数理解析研究所講究録
1119 巻 1999 年 171-178

マスロフ指数を含む高階の２次特性類[1]

横浜市立大学理学部数理科学科　宮崎直哉 (Naoya Miyazaki)[2]

1 Introduction

このノートでは、シンプレクティック幾何学に現れる様々な無限次元リー群[3] に同伴している特性形式（類）について、いくつか分かったことについて報告します。最も身近に現れるリー群としてはシンプレクティック多様体上のシンプレクティック変換群があげられますが、それ以外にもシンプレクティック幾何学にまつわるものとしてはフーリエ積分作用素のなす群や変形量子化の際に現れる非可換代数のうえの自己同型群などが挙げられます。ここではこれらの多様体（リー群）のある種の同語反復束を考えることによって特性形式を定義しようと言うわけですが、それを系統的に取り扱うために、最初にすこし抽象的概念（ラグランジアン・ファイバー束）を準備して、上記の群から得られる同語反復束がその特殊な例となるようにしておきたいと思います。大雑把に言ってファイバーがある共通なシンプレクティック多様体におけるラグランジアン部分多様体で、それらが滑らかに連なっているファイバー束をラグランジアン・ファイバー束と定義します（くわしくは次節を参照)。この束のファイバー方向の接空間を考えることによりシンプレクティック・ベクトル束が得られシンプレクティック２次特性類を構成しようと言うのがこのノートの大まかな方針です。このようにして２次特性類が構成できるのですが、この理論を先ほどのリー群に適用することで、様々な面白い結果がえられます。そのひとつとして考えている群が線形シンプレクティック群の場合には、得られる特性類にマスロフ類が含まれてきます。

他にもいくつか応用があるのですが、そのまえに少し無限次元リー群について基本的なことを振り返っておきましょう。カイパーの定理として良く知られているように無限次元ヒルベルト空間における可逆有界作用素全体のなす無限次元リー群 $GL(H)$ は可縮であります（従ってユニタリ群もそうです)。このような現象は無限次元であることを本質的に使って証明されます。それでは、これとは対照的に可縮になっていないような無限次元リー群（多様体）にはどのような例が存在するのでしょうか？　このノートの後半では前半で導入された２次特性類の応用として、これらの問題について考察したいと思います。結論としては既約非コンパクト・エルミート対称空間上のシンプレクティック変換群が可縮でないことがわかります。またこれ以外にも可縮でない例はフーリエ積分作用素や振動型積分変換などを用いることによって得られます。以上のことから正則フレッシェ・リー群には単に $GL(H)$ とは局所的なモデル空間が異なるだけでなく大域的な位相的性質の異なる例が数多く含まれていることがわかります。

---

[1] 京都大学数理解析研究所講究録「力学系と微分幾何学」（１９９９年９月１日-３日）用の原稿
Keywords:Maslov-form, Symplectic topology, Infinite dimensional Lie group, etc
[2] Supported by the Grant in Support of Promotion of Research at Yokohama City University
[3] ここで扱う無限次元リー群は主に [Om], [OMYK1,2] の意味での正則フレッシェ・リー群です

2 ラグランジアン・グラスマニアン多様体

いくつかの用語とそれに関する事実を簡単に復習しておきます (cf. [Ar], [Fu], [Ma], [Le1], [Le2], [Va])。

まず、ラグランジアン・グラスマニアン多様体について振り返っておきます。

(イ) $(x,y) \in \mathbf{R}^{2n} \to x + y\sqrt{-1} \in \mathbf{C}^n$ という同一視のもとで、$\mathbf{C}^n$ の標準的エルミート内積の虚部として定まるシンプレクティックフォームを σ とかきます。

(ロ) $\mathbf{R}^{2n}$ の実部分空間 λ について

(a)$\lambda^\sigma = \{v \in \mathbf{R}^{2n} | \sigma(\lambda, v) = 0\}$

(b) λ:isotropic$\iff \lambda \subset \lambda^\sigma \iff \sigma|_{\lambda\times\lambda} = 0$

(c) λ:coisotropic$\iff \lambda^\sigma \subset \lambda \iff \lambda^\sigma$:isotropic

(d) λ:Lagrangian$\iff \lambda = \lambda^\sigma \iff \lambda$:isotropic, coisotropic

(e) λ:symplectic$\iff \sigma|_{\lambda\times\lambda}$:nondegenerate

(ハ) ラグランジアン・グラスマニアン多様体を $\Lambda(n) = \{\lambda | \text{Lagrangian}\}$ で定義します。

(ニ) (事実1) ラグランジアン・グラスマニアン多様体にはユニタリ群 $U(n)$ が推移的に作用し $\lambda_{im} = \{x + y\sqrt{-1} | x = 0, y \in \mathbf{R}^n\}$ の等方部分群は $O(n)$。よって多様体としては $\Lambda(n) = U(n)/O(n)$ です。

(ホ) 事実1により下の写像 (Souriau map) が定義されます。

$$\begin{array}{rrcl} W: & \Lambda(n) = U(n)/O(n) & \to & U(n) \\ & \lambda = U_\lambda \lambda_{im} & \to & U_\lambda \cdot U_\lambda^t \end{array} \tag{1}$$

(ヘ) (事実2) $\sigma = d\theta$ (local) とすると、ラグランジアン部分空間 λ の上では $d\theta|_\lambda = \sigma|_\lambda = 0$ だからポアンカレの補題により局所的には λ に依存する関数 S_λ が存在し、$\theta|_\lambda = dS_\lambda$ が成立します。この関数のことを以下では母関数 (generating function) とよびます。更に、Souriau map と母関数はケイレー変換で結ばれています。

$$W(\lambda) = \frac{1 - \sqrt{-1}\mathrm{Hess}S_\lambda}{1 + \sqrt{-1}\mathrm{Hess}S_\lambda} \tag{2}$$

ただし、ここで Hess はヘッシアンを意味します。

3 ラグランジアン・ファイバー束と2次特性形式(類)

いよいよこの節は2次特性形式(類)を導入します (cf. [Mi2])。まずラグランジアンファイバー束の定義を与えておきます。

Definition 3.1 $\mathcal{M}$ が G 上のラグランジアン・ファイバー束であるとは $G \times S$ の部分束であり、写像 γ を伴い以下の条件を満足しているものである;

(*i*) G は(無限次元)多様体であり、S は偏極を持ったシンプレクティック多様体である

(*ii*) 任意の $g \in G$ に対して、ファイバー $\mathcal{M}_g (=: \gamma(g))$ が S のラグランジアン部分多様体である。

(iii) $ev : \mathcal{M} \ni (g, m_g) \mapsto m_g \in S$ で定義される写像に対し ev が滑らかな写像である。ただし、$g \in G,\ m_g \in \gamma(g)$。

注意 $\mathcal{M}$ は必ずしもラグランジアンベクトル空間とは限りません。一方、ラグランジアン部分束といったらラグランジアン部分ベクトル束の事であるとします。

我々は G として以下のようなものを想定しています。:

(a) ラグランジアン部分多様体の族 (ラグランジアン多様体のモヂュライ)

(b) 偏極を持つシンプレクティック多様体上のリー群のシンプレクティック作用。 etc.

これらのような想定下では、 $\mathcal{M} = \bigsqcup_{g \in G} \{g\} \times \gamma(g)$, ただし、$\gamma(g)$ はラグランジアン部分多様体あるいは正準グラフを意味します。

さて、ラグランジアンファイバー束に同伴する２次特性形式の導入を行いましょう。まず、次のように $\mathcal{M}$ 上にシンプレクティックベクトル束が誘導されます。$\mathcal{E} = ev^*(TS)$。J を概複素構造、h を $\mathcal{E}$ 上 ev により誘導されるエルミート構造であるとしておきます。このようにして我々は $\mathcal{E}$ に同伴するユニタリ・フレーム束 $\mathcal{U}$ を得ます。これは主 $U(m)$-束、ただし $2m = \dim S$ であります。さらに我々は以下のようにラグランジアン・ファイバー束を構成できます。$\gamma(g)$ が S におけるラグランジアン部分多様体であるという仮定から、接空間 $T_p\gamma(\varphi)$ はラグランジアン部分空間です。故に、我々は $\mathcal{L}_1$ ラグランジアン・ファイバー束を構成することが出来ます。一方、M が偏極を持っているので、我々はもうひとつ別のラグランジアン・ファイバー束 $\mathcal{L}_0$ を構成することが出来ます。各々のラグランジアン・ファイバー束 $\mathcal{L}_i$ $(i = 0, 1)$ において "$\mathcal{L}$-related" ユニタリフレーム束 $\mathcal{O}_i$ $(i = 0, 1)$ が同伴しています。これらは、構造群がユニタリ群から直交群へと簡約されて、$O(m)$ 主束になっています。そこで、各々の $O(m)$-束に関して、我々は $o(m)$-値接続形式 ω_i $(i = 0, 1)$ を固定します。さらに、$\phi = (1 - t)\omega_0 + t\omega_1$ とおいて、ファイバーに沿う積分で $m_k := \int_{[0,1]} c_{2k-1}(d\phi + \phi \wedge \phi)$、という形式を定義します。ただし、$c_i = Trx^{2k-1}$ です。

Theorem 3.2 m_k は閉 $(4k - 3)$-形式を定める。

Proof ストークスの公式、ビアンキの恒等式そして接続形式の歪対称性からわかる。

ここからは、G が (無限次元) リー群で各元にラグランジアン部分多様体が滑らかに連動しているものを考えます。

Example 1 $G = Sp(2n, \mathbf{R})$ で $S = (\mathbf{R}^{2n}, \omega) \ominus (\mathbf{R}^{2n}, \omega)$ の時には線形シンプレクティック群に同伴する２次特性類が構成されます。特に m_1 を使って $\mu(\Phi) = -\langle m_1|_{Sp(2n,\mathbf{R})}, \Phi\rangle$ と定義してやることによって次のことがわかります。

(homotopy) $Sp(2n, \mathbf{R})$ 内の２つのループがホモトピックになるのはそれらが、μ について同じ指数を持つときに限る。

(product) 任意の２つのループ Ψ_1, Ψ_2 in $Sp(2n,\mathbf{R})$ に対して、$\mu(\Psi_1\Psi_2)=\mu(\Psi_1)+\mu(\Psi_2)$。
(direct sum) If $n=n'+n"$ として、$Sp(2n',\mathbf{R})\times Sp(2n",\mathbf{R})$ を標準的な仕方で $Sp(2n,\mathbf{R})$ の部分群とみなす。その時、$\mu(\Psi'\oplus\Psi")=\mu(\Psi')+\mu(\Psi")$。
(normalization) ループ $\Psi:S^1\to U(1)\subset Sp(2n,\mathbf{R}):\Psi(t)=e^{2\pi it}$ は μ に関して指数 1。

上記の４つの性質がマスロフ指数[4] を特徴づけているので $\mu=-\langle m_1|_{Sp(2n,\mathbf{R})},\ \rangle$ がマスロフ指数と一致していることも示されたことになる。

Example 2 $G=\mathrm{Diff}_\omega(\mathbf{R}^{2n}), S=\mathbf{R}^{2n}\ominus\mathbf{R}^{2n}$ のとき、$\mathrm{Diff}_\omega(\mathbf{R}^{2n})\times\mathbf{R}^{2n}$ に同伴した２次特性類を得ることが出来ます。$m_1|_{\mathrm{Diff}_\omega(\mathbf{R}^{2n})}$ を用いることによって調和振動子の解（ハミルトン流）が非自明なサイクルを与えていることが簡単に示されます。

Example 3 $G=\mathrm{Diff}_\theta(T^*_\star N)$, $S=(T^*_\star N,d\theta)\ominus(T^*_\star N,d\theta)$ とするとき、$\mathrm{Diff}_\theta(T^*_\star N)\times(T^*N,d\theta)$ に同伴した２次特性類が構成されます。$N=S^n$ で φ_g をその上の測地流とします。そのとき φ_g は $\mathrm{Diff}_\theta(T^*_\star N)$ における非自明サイクルであることがわかります。

Example 4 $G=FIO(N)$, $S=(T^*_\star N,d\theta)\ominus(T^*_\star N,d\theta)$, $\gamma=WF$ (cf. [ARS], [OMY], [OMYK1,2])、このとき、FIO(N)$\times T^*_\star N$ に同伴した２次特性類が得られます（WF は波面を意味します）。これについても測地流の量子化で非自明サイクルになるようなものの存在が示されます。

さて、ここからは非コンパクトエルミート対称空間 M(非コンパクトエルミート多様体で、各点 p での測地的反転 σ_p が大域的な正則等長になっているようなもので結果的にはケーラー多様体にもなっている (cf. [He])) 上のシンプレクティック変換群と２次特性類について少し詳しくみていきます。今考えている空間が非コンパクトエルミート対称空間であることから、原点における接空間 M_o と M とは指数写像で同一視 $\exp:M_o\to M$ される。今度の場合は Diff $\omega(M)\times M$ における２次特性形式が得られることになります。ここでは特に１次形式を $\mathrm{Diff}_\omega(M)$ に制限して得られる形式を考えましょう。このように定義された閉１次形式はノントリビアルなコサイクルを定めているのでしょうか？　まずそれを調べるための準備をしましょう。

天下りではありますが、非コンパクト対称空間 M 上の正準変換群における別の閉形式を定義しましょう。そのために以下のようなダイアグラムを用いることにします。

$$\mathrm{Diff}_\omega(M)\times M\overset{\tilde{\tau}}{\to}\Lambda(2\dim_{\mathbf{C}}M))\overset{W}{\to}U(2\dim_{\mathbf{C}}M))\overset{\det}{\to}U(1),\qquad(3)$$

ここで、第１の写像 $\tilde{\tau}$ は φ に φ のグラフ上の点 $(p,\varphi(p))$ における接空間 λ を対応させるという写像であります。

[4] 通常マスロフ指数は次の様に定義される。$\rho:Sp(2n,\mathbf{R})\to U(1)$, $X\mapsto\det\iota(X^tX)^{-\frac{1}{2}}X))$、ただし ι は $Sp(2n,\mathbf{R})\cap O(2n)$ と $U(n)$ の同一視。この写像を用いて $[\Phi(t)]\in\pi_1(Sp(2n,\mathbf{R}))$ のマスロフ指数は $\mu([\Phi(t)])=\mathrm{degree}\circ\rho(\Phi(t))$ と定義される。ここで ρ が、線形シンプレクティック群のユニタリ群へのレトラクションを与えているが、無限次元のシンプレクティック変換群ではこのような議論を経てマスロフ指数を定義することは難しい。

このようなダイアグラムを用いることによって閉1次形式 m を以下のように定義します。

$$m = \frac{1}{2\pi}(\det \circ W \circ \tilde{\tau})^*(d\theta). \tag{4}$$

すると次が言えます。

Proposition 3.3 上の形 m は前出の2次特性形式 m_1 と同一のコホモロジー類を与える。

Proof これは両方ともラグランジアン・グラスマニアン上の2次特性形式の引き戻しであることからわかります。

さて、この閉1次形式の具体的な表示を得るために、しばらく非コンパクト・エルミート対称空間に関する事実を復習しておきましょう。よく知られているように原点 o を固定すると、以下の事実が成立しています。

1. （標準接続と呼ばれる特別な接続による）指数写像が接空間 M_o から M 自身への微分同相を与える。
2. M 上の正則等長変換群 $A(M)$ はコンパクト開位相に関して有限次元リー群である。
3. M 自身は単位元の連結成分 $G = A(M)_0$ と $K = \{g \in G | g(o) = o\}$ によって等質空間 G/K と表される。
4. この時、M_o はリー環 $Lie(A(M)_0)$ の部分空間とみなすことができ、群の作用 $\tau_{\exp X}$ $(X \in M_o)$ のプッシュフォワード $(\tau_{\exp X})_*$ が M_o から $M_{\exp X \cdot o}$ への（複素構造 J を保つ）平行移動を与える。

この平行移動を利用して原点における (正則) ユニタリーフレーム $\partial_{z_1}|_o, \cdots, \partial_{z_n}|_o$ を各点に散布して得られる大域的なフレームを $\theta_1, \cdots, \theta_n$ と記すことにすると、

$$X_1 = (\theta_1 - \bar{\theta}_1),\ Y_1 = \sqrt{-1}(\theta_1 + \bar{\theta}_1), \cdots,\ X_n = (\theta_n - \bar{\theta}_n),\ Y_n = \sqrt{-1}(\theta_n + \bar{\theta}_n) \tag{5}$$

はシンプレクティックフレームにもなっています。これを用いて次の具体的な表示を得ます。

Proposition 3.4

$$m = \frac{1}{\pi} d \arg(\langle \varphi^*(\theta_1^* \wedge \cdots \wedge \theta_n^*), \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n \rangle|_o) \tag{6}$$

ただし $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n)$ は上記のように定義されたシンプレクティックフレームで、$\theta^* = (\theta_1^*, \cdots, \theta_n^*)$ は θ のデュアルフレームであるとする。

Proof 証明はヤコビの包合系と式 (2) を用いて吉岡テクニック [Yo] を経て行われます。

これを用いることで次のことが証明できます。

Proposition 3.5 $M = D_{p,q}(\mathbf{C}) = \{Z \in M_{q,p} | 1_p - Z^*Z > 0\}$ すなわちI型の対称有界領域の時 m は正準変換群のノントリビアルコサイクルを定める。

Proof 方針としては、$SU^0(p,q;\mathbf{C})$ の１次分数変換（ハミルトン作用になっている）で適当な周期的フローを探し出してやることによって証明されるのですが、以下では必要となる記号の説明も加えて少し詳しく説明しましょう。まず最初にＩ型の対称有界領域 $D_{p,q}(\mathbf{C})$ は対称空間対による等質空間 $SU^0(p,q)/(U(q)\times U(p))$ と同一視されることに注意します。リー群 $SU^0(p,q)$ は $D_{p,q}(\mathbf{C})$ に以下のように作用しています ([He] を参照): いま、$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in SU^0(p,q)$ と $Z\in D_{p,q}(\mathbf{C})$ に対して、作用が

$$A\cdot Z=(cZ+d)(aZ+b)^{-1} \tag{7}$$

で定義され、この作用は推移的であり、複素構造とエルミート構造を保つことがわかります。

以下ではジーゲル埋め込みの座標系をもちいて計算します。任意の元 $\sqrt{-1}X=\sqrt{-1}\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$ $su(p,q)$ (ここで X_{11} は $p\times p$-行列, X_{12} は $p\times q$-行列, X_{21} は $q\times p$-行列, X_{22} は $q\times q$-行列に対して

$$\begin{bmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{bmatrix}=\exp(-t\sqrt{-1}X) \tag{8}$$

とすると $Z(P_0)=Z_0$ となるような任意の点 $P_0\in D_{p,q}(\mathbf{C})$ に対して

$$Z(\Phi(\exp(-t\sqrt{-1}X)\ P_0))=(\delta(t)Z_0+\gamma(t))\cdot(\beta(t)Z_0+\alpha(t))^{-1} \tag{9}$$

となる。特にもし $X=\mathrm{diag}\lambda$ $(\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_p,\lambda_{p+1},\cdots,\lambda_{p+q}))$ なら

$$\begin{aligned} & Z(\Phi(\exp(-t\sqrt{-1}X)\ P_0)) \\ = \ & \exp(-t\sqrt{-1}\mathrm{diag}(\lambda_{p+1},\cdots,\lambda_{p+q}))\cdot Z_0\cdot\exp(t\sqrt{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)) \end{aligned} \tag{10}$$

である。以下ではこのようなフローを φ_λ と記すことにする。更に、$\lambda\in\mathbf{Z}$ の場合には φ_λ は $D_{p,q}(\mathbf{C})$ 上の周期的なハミルトンフロー、すなわち φ_λ が正準変換群 $\mathrm{Diff}_\omega(D_{p,q}(\mathbf{C}))$ 内のサイクルを定めることになる。

このサイクル φ_λ に対して、m とのペアリングを考える。

$$\begin{aligned} & \int_{\varphi_\lambda} m \\ = \ & \frac{1}{\pi}\int_{\varphi_\lambda} d\arg\det\frac{\partial\varphi_\lambda^{\mathrm{hol}}(Z,Z^*)}{\partial Z} \\ = \ & \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d}{dt}\{\arg(\det\exp(-t\sqrt{-1}\mathrm{diag}(\lambda_{p+1},\cdots,\lambda_{p+q}))^p\cdot \\ & \qquad \det\exp(t\sqrt{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_p))^q\}dt \\ = \ & q\sum_{i=1}^{p}\lambda_i-p\sum_{p+1}^{p+q}\lambda_j. \end{aligned} \tag{11}$$

これは、閉１次形式の非自明性を与えている。

参考文献

[Ar] V. I. Arnol'd, *On a characteristic class entering in quantization conditions*, Func.Anal.Appl. 1 (1967), pp. 1-13.

[ARS] M. Adams, T. Ratiu and R. Schmid, *Thte Lie group structure of diffeomorphism groups and invertible Fourier integralo operators with applications,* Infinite dimentional Groups with applications, eds. V. Kac, Springer, (1985),pp. 1-69

[Ba] A. Banyaga, *Sur la structre du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique*, Comm. Math. Helv. 53, (1978), pp.174-227

[Bo] R. Bott, *Lectures on characteristic classses and foliations,* In: Lectures on algebraic and differential topology, Lecture Notes in Mathematics, 279, Springer, Berlin-Newyork, (1972), pp.1-94

[CS] S. S. Chern and J.Simons, *characteristic forms and geometric invariants,* Ann. Math. 99 (1974) pp. 48-69

[GV] C. Godbillon and J. Vey, *Un invarinar des feuilletages de codimension un*, C. R. Acad. Sci. Paris 273 A (1971), pp. 92-95

[Fu] D. Fujiwara, *Asymptotic methods in Linear Partial Differential Equations*, Iwanami, Tokyo, (1977) (in Japanese)

[He] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie groups, and Symmetric spaces*, Academic Press, (1978)

[Ho] L. Hörmander, *Fourier integral operators I*, Acta. Math. 127 (1971) pp. 79-183

[Le1] J. Leray, *Analyse lagrangienne et mechanique quantique*, Seminaire du College de France 1976-1977; R.C.P.25, Strasbourg, (1978).

[Le2] J. Leray, *Lagrangian analysis and mechanics;a mathematical structure related to asymptotics exmansion and Maslov index,* MIT Press, Cambridge(1981)

[Ma] V. P. Maslov, *Theory of Perturbations and Asymptotic Methods*, izd. MGU (1965).

[Mi1] N. Miyazaki, *A remark on the Maslov form on the group generated by invertible Fourier integral operators*, Lett. Math. Phys. 42, (1997), pp.35-42

[Mi2] N. Miyazaki, *Secondary characteristic classes and Feynman path integrals*, submitted.

[Om] H. Omori, *Theory of infinite dimensional Lie groups*, Amer. Math. Soc. Trans.158, (1996).

[OMY] H. Omori, Y. Maeda, and A. Yoshioka, *On regular Fréchet-Lie groups I, II*, Tokyo J. of Math., 3, 4, (1980), (1981) pp. 353-390 pp. 231-253.

[OMYK1] H. Omori, Y. Maeda, A. Yoshioka, and O. Kobayashi, *On Regular Fréchet-Lie Groups III, IV, V, VI, VII, VIII*, Tokyo J. of Math., 4, 5, 6, 6, 7, 8, (1981), (1982), (1983), (1983), (1984), (1985), pp. 255-277, pp. 365-398, pp. 39-64, pp. 217-246, pp. 315-336, pp. 1-47.

[OMYK2] H. Omori, Y. Maeda, A. Yoshioka, and O. Kobayashi, *The theory of infinite dimensional Lie groups and its applications,* Acta Appl. Math. 3 (1985), pp.71-105.

[Va] I. Vaismann, *Symplectic geometry and secondary characteristic classes,* Progress in Math. 72, (1987), Birkhäuser

[We] A.Weinstein, *Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds*, Advances in Mathematics, 6, (1971), pp. 329-346.

[Yo] A.Yoshioka, *Maslov Quantization Conditions for the Bounded States of the Hydrogen Atom*, Tokyo Journal of Math. 9, (1986). pp. 415-437.