

# 安定・不安定多様体からみる相空間の輸送<sup>1</sup>

名古屋大学大学院理学研究科 平田 吉博<sup>2</sup>

Nagoya University, Yoshihiro Hirata

## 概要

ハミルトンの運動方程式を調べる，というハミルトン系の研究は，単に解析力学の定式化や量子力学への橋渡しという役割に留まらず，それ自身が興味深い内容を提供し続けている．特に高自由度ハミルトン系は，統計力学の基礎付けとの関わりもあり，数学，物理の両面から活発な議論が展開されている．本稿では，高自由度ハミルトン系の相空間の大域的な輸送に関する問題を解析的に取り扱う1つの手法を紹介し，その今後についても議論したい．

## 1 はじめに

天体の運動から化学反応まで，様々な時間・空間スケールにおいてハミルトン系と考えられる現象が存在する．多くの場合，これらの運動方程式は非可積分であり，長時間後における系の振舞いは予測不可能である．従って，これらの問題へのアプローチは解析学的な対象（微分方程式）を，幾何学的な対象（トポロジー）へと読み替え，主に定性的に理解することが中心となる<sup>3</sup>．

特に，近可積分系（可積分系からの摂動）における軌道の輸送は，多くの場合に非常に遅いことが知られている．実際の物理系も多くは非可積分系であるが，近可積分系とみなせる例も多くある．例えば太陽系の惑星の運行を考えると，太陽と各惑星の2体問題は可積分であるが，惑星間の相互作用は摂動としてよい．このような近可積分系の長時間後の振舞いは数学的のみならず物理的にも非常に重要であるが，系がカオスである場合，摂動展開は一般に収束しないため工夫を要するのである．我々は安定・不安定多様体と呼ばれる不変多様体に目をつけ，相空間の大域的な構造から輸送現象を理解することを目的としている．

本稿の構成は以下のとおりである．初めに2節と3節において，扱うべき対象であるハミルトン系とシンプレクティック写像について概観する．続いて4節において輸送について，5節において安定・不安定多様体について述べる．6節では高自由度ハミルトン系における安定・不安定多様体の性質を調べ，7節でその結果をまとめ，今後の方針を議論する．

<sup>1</sup>本稿の内容は，その多くが野崎一洋，小西哲郎両氏との共同研究に基づいている．この場を借りて，両氏に感謝したい．

<sup>2</sup>E-mail address: yhirata@allegro.phys.nagoya-u.ac.jp

<sup>3</sup>無論，解析学によるアプローチも有用であるには違いないが．

## 2 ハミルトン系入門

本稿において扱う力学系は、すべて以下の  $N+1$  自由度自励ハミルトン系、またはその派生である [1]:

$$H = H(q, p), \quad q, p \in \mathbf{R}^{N+1}, \quad H: \mathbf{R}^{N+1} \times \mathbf{R}^{N+1} \rightarrow \mathbf{R},$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (1)$$

ここで  $N=0$  の場合 (1 自由度ハミルトン系) は、ハミルトン関数が保存量となるため、いつでも可積分である。一般に自励ハミルトン系の場合、自由度と等しい数の包摂的積分 (保存量) の存在は、系の可積分性を意味する。ここで包摂的とは、任意の 2 つの積分がポアソン括弧に対し交換することである。

可積分系の性質はこれまでによく調べられている。最も重要な結果の 1 つとして、次の Liouville-Arnold の定理が挙げられる:

**定理 1 (Liouville-Arnold)** ハミルトン系 (1) に、ハミルトニアン  $H$  と独立な  $N$  個の包摂的積分  $\Phi_1, \dots, \Phi_N$  が存在したとする。ハミルトニアン積分自身を  $\Phi_{N+1}$  と書く。このとき系は求積法により積分可能であり、各積分値を一定とした  $N+1$  次元多様体  $M_a := \{(q, p) \in \mathbf{R}^{N+1} \times \mathbf{R}^{N+1} \mid \Phi_j = a_j, j = 1, \dots, N+1\}$  は、以下の仮定の下で  $N+1$  次元トーラス  $T^{N+1}$  に微分同相である。

- $M_a$  はコンパクトかつ連結である。
- 勾配ベクトル  $\nabla\Phi_j$  は、 $M_a$  の各点で 1 次独立である。

この定理の主張するところは、可積分系のほとんどの軌道はトーラスに絡み付くような多重周期運動になるということである。軌道自体の周期性だけでなく、そのかたまりとしての  $M_a$  のトポロジーまで決めているところが本質である。

上で紹介したような可積分系に対しては、適当な正準変換を施すことにより作用・角変数を導入するとよい。具体的な定義や計算法については参考文献に譲ることとし、ここでは本質のみ述べる。すなわち正準変換  $(q, p) \mapsto (\theta, J)$  により、ハミルトニアンを

$$H = H_0(J) \quad (2)$$

の形に変換することが可能である。ここで  $J$  は作用変数と呼ばれる。運動方程式は、

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H_0}{\partial J} = \omega(J), \quad \dot{J} = -\frac{\partial H_0}{\partial \theta} = 0 \quad (3)$$

と書け、直ちに積分可能である。その解は、

$$\theta(t) = \omega(J)t + \theta(0), \quad J(t) = J(0) \quad (4)$$

となり、 $J$ はトーラスの“一般化された半径”を表し、 $\theta$ はそれに共役な角変数であることがわかる。

さて  $N \geq 1$  の場合、ハミルトニアンと独立な積分がいつも存在するとは限らない。つまり一般には非可積分であり、カオスになる。よって我々カオスの研究者が問題にするのは、 $N \geq 1$  の場合である。

次に、本稿での主役となる近可積分ハミルトン系を定義しよう。近可積分とは可積分に十分近いという意味であり、可積分系からの摂動ハミルトニアン

$$H = H_0(J) + \epsilon H_1(\theta, J) + \epsilon^2 H_2(\theta, J) + \dots \quad (5)$$

を考えることを意味する。ここで  $|\epsilon| \ll 1$ ,  $J \in D \subset \mathbf{R}^{N+1}$ ,  $\theta \in T^{N+1}$  である。Poincaréはこのような問題を研究することを力学の基本問題と呼んだ [2]。この基本問題に対する解答は現在までに得られていない。いや、何をもってこの問題の解答とするかさえ明らかでない。この線上におけるこれまでの結果は、MacKayとMeissによる論文集 [3] が参考になる。興味のある読者は参照されたい。

### 3 シンプレクティック写像

ところで高自由度系の研究は、 $2N + 2$ 次元相空間の幾何学の研究である。しかし興味の対象となる最も簡単な  $N = 1$  の場合でさえ、視覚に基づく理解は困難である。そこで考えられる縮約として、Poincaré写像が挙げられる。幸いハミルトン系の場合、いつでも保存量ハミルトニアンが存在するため、個々の軌道は  $2N + 2$ 次元相空間の中の  $2N + 1$ 次元超曲面（エネルギーレベル多様体）に拘束される。このエネルギーレベル多様体上に、さらに  $2N$ 次元超平面（Poincaré断面）を考える。このPoincaré断面は、エネルギーレベル多様体内で軌道と横断的に交わるように選ぶことにする。ほとんどすべてのコンパクトな軌道はPoincaré断面と無限回交わり、ある点から次の点は一意的に決まる。このように、 $2N + 1$ 次元空間内の連続力学系の軌道が  $2N$ 次元超平面を一方から他方に横切る点列は、その超平面上の離散力学系と考えられる。これをPoincaré写像と呼ぶ（図1参照）。 $N = 1$ の場合、Poincaré写像は2次元であり、視覚的に理解するのに都合がよい。明らかにPoincaré写像の不動点や周期点は元のハミルトン系の周期軌道であり、Poincaré写像を（例えば数値計算によって）作ることににより、その周期軌道の近傍の様子を知ることができるのである。

ここで本質的なことは、Poincaré写像はしかるべき手続きを踏んで構成してやれば、ハミルトン系の根本的な性質であるシンプレクティック性を持つようにできる、ということにある。シンプレクティック性とは、軌道の時間発展が正準変換の性質を持つということであり、 $N + 1$ 自由度ハミルトン系の解軌道  $(q(t), p(t)) =$

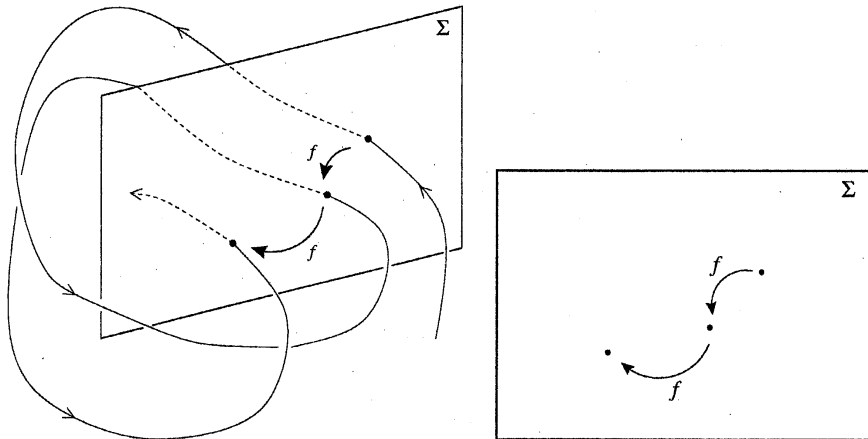


図 1: Poincaré 写像

$(q_1(t), \dots, q_{N+1}(t), p_1(t), \dots, p_{N+1}(t))$  に対して,

$$\sum_{j=1}^{N+1} dq_j(t) \wedge dp_j(t) = \sum_{j=1}^{N+1} dq_j(0) \wedge dp_j(0) \quad (6)$$

が成り立つことである. Poincaré 断面を  $\Sigma = \{(q, p) | q_{N+1} = \text{const.}, p_{N+1} > 0\}$  によって定義する. このとき  $\Sigma$  は  $(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$  によって張られる線型空間である. Poincaré 写像を  $f$  とし,  $f: \Sigma \ni (q, p) \mapsto (q', p') \in \Sigma$  とする. このとき, Poincaré 写像におけるシンプレクティック性は次式で表される:

$$\sum_{j=1}^N dq'_j \wedge dp'_j = \sum_{j=1}^N dq_j \wedge dp_j. \quad (7)$$

これは決して自明なことではなく, Poincaré-Cartan の積分不変式を用いて示されることを付け加えておく. 最も簡単な  $N = 1$  の場合, 性質 (7) は向きも含めた面積保存性を表す (図 2).

さて, ある与えられた力学系を相手にする場合, Poincaré 写像は一般に解析的に構成することができない<sup>4</sup>. 1979 年に Chirikov は, 比較的緩やかな仮定の下, 近可積分 2 自由度ハミルトン系の Poincaré 写像を摂動論的に構成した [4]. その結果は, 標準写像 (The standard map; SM) と呼ばれる次の 2 次元シンプレクティック写像 (面積保存写像) に一致する:

$$\begin{cases} q' = q + p', \\ p' = p + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi q). \end{cases} \quad (8)$$

<sup>4</sup>もしそれができるのであれば, 少なくともその回転方向には積分が可能であり, その積分可能性を表す保存量が存在することになる. このことは, 与えられた力学系のある自由度が分離可能であることを意味し, 実際の解析はその自由度を消して行えばよい.

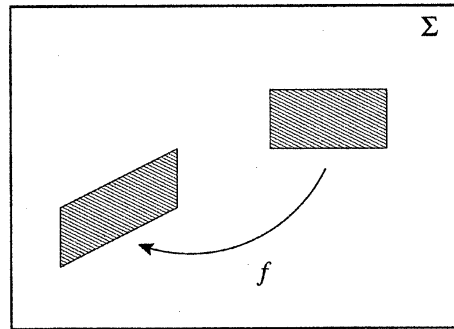


図 2: 面積保存性. 斜線の部分の面積は等しく, 向きも保存される.

ここで  $0 < K \ll 1$  である. この結果の意味するところは大きい. つまり, 2 自由度ハミルトン系自身を研究する代わりに, 標準写像等の面積保存写像を研究することが正当化されたのである.

高自由度系に話を移そう. これまで行われてきた研究のほとんどは, Poincaré 写像のモデルとして,

$$\text{面積保存写像の直積 + 弱い結合} \quad (9)$$

という形を用いている. 代表的なものは, Froeschlé 写像  $(q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto (q'_1, q'_2, p'_1, p'_2)$ ,

$$\begin{cases} q'_1 = q_1 + p'_1 \\ q'_2 = q_2 + p'_2 \\ p'_1 = p_1 + a \sin q_1 + c \sin(q_1 + q_2) \\ p'_2 = p_2 + a \sin q_2 + c \sin(q_2 + q_1) \end{cases} \quad (10)$$

である [5]. 写像 (10) は, 4 次元シンプレクティック写像であるが, 明確な指導原理に基づくものではない. すなわち悪く言えば, 人間が勝手にきつと (9) のようであろう, と考えて持ち出されたものである<sup>5</sup>. しかしこれまでのところ, そんなに悪い結果与えるようではないので, とりあえずしばらくは (9) の形を仮定して解析を進めてみることにする.

## 4 近可積分系における遅い輸送

話は変わって, 本節では主題の 1 つである輸送現象について述べる. 輸送とは, 相空間のある領域が系の時間発展に伴ってどのように広がっていくかを調べるといふ問題である. 大風呂敷を広げれば, 統計力学やエルゴード理論の基礎ともいえる.

<sup>5</sup>そのことは, Froeschlé の原論文からもみてとれる. そこには, Arnold が提案した, とある. もちろん現在のところ, 偉大な数学者 Arnold に逆らう気はないが.

## 4.1 2自由度系

まず2自由度系について述べておく。定理1が保証するように、可積分系のほとんどすべての軌道は2次元トーラス上の準周期運動になる。つまり、相空間は2次元トーラスで埋められる。さらにこのトーラスは、若干の摂動の下では多少変形されるが、その大部分は壊れず残ることが証明されている（KAM理論 [6]）。ところで、個々の軌道は3次元エネルギー曲面上に拘束される。トーラスはエネルギー曲面に対して余次元1であるため、1つのトーラスはエネルギー曲面を内と外に分ける。軌道の一意性から、トーラスの内側の軌道は外側に出ることができず、トーラスがある限り相空間の大域に渡る大きな運動は起こらない。このように、2自由度の近可積分系ではトーラスで区切られた領域に軌道は束縛され、相空間に大域的な意味でのエルゴード性は成り立たない。

## 4.2 Arnoldの例

高自由度系では事情が異なる。考えるハミルトン系の自由度を  $N$  とする。KAM定理は依然成り立つが、トーラスの次元は  $N$  次元である。一方、エネルギー曲面は  $2N - 1$  次元であり、 $N \geq 3$  のとき KAM トーラスはエネルギー曲面を二分することはできない。つまり、KAM トーラスがあろうとあるまいと、軌道は相空間の至るところに行くことができる。いや、言い過ぎた。正確には、相空間の至るところにいく可能性がある、というべきであろう。次元勘定では行けるのだが、実際に相空間内に対応する軌道があるかどうかは別問題だ。

高自由度系において、KAM トーラスがあっても大きな輸送が可能になることをはじめて具体的に示したのは、Arnold である。1964年、Arnold は次のハミルトニアン

$$H = H_0 + \epsilon H_1, \quad (11)$$

$$H_0 = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2), \quad (12)$$

$$H_1 = (\cos \phi_1 - 1)(1 + \mu B), \quad (13)$$

$$B = \sin \phi_2 + \cos t, \quad (14)$$

に対して、摂動パラメータ  $\epsilon$  がどんなに小さくても有限である限り、カオス的な軌道は相空間のいたるところへ行けることを示した [7]。ただしその輸送の速度は、 $\epsilon \rightarrow 0$  に対し指数的に小さく、 $\mathcal{O}(\exp(-1/\sqrt{\epsilon}))$  である。

この結果は、次の2点において非常に重要である。

- 大きな輸送が可能になるために、摂動パラメータの臨界値がない。
- その輸送は非常にゆっくりとしている。

つまり、近可積分ハミルトン系において相空間を遍く巡るような軌道はいつでも存在するが、 $\epsilon$ が小さい場合、それは永遠とも思えるほど長く初期値の近くにいる。この種の運動は Arnold 拡散と呼ばれることが多い。ただし本当に運動が拡散的であるかどうかは明らかでない。

ところで Arnold のハミルトニアンはかなり特殊な形をしているといわざるを得ないが、その後の仕事により Arnold の示唆したゆっくりとした運動はかなり一般的であることが明らかになっていく [8]。その 1 つの正当化が、次小節で挙げる Nekhoroshev 理論である。

### 4.3 Nekhoroshev 不等式

Nekhoroshev は 1977 年に、近可積分ハミルトン系

$$H = H_0(J) + \epsilon H_1(J, \theta) \quad (15)$$

に対し、 $|\epsilon| \ll 1$  の場合についての作用変数  $J$  の安定性を議論した [9]。ここでハミルトニアン (15) は、Poincaré のいう力学の基本問題の線上にあることに注意されたい。課すべき仮定は、非摂動のハミルトニアン  $H_0(J)$  が "steep" であること。この定義は非常にわかりにくいので、ここで挙げるのはやめる。きわめて緩やかな条件であり、たいていの場合満たされることのみ付け加えておく。

Nekhoroshev は  $\epsilon$  が小さいとき作用変数  $J(t)$  は、

$$|J(t) - J(0)| < C_1 \epsilon^\alpha, \quad \text{for } 0 < t < \exp\left(\frac{1}{C_2 \epsilon^\beta}\right) \quad (16)$$

のように、非常に長い時間にわたり初期値のすぐ近くにいることを示した。ここで  $\alpha, \beta, C_1, C_2$  は、系の自由度  $N$  にのみ依り系の詳細に依存しない定数である。その後も Nekhoroshev の評価式は改良され、現在最良の評価は  $\alpha = \beta = 1/2N$  である [10]。

前小節で挙げた Arnold の評価はある意味輸送の下限を与えるが、Nekhoroshev の評価は (16) から明らかなように、上からの評価である。上下どちらからの評価も、 $\mathcal{O}(1)$  の輸送を得るためには  $\exp(1/\epsilon^\beta)$ ,  $0 < \beta < 1$  という時間がかかることを示唆しており、これら 2 つの理論は非常に相性がよい。このためこれらはたびたび引き合いに出されるが、証明の方法はまったく異なり、これらの間の関係は未だ明らかになっていない。

## 5 近可積分ハミルトン系におけるホモクリニック分岐

さて、本稿のもう 1 つの主題である安定・不安定多様体に話を進めよう。簡単のため、2 自由度ハミルトン系とその Poincaré 写像である面積保存写像を考える。

Poincaré 写像を  $f: D \rightarrow D$ ,  $D \subset \mathbf{R}^2$  とし,  $x_0 \in D$  を  $f$  の不動点とする. すなわち  $f(x_0) = x_0$  である. 不動点  $x_0$  における安定・不安定多様体  $W_{x_0}^\pm$  は,

$$W_{x_0}^\pm = \{x \in D \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f^{\pm n}(x) = x_0\} \quad (17)$$

によって定義される. つまり, 正・負方向の写像の繰り返しにより不動点に流れ込む軌道の集合である.

## 5.1 安定・不安定多様体とホモクリニック分岐

ここでは簡単な例により, ハミルトン系における安定・不安定多様体の性質と重要性について紹介する. ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^4 - q_1^2) + \frac{1}{2}q_2^2 + \epsilon \tilde{V}(q_1, q_2) \quad (18)$$

で定義される 2 自由度ハミルトン系の  $q_2 = \text{const.}$ ,  $p_2 > 0$  で定義される Poincaré 写像を考える. ここで  $\epsilon$  は, 実数のパラメータである.

まず  $\epsilon = 0$  のとき, ハミルトニアン (18) は, 2 つの分離した 1 自由度ハミルトン系の直積であるため, 可積分である:

$$H = H^{(1)} + H^{(2)}, \quad (19)$$

$$H^{(1)} = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}(q_1^4 - q_1^2), \quad (20)$$

$$H^{(2)} = \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}q_2^2. \quad (21)$$

ここで,  $H^{(1)}$  は二重底ポテンシャル中を運動する質点の,  $H^{(2)}$  は調和振動子のハミルトニアンである. 調和振動子は, 平衡点を除きすべての軌道が  $2\pi$  周期である. すなわちこの場合の Poincaré 写像は,  $H^{(1)}$  で定義される 1 自由度ハミルトン系の相空間を, 時間  $2\pi$  毎にストロボをたいて観察することに対応する.

図 3 を参考にしながらこの Poincaré 写像の定性的な性質を理解しておこう. まず不動点は  $(0, 0)$ ,  $(\pm 1/\sqrt{2}, 0)$  の 3 つである. このうち原点は双曲的不動点, 残りの 2 つは楕円的不動点である<sup>6</sup>. 楕円的不動点のまわりの閉曲線は, 定理 1 のいうトーラスであり, 片側の井戸の底の小さな振動を表す. 一番外側の大きな閉曲線は両側の井戸を行き来する大きな振動を表し, これもトーラスである. その間にある 8 の字型の閉曲線は 2 つの性質の違う振動を分離することから, セパトトリクス (separatrix, 分離閉曲線) と呼ばれる. これは物理的には, たとえば片側の

<sup>6</sup>ハミルトン系の Poincaré 写像では, シンプレクティック性から漸近安定な不動点は存在し得ない. 2 自由度系に対していえば, 面積保存性よりヤコビ行列の行列式の値は 1 であり, 固有値は  $\{\lambda, 1/\lambda\}$  という組である. そのうち純虚数の固有値を持つもの ( $\lambda = e^{i\theta}$ ) を楕円的不動点と呼ぶ. これは Lyapunov の意味で安定である. また,  $\lambda > 1$  であるものは双曲的サドルであり, ハミルトン系の業界では単に双曲的不動点と呼ぶ.



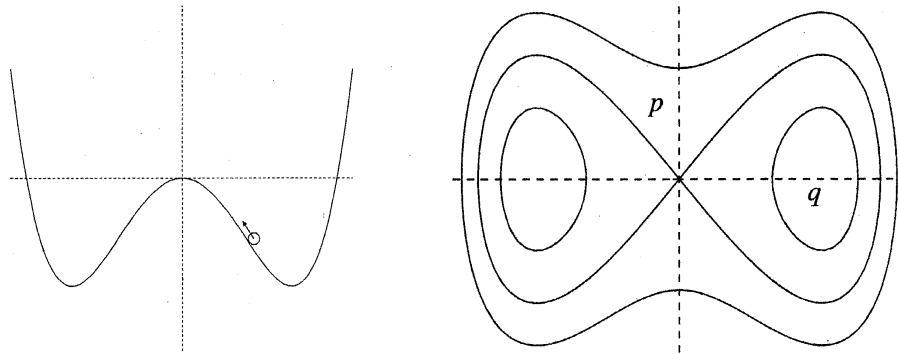


図 3: 二重底ポテンシャルと、その相空間。

井戸の底に置いた質点に、井戸をちょうど登るだけのエネルギーを持たせた運動に対応する<sup>7</sup>。

このセパトริกスは別の見方をすると、原点の双曲不動点から出て行く不安定多様体と、入ってくる安定多様体が（偶然）一致したものである。可積分系では、このように安定多様体と不安定多様体が一致して、1つの閉曲線となることが許される。

しかし  $\epsilon \neq 0$  として、2つのハミルトン系の間には結合を入れるとそうはいかない。このとき2自由度ハミルトン系(18)は可積分であることが保証されない。一般には非可積分であり、カオスになる。そして原点に入る安定多様体と原点から出て行く不安定多様体は一致する必要は無く、有限角度をもって交差するようになる。このように同じ不動点に属する安定多様体と不安定多様体が横断的に交差したとき、その交点を横断的ホモクリニック点と呼ぼう。単振り子のようにいくつかの双曲的不動点が存在し、それらの安定・不安定多様体が交差する場合は、ヘテロクリニックと呼ぶ。両者に定性的な差は無いため、ホモクリニックで代表することにする。

ここでホモクリニック点の産み出すきわめて複雑な様相、ホモクリニック構造について見ておこう。まずホモクリニック点は1個あると無限個存在する。なぜならホモクリニック点は安定多様体上の点であり、無限回の写像をもって双曲的不動点に達するが、それらはすべて双曲的不動点とは異なる。またホモクリニック点は不安定多様体上にもあるはずだから、これら2つの多様体は無限回交わることになる。この状況が可能になるためには、安定・不安定多様体は振動しながら交わるしかない（図4左）。さらに写像の面積保存性から、2つの多様体の囲う面積はどれも等しい。ホモクリニック点同士の間隔は不動点に近づくにつれて指数的に短くなるから、不安定多様体は写像を繰り返すにつれ指数的に引き伸ばされ激しく振動する。写像の負の反復における安定多様体も同様であるため、図4右

<sup>7</sup>これは無限時間かけて井戸を登りきる。もし有限時間で登ってしまうと、ハミルトン系の時間可逆性から不動点に置いた質点がいつのまにか滑り降りてしまうことになり、軌道の一意性が破れて矛盾するから。

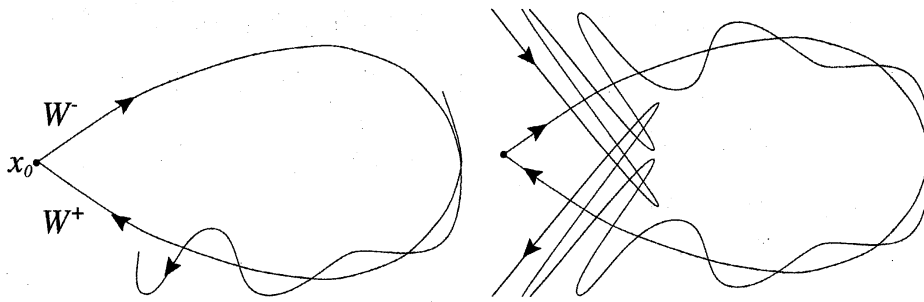


図 4: ホモクリニック点とホモクリニック振動

のように安定・不安定多様体は 2 次的な交差を起こし、双曲的不動点はホモクリニック点の集積点となる。ここまでの議論は、写像の面積保存性と安定・不安定多様体の定義のみから導かれることに注意されたい。このようなホモクリニック構造を初めて「発見」したのは Poincaré である。彼はその著書 [2] の中にホモクリニック構造は一種の格子、ある種の織物、あるいは無限に引き締められた結び目を持つ網のようなものを形成しているとし、その複雑さは驚くべきものであって、描いて見せようとも思わないとしている。

しかしこのホモクリニック構造には、単なる複雑さのみで片付けてしまうには惜しいほどの情報が詰まっている [1]。まず横断的なホモクリニック点の存在から、ハミルトニアンと独立な積分が存在しないことが示される。実はもっと強く、ホモクリニック構造の中には Smale 馬蹄型力学と同型な力学が埋め込まれていることがいえる。ハミルトン系の力学の中に、パイこね変換と同様な折り畳みと引き伸ばしの構造、コイン投げと同型なランダムな軌道がいくらでも存在するということが明らかになるわけである。さらに、安定・不安定多様体の囲う領域は、可積分系のセパトリクスを越えて内から外へ、またその逆に移動する軌道達をあらわす。可積分系では、セパトリクスの内側と外側は分離され、この逃避は起こらない。これがまさに安定・不安定多様体のもたらす輸送である。次小節でもう少し詳しく見てみよう。

## 5.2 Melnikov の方法

2 自由度ハミルトン系の Poincaré 写像のモデルである面積保存写像のホモクリニック構造は、これまでに非常によく調べられている。この方向における研究の第一歩は、これから紹介する Melnikov の方法 [11] である。1963 年に Melnikov は、周期的な外力を受けた 1 自由度ハミルトン系

$$\dot{x} = f(x) + \epsilon g(x, t), \quad x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \quad (22)$$

の Poincaré 写像に、横断的ホモクリニック点が存在する条件について調べた<sup>8</sup>。ここで  $f = \mathbf{J}\nabla H$ ,  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  であり、 $g$  は  $t$  に関して周期  $T$  を持つとする。すなわち  $g: \mathbf{R}^2 \times S^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$  である。また  $f, g$  には適当な滑らかさを仮定する。 $\epsilon = 0$  に対しては以下の仮定を課す。

- 双曲的サドル  $x_0$  に対するホモクリニック軌道  $q_s(t)$  が存在する。
- ホモクリニック軌道の内側は、周期軌道で埋まる。
- その周期軌道達の回転数は、連続かつホモクリニック軌道に向かって単調減少である。

これら 3 つの仮定の下、Melnikov 関数は次式で定義される：

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q_s(t-t_0)) \wedge g(q_s(t-t_0), t) dt. \quad (23)$$

ここで wedge 積  $\wedge$  は、

$$a \wedge b = a_1 b_2 - a_2 b_1, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

によって定義される。特に  $g$  もハミルトン系であるとき、すなわち適当な  $G(u, v; t)$  が存在して  $g_1 = \partial G / \partial v$ ,  $g_2 = -\partial G / \partial u$  なるとき、(23) はポアソン括弧を用いて、

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{H(q_s(t-t_0), G(q_s(t-t_0), t))\} dt \quad (25)$$

と書ける。

この Melnikov 関数が書き下されたとき、その ( $t_0$  に関する) 一位の零点の存在が横断的ホモクリニック点の存在を意味する。すなわち Melnikov 関数は、与えられたハミルトン系のカオスを即座に予言する。

ここでこの理論の本質は、興味ある多くの場合において広義積分 (23) または (25) が、複素関数論における留数定理を用いて具体的に書き下されてしまう、という点にある。このことにより、Melnikov の方法はハミルトン系のみならず、散逸系のカオスの多くを証明している。

Melnikov の方法は、双曲的不動点の双曲度、つまり固有値の 1 からのずれが小さいとき興味深い結果を与える。双曲的不動点の固有値の大きい方が  $1 + \epsilon^k$ ,  $k > 0$  であるとき、安定・不安定多様体の第一交点 (The principal intersecting point; PIP) に

<sup>8</sup>より正確には、Melnikov はホモクリニック接触の起こる条件について調べたというべきだが、本稿の目的から外れるのでここではそう述べさせていただいた。また、 $f$  がハミルトン系であるという制限も本来は必要ないが、話を簡単にするためにここでは仮定する。

おける交差角は、 $\epsilon \rightarrow 0$  に対し  $O(\exp(-\alpha/\epsilon^\beta))$ ,  $\alpha, \beta > 0$  であることが示される<sup>9</sup>.  
 そして摂動の大きさ  $\mu$  と  $\epsilon$  の間に何らかの関数関係があるとき、つまり  $\mu = \mu(\epsilon)$  であるとき、Melnikov の方法は適用できない. このような状況は、実際に興味あるハミルトン系に対し頻繁に現れる. この点については次小節で述べることにする.

### 5.3 指数的に小さなホモクリニック分岐

外力が  $\epsilon \sin(2\pi t/\epsilon)$  の様な形で、速く変化しかつ小さいとき、Melnikov の方法は適用できないことは早くから知られていた. 正則摂動論に基づく Melnikov の方法が、このような特異摂動問題に適用できないのは当然である.

Neishtadt は平均化を用い、上のような外力下の 1 自由度ハミルトン系の Poincaré 写像は、指数的に小さい誤差を除いて標準写像に一致することを示した [12]. このことにより、このような特異摂動の問題が、標準写像のホモクリニック分岐へと帰着されることになる.

これを受けて Lazutkin 等は、標準写像のホモクリニック構造の解明へと乗り出す. そして 1989 年に、標準写像の安定・不安定多様体の第一交点における指数的に小さな交差角を初めて見出した [13]. 彼等のアイディアの本質は、標準写像の軌道を時間複素平面へと解析接続し、その特異点の情報を引き出すことであった. ホモクリニック分岐の原因は、実軸上にはなかったのである. これは、Melnikov 関数が留数定理により計算できることと対応して理解しやすい. このように、量子力学のみならず古典力学の範囲にも複素関数論はちよくちよく顔を出す. この他に、まさにそのまま特異点解析と呼ばれる重要な理論 [14] もある.

その後 Lazutkin 達の方法は、1993 年に Hakim と Mallick によって Borel 和を用いて整備される [15]. その結果から、安定・不安定多様体の指数的に小さな振動は、漸近展開の突然の変化というストークス現象として理解されることになる.

さらに 1994 年には Tovbis 等により Hénon 写像において、交差角のみならず安定・不安定多様体自身の漸近展開が得られる [16]. 従来、局所的にしか得られなかったカオス系の安定・不安定多様体を初等関数で近似できるようになったわけである. 交差角は振動が起き始める状況を記述するが、もっと先の振動の様子がわかるようになり、ホモクリニック構造の大域的な解析の可能性が出たといえる.

また 1996 年に中村等は、二重底ポテンシャルを持つ面積保存写像 (The double-well map; DW) に対して彼らの方法を適用する [17]. いずれの結果も第一交点における安定・不安定多様体の交差角  $\phi$  は、摂動パラメータ  $\epsilon$  に対し指数的に小さい:

$$|\phi| \leq \frac{C}{\epsilon^\sigma} \exp\left(-\frac{\pi^2}{\epsilon}\right), \quad C, \sigma > 0. \quad (26)$$

ここで例えば標準写像に対しては  $\sigma = 3$ , 二重底ポテンシャルに対しては  $\sigma = 5$  で

<sup>9</sup>4.2 節で紹介した Arnold の結果もこの範疇にある. 実は Arnold の例は Melnikov 積分の高次元への拡張である.

ある。定数  $C$  は、ストークス現象に関連した定数で、現在のところこの定数まで含めて交差角を厳密に決めることはできていない。ただし、数値計算を用いて見積もることはできる<sup>10</sup>。

## 6 高次元シンプレクティック写像におけるホモクリニック分岐

4節と5節を頭に入れた上でこの節へ進もう。高自由度系において輸送を調べることが重要となることは4節で述べた。さらにその輸送を考える上で、安定・不安定多様体の作り出すホモクリニック構造が重要な役割を果たすことは5節で見た。ここでは高自由度系のホモクリニック構造へのアプローチについて述べる。

モデルとして、 $2N$ 次元シンプレクティック写像  $(q, p) \mapsto (q', p'), q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbf{R}^N, p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbf{R}^N$

$$\begin{cases} p'_j = p_j + \epsilon f(q_j) + \epsilon^3 \kappa \tilde{f}_j(q), \\ q'_j = q_j + \epsilon p'_j \end{cases} \quad j = 1, \dots, N \quad (27)$$

を考える。ここで  $0 < \epsilon \ll 1$  は摂動パラメータ、 $f(q_j)$  は各2次元シンプレクティック写像のポテンシャル関数から導かれる項、 $\tilde{f}_j$  がそれらの結合項である。ここでは、元となる2次元シンプレクティック写像として、以下の2種類を考える<sup>11</sup>：

$$f(q_j) = \begin{cases} q_j - 2q_j^3, & \text{The double-well map (DW),} \\ \sin q_j, & \text{The standard map (SM).} \end{cases} \quad (28)$$

また結合項は、

$$\tilde{f}_j(q) = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial q_j}, \quad (29)$$

$$\tilde{J}(q) = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{1}{2} a_j (q_j - q_{j+1})^2 + \frac{1}{4} b_j (q_j - q_{j+1})^4 \right], \quad (30)$$

とする。ここで  $q_{N+1} = q_1$  と周期境界条件を課す。

(28)式の  $f(q_j)$  の形から、どちらの場合においても原点  $(0, \dots, 0)$  は  $2N$ 次元双曲的不動点、つまり  $N$ 個の2次元双曲的不動点の直積であることがわかる。これより、原点から出る不安定多様体と原点に入る安定多様体はそれぞれ  $N$ 次元である。また、結合ポテンシャル (30) は、もっと一般には6次以下の多項式であればよい。ひとまず計算の簡単のために、ここではこの形を仮定する。さらに  $a_1 = \dots = a_N = a, b_1 = \dots = b_N = b$  とする。

<sup>10</sup>このあたりの内容については、拙著 [18] も参照されたい。

<sup>11</sup>標準写像の方は (8) とは違っているが、適当なスケール変換でこの形に帰着できる。

我々はこれまでに、 $N = 2$  の場合についてシンプレクティック写像 (27) のある 1 次元部分安定・不安定多様体の漸近展開を得ている [19]. この 1 次元部分多様体は、2 次元シンプレクティック写像の 1 次元安定・不安定多様体とほぼ同じ性質を持つ. このことは高次元シンプレクティック写像が、局所的には 2 次元写像の直積とみなせることを意味する. さらに、文献において 1 次元部分安定・不安定多様体の近傍にも指数的に小さな振動が存在することをはじめて示唆し、高次元系の解析への 1 つの糸口をつかんだ. ここでは、一般の  $N$  に対しての安定・不安定多様体の交差の状況を調べる [21].

シンプレクティック写像 (27) は、運動量変数  $p$  を消去し、さらに時間を連続変数  $t$  でパラメタライズすることにより、

$$\Delta_\epsilon^2 q_j(t) = f(q_j(t)) + \epsilon^2 \tilde{f}_j(q(t)) \quad (31)$$

という表現が可能である. ここで  $\Delta_\epsilon q_j(t) = \{q_j(t+\epsilon) - 2q_j(t) + q_j(t-\epsilon)\}/\epsilon^2$  である. さらに  $q_j(t)$  の解析性をひとまず仮定し、 $q_j(t \pm \epsilon)$  をテイラー展開することにより、

$$\frac{d^2 q_j}{dt^2} = f(q_j) + \epsilon^2 \tilde{f}_j(q) - 2 \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\epsilon^{2l-2}}{(2l)!} \frac{d^{2l} q_j}{dt^{2l}} \quad (32)$$

と表現できる. これは高階微分の項の係数として小さなパラメータがつくので、特異摂動の問題である.

微分方程式 (32) は、 $q_j(t; \epsilon) = q_{j,0}(t) + \epsilon^2 q_{j,1}(t) + \mathcal{O}(\epsilon^4)$  と展開することにより、

$$\frac{d^2 q_{j,0}}{dt^2} = f(q_{j,0}), \quad (33)$$

$$\frac{d^2 q_{j,1}}{dt^2} = f'_j(q_{j,0}) q_{j,1} + \tilde{f}_{j,1}(q_0) \quad (34)$$

等、 $\epsilon$  の各次数に対する方程式が得られる. ただし  $f'_j(q_{j,0}) = \frac{\partial f}{\partial q_j}(q_{j,0})$ ,  $\tilde{f}_{j,1}(q_0) = \tilde{f}_j(q_{j,0}) - \frac{1}{12} \frac{d^4 q_{j,0}}{dt^4}$  と置いた. これらを順番に解いていくことにより、安定・不安定多様体の漸近展開が得られる.

(33) 式は、1 自由度ハミルトン系であり可積分である. そのセパトリティクス解  $s_j(t)$  は、積分定数  $t_j$  を用いて  $s_j(t) = s(t + t_j)$ , ただし

$$s(t) = \begin{cases} \operatorname{sech}(t), & \text{for DW} \\ 4 \tan^{-1}(e^t), & \text{for SM} \end{cases} \quad (35)$$

と書ける.

(34) 式はセパトリティクス解の周りにおける線形化方程式である.  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  の項まで取り入れると可積分性が保証されないため、セパトリティクス解は存在するとは限

らない。従って安定・不安定多様体を別々に求めることになる。原点における安定・不安定多様体  $W^\pm$  を求めるためには、条件

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} q_{j,1}(t) = 0 \quad (36)$$

の下で解けばよい。条件 (36) を満たす解として、

$$q_{j,1}^\pm(t) = g_j(t) \int_{\pm\infty}^t \dot{s}_j(t) \tilde{f}_{j,1}(t) dt - \dot{s}_j(t) \int_0^t g_j(t) \tilde{f}_{j,1} dt \quad (37)$$

という形のものが取れる。ただし  $g_j(t) = g(t+t_j)$ ,  $g(t) = \dot{s} \int \frac{dt}{s^2}$  である。

先に  $t_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, N$  の場合を考えておこう。このときは (37) 式は即座に積分できる。その結果は  $j$  にも  $\pm$  の符号にも依らない。これが上で述べた 1 次元部分安定・不安定多様体である。 $j$  に依らないことは、この部分多様体は 2 次元系の直積とみなせることを意味する。また、符号に依らないことはこのオーダーでのホモクリニック分岐が起きないことに対応する。実際、この部分多様体に沿った交差角は  $\epsilon \rightarrow 0$  に対し指数的に小さく、特異摂動法を用いることなしには測れない。

ところで、今考えている多様体は  $N$  次元であるため、多様体を張る  $N$  個のパラメータが必要である。現在我々は、独立変数  $t$  の他に  $t_1, \dots, t_N$  という  $N$  個の積分定数を持っている。考えている系 (27) は自励系であるから、積分定数のうち 1 つは時間発展対称性から消せる。残りの  $N-1$  個の積分定数と時間  $t$  が  $N$  次元多様体を張るパラメータとなる。

以下の計算を見通しよくするため、積分定数  $t_j$  を別の変数に変換しよう。線形変換  $(t_1, \dots, t_N) = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)M$ ,  $M \in GL(n, \mathbf{R})$  を考える。ここでは

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & \cdots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & -1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

と取るのがよい。そして  $\alpha_N = 0$  とする。これにより多様体を張るのは  $t, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}$  となる。便宜的に  $t = \alpha_N$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  と書く。

この座標系を用いて、安定多様体と不安定多様体の交差角を定義しよう。 $\epsilon^2$  のオーダーまで考慮した安定・不安定多様体を  $\gamma^\pm(\alpha) = (q^\pm(\alpha), p^\pm(\alpha))$  と書く。安定多様体上の点  $\gamma(\alpha^0)$ ,  $\alpha^0 = (0, \dots, 0, t^0)$ ,  $t^0 = \text{const.}$  において安定・不安定多様体が横断的に交わったとする。この点における安定・不安定多様体の接ベクトルを、 $X_j^\pm = \frac{\partial \gamma^\pm}{\partial \alpha_j}(\alpha^0)$ ,  $j = 1, \dots, N$  と書く。交差角  $\phi_{j,k}$ ,  $j, k \in \{1, \dots, N\}$  を、 $X_j^+$  と  $X_k^-$  のなす角と定義しよう。すなわち

$$\phi_{j,k} = \cos^{-1} \frac{X_j^+ \cdot X_k^-}{|X_j^+| |X_k^-|}. \quad (39)$$

特に  $\phi_{N,N}$  は 1 次元部分多様体同士の交差角であり, (26) で与えられる. その他のものは, (37) から計算できる. 結果のみ列挙すると  $j = 1, \dots, N-1$  に対し,

$$\phi_{j,j} = \frac{\epsilon^2}{\dot{s}(t^0)^2 + \ddot{s}(t^0)^2} [9 + (g(t^0)^2 + \dot{g}(t^0)^2)(\dot{s}(t^0)^2 + \ddot{s}(t^0)^2)]^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (40)$$

$$\phi_{j,j+1} = \frac{2\pi}{3} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad j \neq N-1, \quad (41)$$

$$\phi_{j,j+m} = \frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad m \geq 2, \quad (42)$$

$$\phi_{j,N} = \frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (43)$$

である.

上で得られた結果より, 安定・不安定多様体の  $N^2$  個の交差角のうち 1 つのみが指数的に小さく,  $N-1$  個は  $\epsilon^2$  のオーダー, 残りのものはすべて  $\mathcal{O}(1)$  であるということがわかる. (41) 式のように, 隣り合った接ベクトル間の交差角は直交していない. これは行列 (38) の選び方からくるものであり, 直交化することはできない. しかし結果は (40) 式ほどきれいにならないので, この座標系を採用した. また, 結果のうち系の詳細に依存するのは (40) 式のみである. つまり安定・不安定多様体の交差の状況を記述する交差角は全部で  $N$  個であると考えられる.

## 7 結び

我々は 5.1 節で, 2 自由度ハミルトン系において安定・不安定多様体の交差が相空間の輸送と結びついていることを見た. 高自由度系についても何らかの関連はあると考えられる. そして高次元安定・不安定多様体の交差の状況を調べた結果, 独立であると考えられる  $N$  個の交差角のうち, 指数的に小さいものは 1 つしかない. この方向への輸送は依然小さくても, 残りの方向への輸送は  $\epsilon$  の巾の大きさに起こっているのではないだろうか? 自由度が大きくなるにつれて巾の大きさを持つ方向が支配的になるため, 高自由度系における輸送は 2 自由度系の状況からは予測もつかないものになっている可能性がある. ただし多様体の交差角が大きいということと, その方向に向かう flux が大きいということはそれほど直接には結びつかないかもしれない. 今後の展開として, このことを数値計算を用いて調べてみたいと思う.

また, 考えるべき高次元シンプレクティック写像として, (9) の形が適当であるかどうか, という問題も残っている. この方向については, Chirikov が標準写像を導出した過程を注意深く高次元化してやるのがよいであろう.

高次元安定・不安定多様体の研究はまだ始まったばかりである.



## 参考文献

- [1] ハミルトン系の一般的な入門書としては, A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman: *Regular and Chaotic Dynamics* (Second Edition), Springer-Verlag New York (1992); 大貫義郎・吉田春夫, 力学 (岩波講座・現代の物理学1), 岩波書店 (1994) など.
- [2] H. Poincaré: *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Vol. 3, Gauthier-Villars (1899). 邦訳: 福原満洲雄・浦太郎訳: 常微分方程式, 共立出版 (1970).
- [3] R. S. MacKay and J. D. Meiss eds.: *Hamiltonian Dynamical Systems*, Adam-Hilger London (1987).
- [4] B. V. Chirikov: *Phys. Rep.* **52** (1979) 265.
- [5] C. Froeschlé: *Astrophys. Space Sci.* **14** (1971) 110.
- [6] A. N. Kolmogorov: (1954) *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **98** (1954) 527; V. I. Arnold: *Russ. Math. Surveys* **18** (1963) 85; J. Moser: *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys.* **1** (1962) 1.
- [7] V. I. Arnold: *Soviet Math. Dokl.* **5** (1964) 581.
- [8] J. Cresson: *Hamiltonian Chaos*, preprint (1999) email: cresson@math.univ-fcomte.fr.
- [9] N. N. Nekhoroshev: *Russ. Math. Surv.* **32** (1977) 1.
- [10] P. Lochak and A. I. Neishtadt: *Chaos* **2** (1992) 495.
- [11] V. K. Melnikov: *Trans. Moscow Math. Soc.* **12** (1963) 1.
- [12] A. I. Neishtadt: *J. Appl. Math. Mech.* **48** (1984) 133.
- [13] V. F. Lazutkin, I. G. Schachmannski and M. B. Tabanov: *Physica* **40D** (1989) 235; V. G. Gelfreich, V. F. Lazutkin and N. V. Svanidze: *Physica* **71D** (1994) 82.
- [14] A. Ramani, B. Grammaticos and T. Boutis: *Phys. Rep.* **180** (1989) 159.
- [15] V. Hakim and K. Mallick: *Nonlinearity* **6** (1993) 57.
- [16] A. Tovbis, M. Tsuchiya and C. Jaffé: *Exponential Asymptotic Expansions and Approximations of the Unstable and Stable Manifolds of the Hénon Map*, preprint (1994); A. Tovbis, M. Tsuchiya and C. Jaffé: *Chaos* **8** (1998) 665;

A. Tovbis, M. Tsuchiya and C. Jaffé: Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom, NATO ASI Series C., Vol.533, ed. C. Simó, Kluwer Netherland (1999) 610.

[17] K. Nakamura and M. Hamada: *J. Phys. A* **29** (1996) 7315.

[18] 平田 吉博：不安定多様体の漸近展開，数理科学 1999 年 8 月号（特集・ハミルトン力学系の展開）

[19] Y. Hirata and T. Konishi: <http://xxx.lanl.gov/abs/chao-dyn/9802009>.

[20] Y. Hirata, K. Nozaki and T. Konishi: *Prog. Theor. Phys.* **101** (1999) 1181.

[21] Y. Hirata, K. Nozaki and T. Konishi: *Prog. Theor. Phys.* **102** (1999) 701.