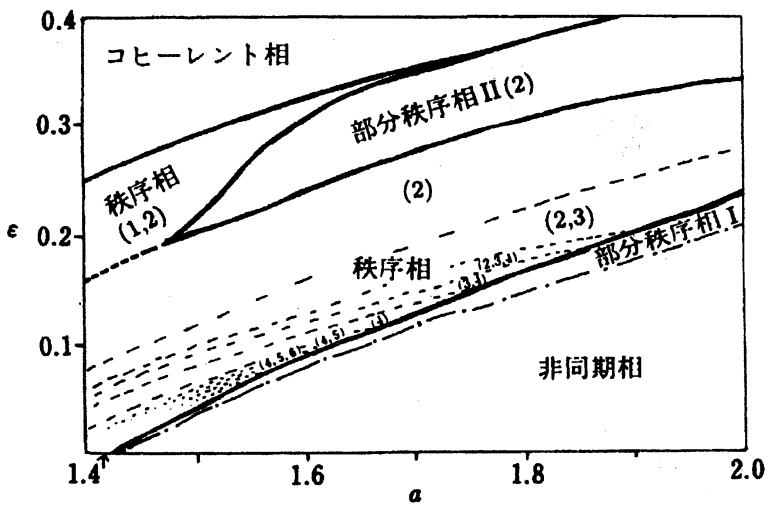


図2 金子氏による GCM の相図.  
N=200. (金子邦彦・津田一郎著, 「複雑系のカオスのシナリオ」 複雑系双書 1, 朝倉書店, 1996. P.134 からの転載)

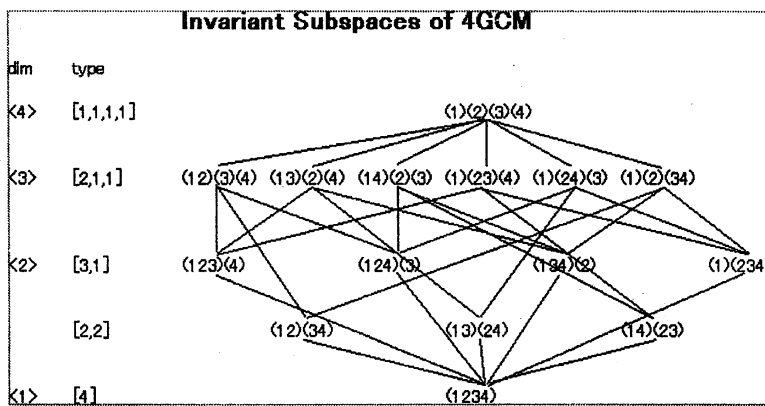


図3 4GCM の不変部分空間部分空間の階層構造.

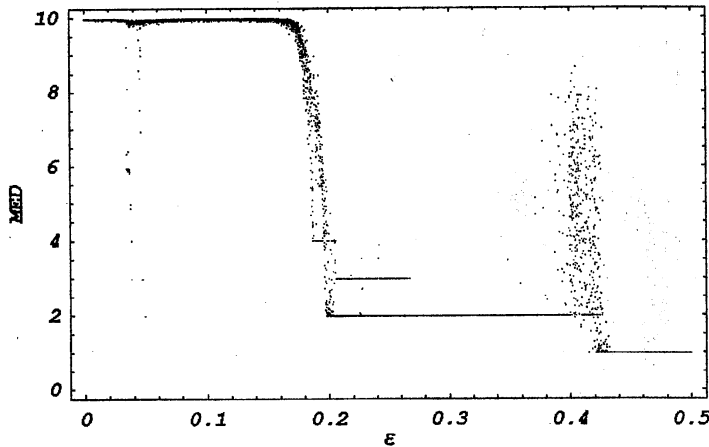


図4 10GCM の平均有効次元.  
 $a=1.9, \delta=10^{-4}, T=10^4$ , 横軸は  $0.0 \leq \varepsilon \leq 0.5$ , 縦軸は  $0 \leq MED \leq 10$ . 10回分を重ね描きした.

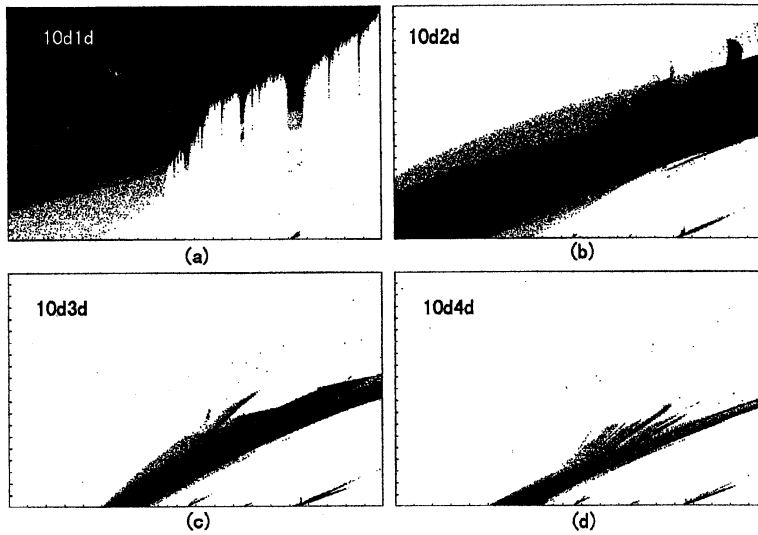


図5 10GCM の安定パラメータ領域. 横軸は  $1.0 \leq a \leq 2.0$ , 縦軸は  $0.0 \leq \varepsilon \leq 0.5$ . 色の濃淡はランダムな初期値がアトラクタに引き寄せられる頻度の差を表している. (a)1次元, (b)2次元, (c)3次元, (d)4次元.

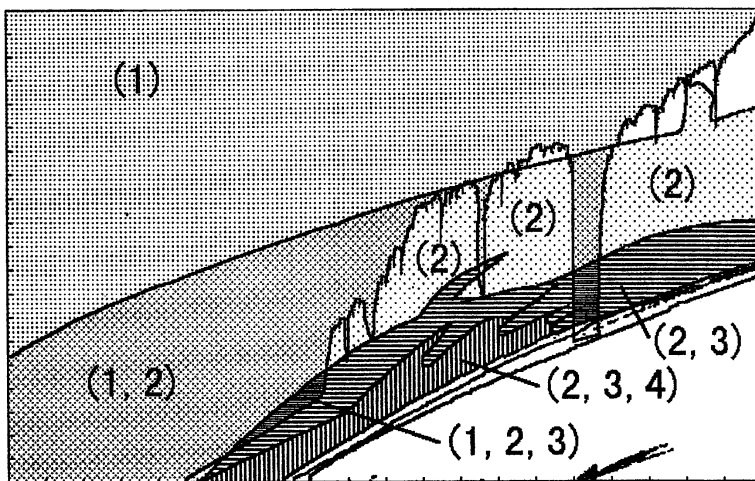


図6 10GCM の 1d,2d,3d,4d の安定パラメータ領域の境界を抽出して重ね描きした. 横軸は  $1.0 \leq a \leq 2.0$ , 縦軸は  $0.0 \leq \varepsilon \leq 0.5$ .

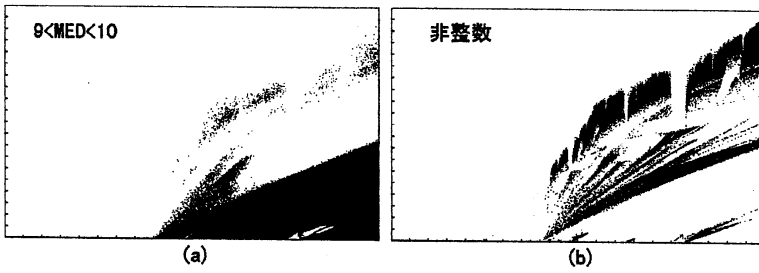


図7 (a)  $9 < MED \leq 10$  となる領域. (b)  $1 < MED < 9$  で非整数のもの領域. 横軸は  $1.0 \leq a \leq 2.0$ , 縦軸は  $0.0 \leq \varepsilon \leq 0.5$ .

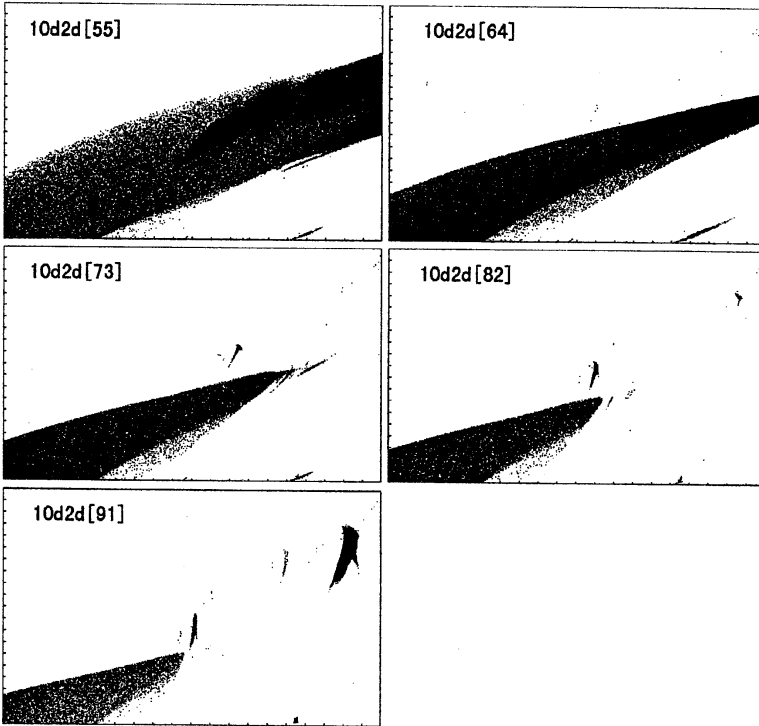


図8 10GCM の 2d 安定パラメータ領域を部分空間型で分解した領域. 横軸は  $1.0 \leq a \leq 2.0$ , 縦軸は  $0.0 \leq \varepsilon \leq 0.5$ . 色の濃淡はランダムな初期値がアトラクタに引き寄せられる頻度の差を表している.

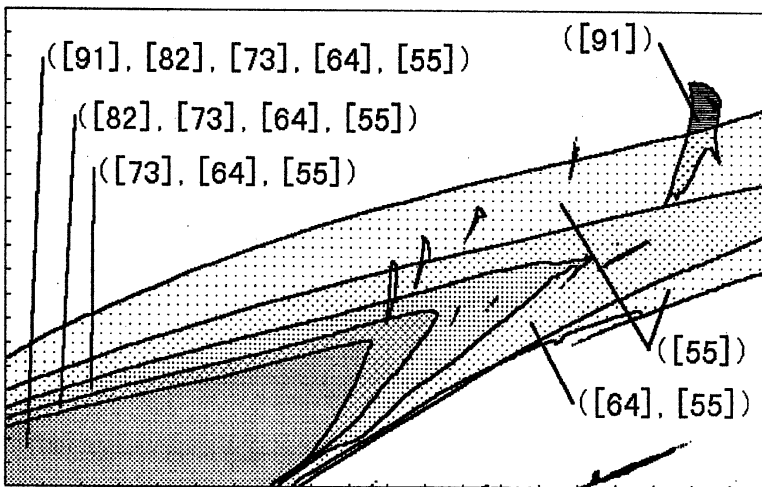


図9 10GCM の 2d 安定パラメータ領域を部分空間型で分解した領域の境界を抽出して重ね描きした. 横軸は  $1.0 \leq a \leq 2.0$ , 縦軸は  $0.0 \leq \varepsilon \leq 0.5$ .

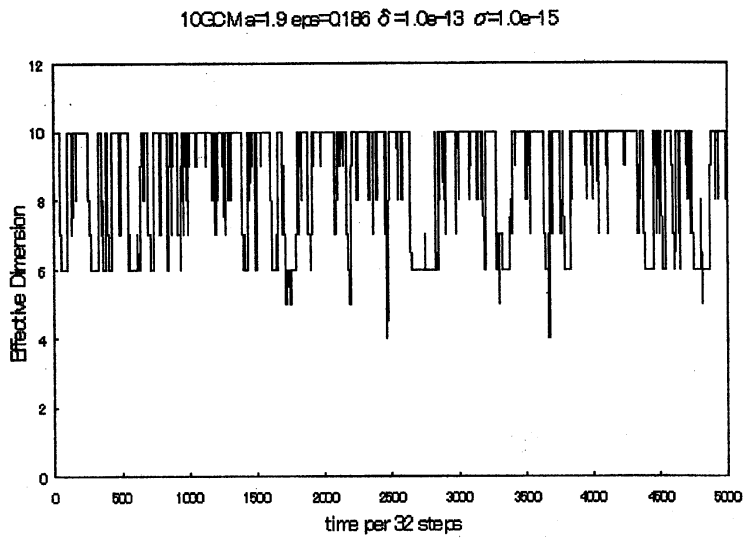


図 10 10GCM の有効次元の変化.  $a=1.9$ ,  $\epsilon=0.186$ , 有効次元の精度  $\delta=10^{-13}$ 、ノイズの大きさ  $\sigma=10^{-15}$ 、倍精度で計算。ランダムに与えた初期値  $x(0) \in R^{10}$  の軌道を  $x(t)$  とし、点  $x(t)$  における有効次元  $ED(x(t), \delta)$  を 32 ステップ毎に 5000 回記録したもの。

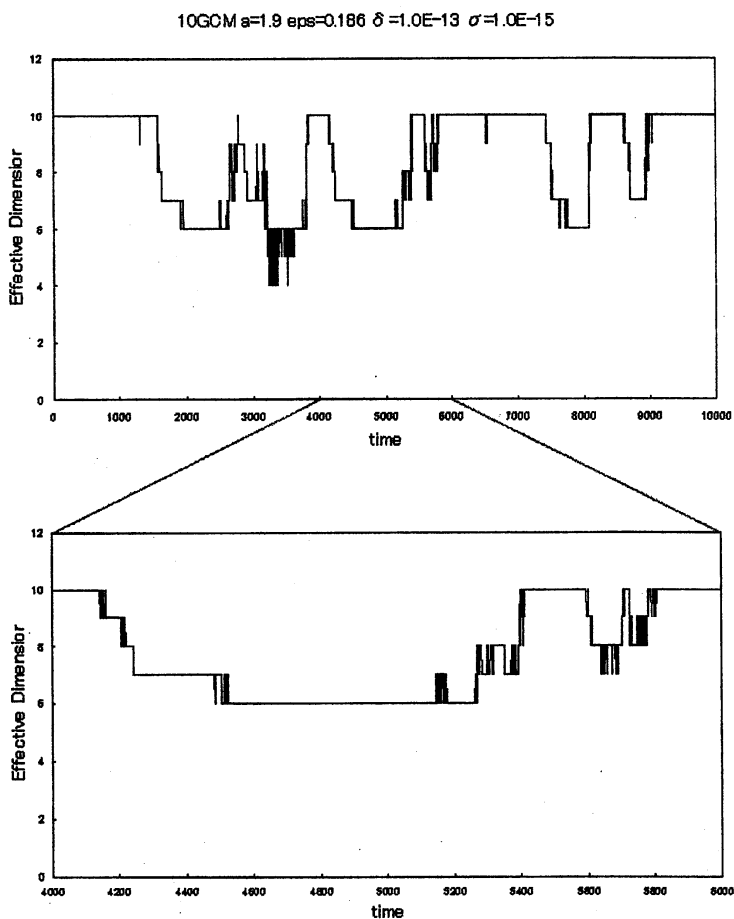


図 11 10GCM の有効次元の変化.  $a=1.9$ ,  $\epsilon=0.186$ , 有効次元の精度  $\delta=10^{-13}$ 、ノイズの大きさ  $\sigma=10^{-15}$ 、倍精度で計算。ランダムに与えた初期値  $x(0) \in R^{10}$  の軌道を  $x(t)$  とし、点  $x(t)$  における有効次元  $ED(x(t), \delta)$  を各ステップ毎に 10000 回記録したもの。(下) は 4000 ステップから 6000 ステップまでの拡大。

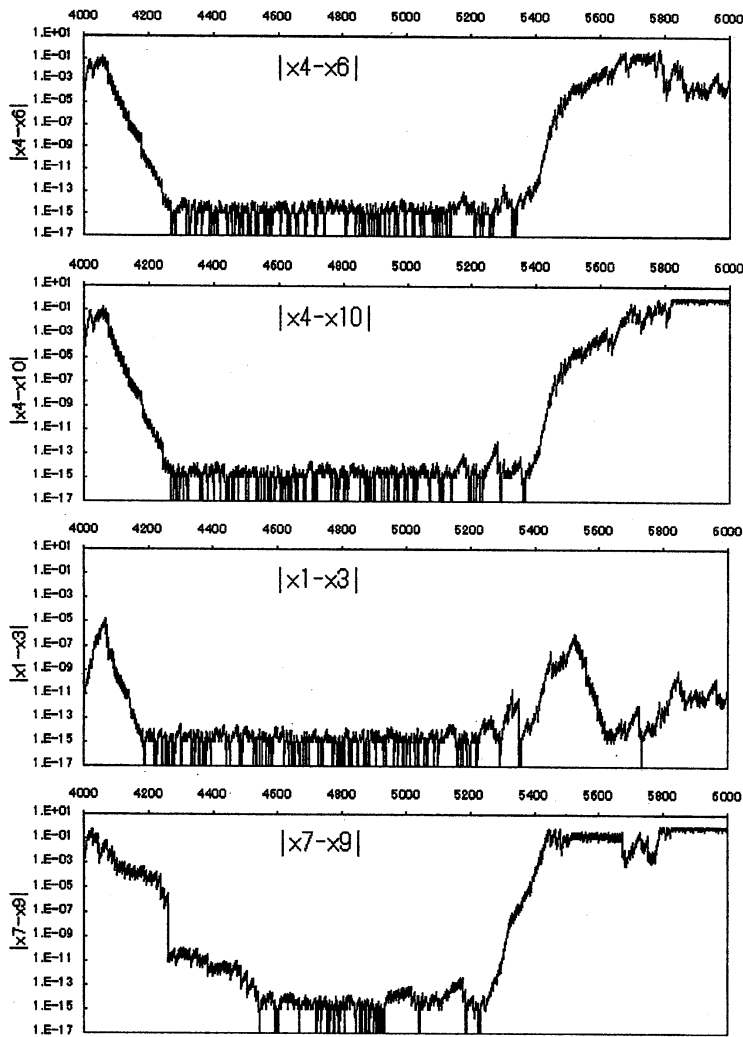


図 12 4000 ステップから 6000 ステップまでの、上から順に、 $|x_4 - x_6|$ 、 $|x_4 - x_{10}|$ 、 $|x_1 - x_3|$ 、 $|x_7 - x_9|$  の値の変化。縦軸は対数目盛、ただし、例えば、 $|x_4 - x_6| = 0$  の場合には  $1.0E - 17$  とする。

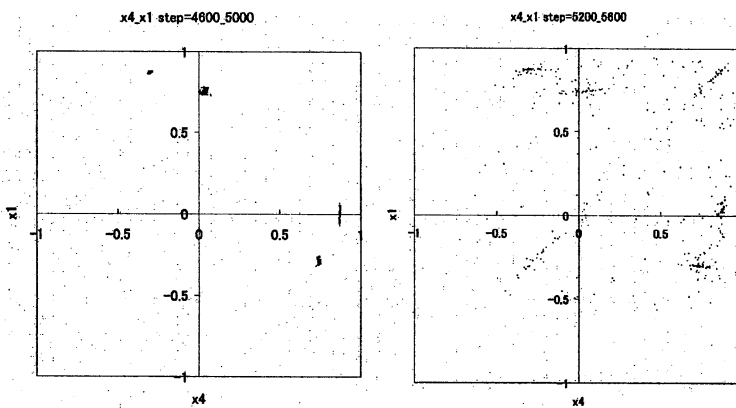


図 13 軌道の  $(x_4, x_1)$  平面へ射影。(左) は 4600 ステップから 5000 ステップまで、(右) は 5200 ステップから 5600 ステップまで。



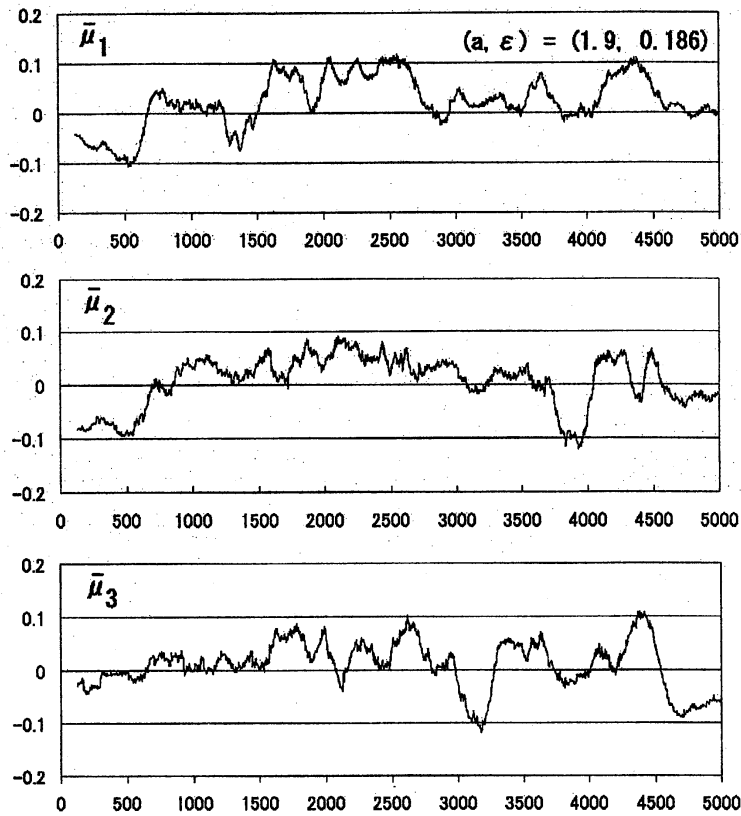


図 14 重み[322111]付き 6 GCM  
における局所横断 Lyapunov 数の  
変化。  $a=1.9, \varepsilon=0.186$ , ノイズ  
の大きさ  $\sigma=10^{-15}$ 。

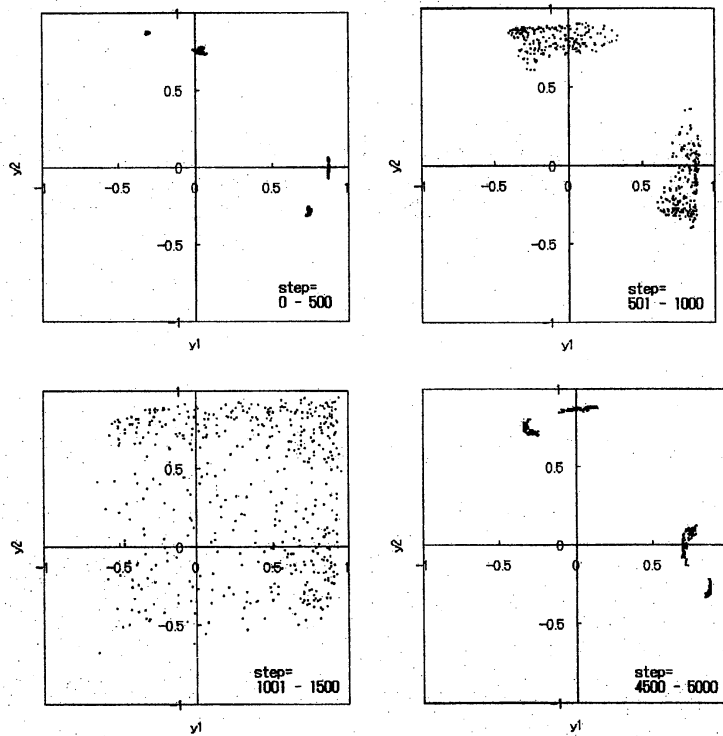


図 15 重み[322111]付き 6 GCM に  
おける軌道の  $(y_1, y_2)$  平面への射  
影。  $a=1.9, \varepsilon=0.186$ , ノイズの大  
きさ  $\sigma=10^{-15}$ 。(左上)ステップ 0  
からステップ 500 まで、(右上)  
ステップ 500 からステップ 1001  
まで、(左下)ステップ 1001 から  
ステップ 1500 まで、(右下)ステ  
ップ 4500 からステップ 5000 まで。

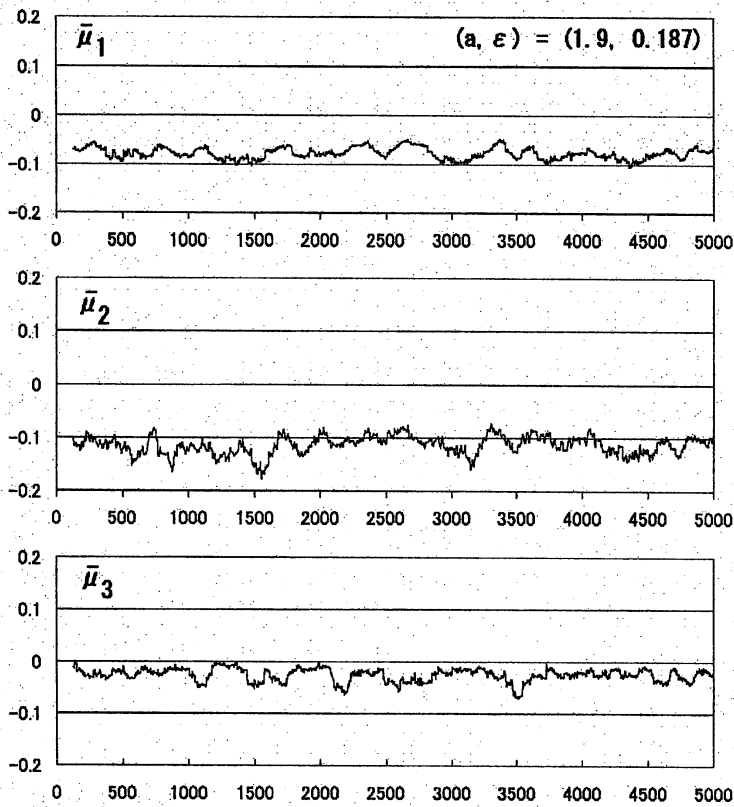


図 16 重み[322111]付き 6 GCM における局所横断 Lyapunov 数の変化。 $a=1.9, \epsilon=0.187$ , ノイズの大きさ  $\sigma=10^{-15}$ 。

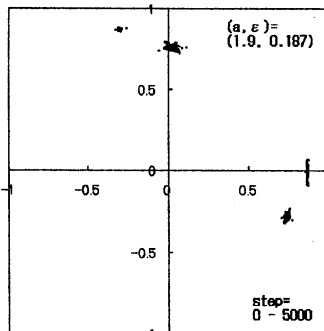


図 17 重み[322111]付き 6 GCM における軌道の  $(y_1, y_2)$  平面への射影。 $a=1.9, \epsilon=0.187$ , ノイズの大きさ  $\sigma=10^{-15}$ 。ステップ 0 からステップ 5000 まで。

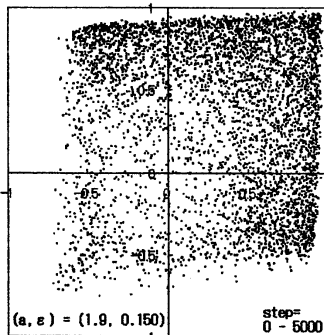


図 19 重み[322111]付き 6 GCM における軌道の  $(y_1, y_2)$  平面への射影。 $a=1.9, \epsilon=0.150$ , ノイズの大きさ  $\sigma=10^{-15}$ 。ステップ 0 からステップ 5000 まで。

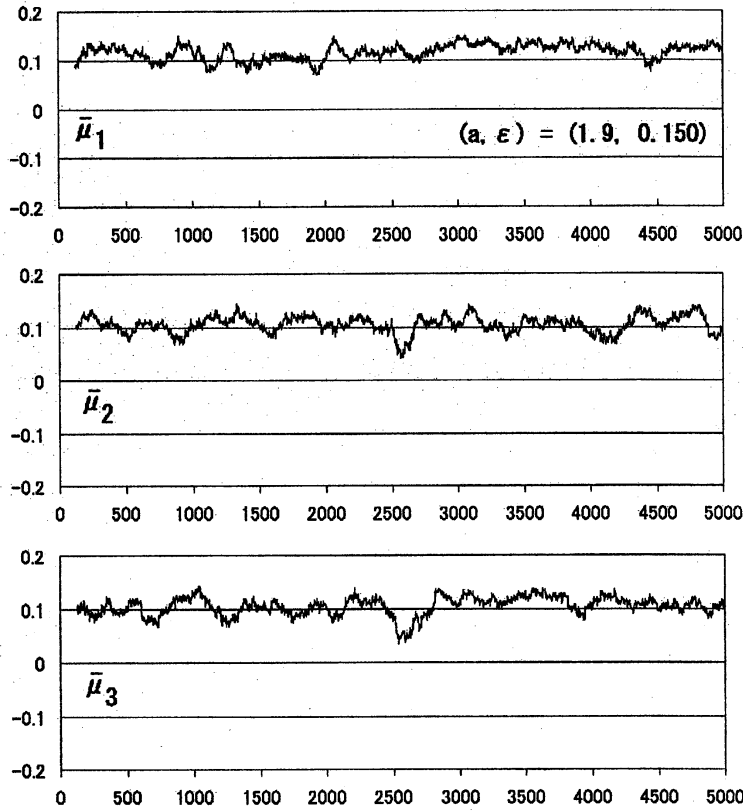


図 18 重み [322111] 付き 6 GCM における局所横断 Lyapunov 数の変化。  $a=1.9, \varepsilon=0.150$ , ノイズの大きさ  $\sigma=10^{-15}$ 。

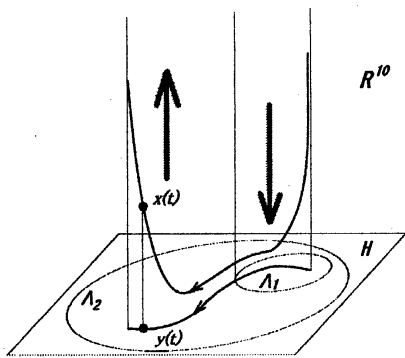


図 20 カオス遍歴のメカニズムの概念図。射影点  $y$  が「擬アトラクタ」 $\Lambda_1$  の内部を動くとき、直交補空間方向に安定であるから、 $x$  は  $H$  に接近する。射影点  $y$  が「擬アトラクタ」 $\Lambda_1$  の出口を見つけ、外に出て  $\Lambda_2$  の内部を動き回るようになると、直交補空間方向は不安定となり、 $x$  は  $H$  から離れる。

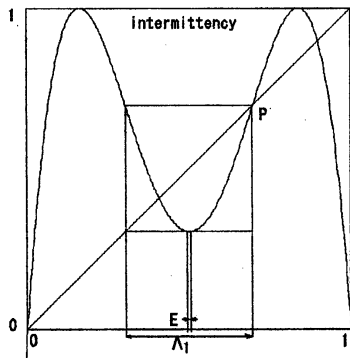


図 21 クライシス誘導型間欠性を示す 1 次元写像の例。

$$f(x) = 16(a-1)c(x-0.5)^2(c(x-0.5)^2 - 0.5) + a, \quad c = 1 + 1/\sqrt{1-a}, \quad a = 0.3033$$