数理解析研究所講究録
1120 巻 1999 年 41-50

二次元ハムサンドイッチ定理の一般化とその周辺

A Genaralization of 2-Diminsion Ham Sandwich Theorem and Related Topics

伊藤大雄
ITO Hiro

豊橋技術科学大学情報工学系
〒 441-8580 豊橋市天伯町字雲雀ケ丘 1-1
ito@tutics.tut.ac.jp

摘要: 「平面上に赤点 pn 個、白点 pm 個が配置されている時(但し任意の3点は同一直線上に無いとする)、互いに重ならない p 個の凸領域が存在し、各領域は丁度赤点 n 個、白点 m 個を含む様にできる」という金子・加納の予想は、$p=2$ とすると有名なハムサンドイッチ定理(但し2次元版)になり、それをエレガントに一般化した重要な予想であった。本稿ではこの予想に対し 1998 年に伊藤らによって与えられた証明の概略を紹介する。さらに関連した話題にも言及する。

キーワード: ハムサンドイッチ定理, 平面, 点集合, 凸包, 均等分割

1 はじめに

3つの自然数 $m \geq 2$, $n \geq 2$, $q \geq 2$ を考える。S_r と S_w を各々平面上の点集合とする。但し、S_r と S_w は共通要素を持たないものとし、さらに $S_r \cup S_w$ 内の点はどの3点も一直線上に無いものとする。$|S_r| = nq$, $|S_w| = mq$ とする。便宜上 S_r を赤点集合、S_w を白点集合と呼ぶことにする。本稿では下記の定理を証明する。

定理 1 (図 *1*参照) $S_r \cup S_w$ は q 個の部分集合 P_1, P_2, $\cdots$, P_q に分割でき、*(i)* 任意の $1 \leq i < j \leq q$ に対し $conv(P_i) \cap conv(P_j) = \emptyset$ であり(但し $conv(P)$ は P の凸包)、かつ *(ii)* 任意の $1 \leq i \leq q$ に対し $|P_i \cap S_r| = n$ かつ $|P_i \cap S_w| = m$ である様にできる。 □

この定理は金子・加納によって与えられた予想 [9] を証明したものである。その予想は $q=2$ の時には有名な平面ハムサンドイッチ定理 [1, 6] と等価となるため、正しいことが分る。さらに一般の q に対しても $n = 1, 2$ ならば予想が成立することが金子・加納によって証明された ($n = 1$ は文献 [9]、$n = 2$ は文献 [10])。最近その予想が完全に成立する(すなわち一般の q, n, m に対して成立する)ことが伊藤ら [7]、酒井 [13]、Bespamyatnikh ら [3] の3グループによってほぼ同時に証明された。これらの3つの証明は似ている部分も多いが重要な部分がかなり異なっている。本稿では伊藤らの証明を解説する。なお、詳細は文献 [8] を参照されたい。

上記3グループの証明は全て以下の定理を証明することによっている。

定理 2 任意の S_r, S_w に対し、3つの整数 $q_1 \geq 1$, $q_2 \geq 1$, $q_3 \geq 0$ $(q_1 + q_2 + q_3 = q)$ が存在し、$S_r \cup S_w$ が

(i) 任意の $1 \leq i < j \leq 3$ に対し $\mathrm{conv}(P_i) \cap \mathrm{conv}(P_j) = \emptyset$、

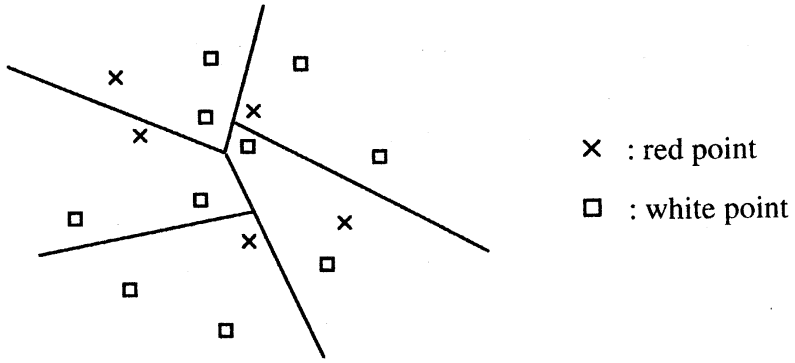

図 1: 定理 1 の例: $n=1, m=2, q=5$ の場合

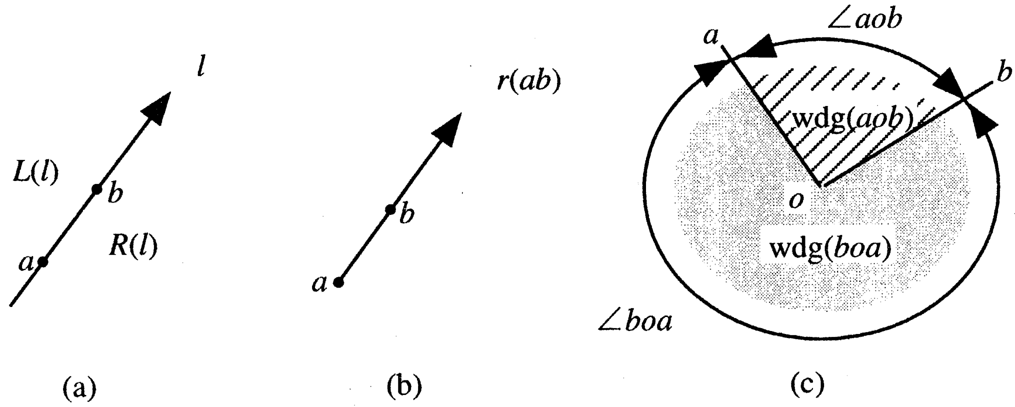

図 2: 直線 l に対する開領域 $\mathrm{R}(l)$ と $\mathrm{L}(l)$、半直線 $\mathrm{r}(ab)$、くさび領域 $\mathrm{wdg}(aob)$ と $\mathrm{wdg}(boa)$.

(ii) 任意の $1 \leq i \leq 3$ に対し $|P_i \cap S_r| = q_i n$ かつ $|P_i \cap S_w| = q_i m$、

を満たすように P_1, P_2, P_3に分割できる。 □

定理 2を利用すれば定理 1は数学的帰納法によって証明することができる。$q=2$ については、定理 2 は平面ハムサンドイッチ定理そのものなので成立することは明らかである。よって以下では $q \geq 3$ と仮定して話を進める。

2 準備

2.1 諸定義

本稿では特に断わらない限り**直線**とは方向を持った有向直線であり、$S_r \cup S_w$上の点を通過しないものとする。直線 l は平面を l, $\mathrm{R}(l)$, $\mathrm{L}(l)$ の 3 つに分割する、但し $\mathrm{R}(l)$ と $\mathrm{L}(l)$ は各々l の右側にある開半平面と左側にある開半平面を表す（図 2 (a) 参照）。直線 l はそれに含まれる 2 点 a, b を用いて$\overrightarrow{ab}$の様に表すことができる、但し a, b はこの順に l 上に表れるものとする（図 2 (a) 参照）。点 a から発する半直線が点 b ($\neq a$) を通る時 $\mathrm{r}(ab)$ と表される（図 2 (b) 参照）。特に断わらない限り、半直線も $S_r \cup S_w$上の点を通らないものとする。

平面上の異なる3点 a, b, o を考える。$b \in \mathrm{R}(\overrightarrow{oa})$ の場合、$\mathrm{r}(oa)$ と $\mathrm{r}(ob)$ で作られる角のうち小さい方（大きい方）を $\angle aob$（$\angle boa$）で表す。$\mathrm{wdg}(aob)$ は、$\angle aob \leq \pi$ であるとき $\mathrm{R}(oa) \cap \mathrm{L}(ob)$、$\angle aob > \pi$ であるとき $\mathrm{R}(oa) \cup \mathrm{L}(ob)$ と定義する（図2 (c) 参照)。平面上の任意の点集合 S に対し、S の凸包（S を含む極小領域）を $\mathrm{conv}(S)$ と表す。平面上の任意の領域 W に対し、$\mathrm{in}(W)$, $\mathrm{ex}(W)$, $\mathrm{bo}(W)$ を各々内部領域、外部領域、境界領域を表すものとする。

$$U = \mathrm{conv}(S_r \cup S_w).$$

$x, y \in \mathrm{bo}(U)$, $z \in \mathrm{in}(U)$ に対し、$\mathrm{wdg}(xzy) \cap \mathrm{bo}(U)$ は z に関わらず一定なので、これを $\mathrm{arc}(xy)$ と表現する。$\mathrm{arc}(xy)$ の長さを $\mathrm{arc\text{-}dist}(xy)$ で表す（$\mathrm{arc}(xy)$ は折れ線であるので $\mathrm{arc\text{-}dist}(xy)$ は各線分の長さの和で定義される)。

2.2 q_1, q_2, and q_3の存在

次の補題は金子・加納 [9] によって示された。

補題 A l_1とl_2を $|\mathrm{L}(l_1) \cap S_r| = |\mathrm{L}(l_2) \cap S_r|$ かつ $|\mathrm{L}(l_1) \cap S_w| < |\mathrm{L}(l_2) \cap S_w|$ を満たす2直線とする。このとき、任意の整数 i（但し $|\mathrm{L}(l_1) \cap S_w| \leq i \leq |\mathrm{L}(l_2) \cap S_w|$）に対し、$|\mathrm{L}(l_3) \cap S_r| = |\mathrm{L}(l_1) \cap S_r|$ かつ $|\mathrm{L}(l_3) \cap S_w| = i$ を満たす直線 l_3が存在する。 □

もしある k $(1 \leq k \leq q-1)$ に対し、$|\mathrm{L}(l) \cap S_r| = kn$ かつ $|\mathrm{L}(l) \cap S_w| = km$ である様な直線 l が存在するならば、$\{q_1 = k, q_2 = q-k, q_3 = 0\}$ は定理 2の条件を満たすことになる。よって補題 A より、任意の整数 k $(1 \leq k \leq q-1)$ に対し、(i) $|\mathrm{L}(l) \cap S_r| = kn$ である任意の直線 l に対して $|\mathrm{L}(l) \cap S_w| < km$ であるか、(ii) $|\mathrm{L}(l) \cap S_r| = kn$ である任意の直線 l に対して $|\mathrm{L}(l) \cap S_w| > km$ であるかの、どちらか一方を満たすと仮定して良い。この仮定から、各 k には LOW か HIGH のどちらかのラベルを付けることが出来る、すなわち k が (i) を満たすならばラベル LOW を付し、(ii) を満たすならばラベル HIGH が付すことが出来る。以上の考察の下で次の補題が得られる。

補題 1 ラベルが等しくかつ $q_1 + q_2 + q_3 = q$ である3整数 $1 \leq q_1, q_2, q_3 \leq q-1$ が存在する。 □

証明 1のラベルが LOW であると仮定する。もし全てのラベルが LOW であるならば $\{1, 1, q-2\}$ が所望の3整数となる。よって少なくとも一つは HIGH のラベルを持つ整数が存在すると仮定して良い。さらに、任意の k に対し、k のラベルと $q-k$ のラベルは、その定義から、必ず異なっていなければならない。ラベル HIGH を持つ最小の整数を k とする。すると $q-k$ と $k-1$ はどちらもラベル LOW を持つ。よって $\{q-k, k-1, 1\}$ は補題 1の条件を満たす。1のラベルが HIGH である場合は、HIGH と LOW を入れ替えれば全く同じ議論が成立する。 Q.E.D.

補題1より得られる q_1, q_2, q_3を考える。ここで「**q_1, q_2, q_3のラベルは LOW である**」と仮定して一般性を失わない。なぜならばもしそれらのラベルが HIGH ならば、S_rと S_wを入れ替えて考えればラベルを LOW にできるからである。以下本稿ではここで得られた q_1, q_2, q_3を使用する。

本稿では特に断わらない限り**分割**は常に

$$|P_i \cap S_r| = q_i n,$$

を満たすものとする。分割が $|P_i \cap S_w| = q_i m$ も満たす場合、**均等分割**であると言う。

U の内点 o と境界上の3点 a, b, c を考える。但し a, b, c はこの順に時計回りに並んでいるものとする（図3 (a) 参照)。$S_r \cup S_w$は $\mathrm{wdg}(boc)$ と $\mathrm{wdg}(coa)$ と $\mathrm{wdg}(aob)$ によって3分割される。ここで、o を分割

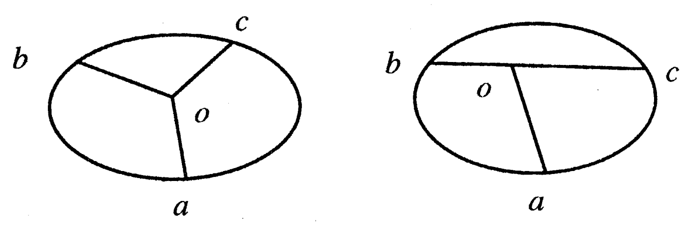

図 3: (a) 分割と (b) T-分割

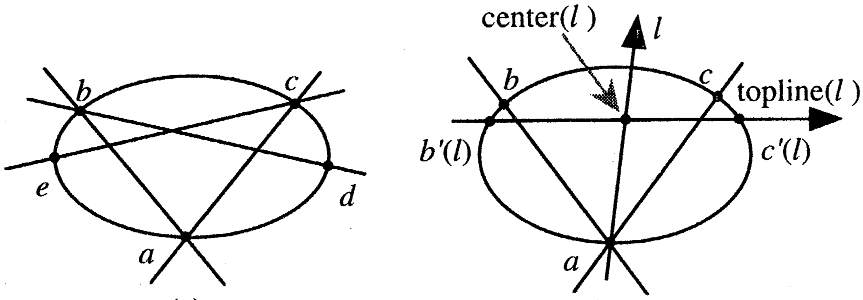

図 4: 点 a, b, c, d, e 及び直線 l, topline(l)

の中心、a, b, c を分割の足と呼ぶ。$\angle aob \leq \pi$かつ$\angle boc \leq \pi$かつ$\angle coa \leq \pi$であるとき、その分割は凸であると言う。さらにそれらの3つの角のうち一つがπに等しいならば、その分割を **T-分割 (T-partition)** と呼ぶ（図 3 (b) 参照）。$\angle aob = \pi$であるとき、$\overrightarrow{ab}$を T-分割の**上部直線 (top-line)** と呼ぶ。

3　主定理の証明

3.1　目標領域

本節では、所望の分割の中心が位置する領域を限定する。$a \in \mathrm{bo}(U)$ を、a を通る任意の直線が $S_r \cup S_w$ 上の点を高々一つしか含まない様にとる。さらに $b, c \in \mathrm{bo}(U)$ を $|\mathrm{L}(\overrightarrow{ab}) \cap S_r| = q_3 n$ かつ $|\mathrm{R}(\overrightarrow{ac}) \cap S_r| = q_2 n$ であるようにとる。$d \in \mathrm{bo}(U)$ を $|\mathrm{L}(\overrightarrow{bd}) \cap S_r| = q_1 n$ となるようにとる（もしこの様な点が存在しない場合でも、c を微少に動かせば必ずこのような d が得られる）。さらに $e \in \mathrm{bo}(U)$ を $|\mathrm{R}(\overrightarrow{ce}) \cap S_r| = q_1 n$ を満たすようにとる（図 4 (a) 参照）。$S_r \cup S_w$ 上の 2 点を通る直線の集合をΓとする。さらに$\Gamma' = \Gamma \cup \{\overrightarrow{as} \mid s \in S_r \cup S_w\}$ とする。

x と y を $\mathrm{bo}(U)$ 上の任意の 2 点とする。arc-dist(ax) $\leq$ arc-dist(ay) であるとき、$x \preceq y$ と表現する。$x \preceq y$ かつ $x \neq y$ であるならば $x \prec y$ である。

$\widehat{L} = \{\overrightarrow{ax} \mid x \in \mathrm{arc}(bc) \cup \{b, c\}\} - \Gamma'$ と定義する。$l \in \widehat{L}$に対し、topline(l) を $|\mathrm{R}(\mathrm{topline}(l)) \cap \mathrm{R}(l) \cap S_r| = q_2 n$ かつ $|\mathrm{R}(\mathrm{topline}(l)) \cap \mathrm{L}(l) \cap S_r| = q_3 n$ である様な直線とする。l と topline(l) の交点を center(l) と表現する（図 4 (b) 参照）。topline(l) と $\mathrm{bo}(U)$ の交点を $b'(l)$, $c'(l)$ とする（但し $b'(l) \prec c'(l)$）。

補題 2 任意の直線 $l \in \hat{L}$に対し、center(l) と topline(l) を以下の条件 (1)–(4) を満足するように定めることができる。

(1) topline($\overrightarrow{ab}$) $= \overrightarrow{bd}$かつ topline($\overrightarrow{ac}$) $= \overrightarrow{ec}$.

(2) center($\overrightarrow{ax}$) の軌跡は折れ線となる。

(3) 任意の $x, y \in \mathrm{arc}(bc) \cup \{b, c\}$ $(x \prec y)$ に対し、$b'(\overrightarrow{ay}) \prec b'(\overrightarrow{ax})$ かつ $c'(\overrightarrow{ay}) \prec c'(\overrightarrow{ax})$。

(4) 「arc-dist($ab'(x)$)」と「arc-dist($ac'(x)$)」と「a と center($\overrightarrow{ax}$) の距離」は全て$\angle bax$ の一様連続関数である。

(5) 任意の $x, y \in \mathrm{arc}(bc) \cup \{b, c\}$ $(x \prec y)$ に対し、もし x と y が十分近いならば、$|\mathrm{L}(\mathrm{topline}(\overrightarrow{ax}) \cap S_b|$ と $|\mathrm{L}(\mathrm{topline}(\overrightarrow{ay}) \cap S_b|$ の差は 0, 1, −1 のどれかである。 □

証明 略（文献 [8] 参照）。

$l \in \hat{L}$に対する center(l) の軌跡を ℓ_aと表す。ℓ_aと$\overrightarrow{ab}$と$\overrightarrow{ac}$で囲まれる閉領域を U_aで表す。任意の $x \in (U_a - \Gamma') \cup \{a\}$ に対し、x を中心とし、足の一つを a とする様な分割を考え、$Y(x)$ と表記する。（現時点では各 x に対して $Y(x)$ は唯一には定まらないが、後述の定理 3で適切な $Y(x)$ が定まる。）$Y(x)$ の a 以外の足を $b(x)$ と $c(x)$ とする、但し $b(x) \prec c(x)$ である。明らかに $b(a) = b$, $c(a) = c$, $b(b) = b$, $c(b) = d$, $b(c) = e$, $c(c) = c$ とすることができる。

$$P_1(x) = \mathrm{wdg}(b(x)xc(x)) \cap U,\ P_2(x) = \mathrm{wdg}(c(x)xa) \cap U,\ P_3(x) = \mathrm{wdg}(axb(x)) \cap U,$$

$$m_1(x) = |P_1(x) \cap S_w|,\ m_2(x) = |P_2(x) \cap S_w|,\ m_3(x) = |P_3(x) \cap S_w|,$$

$$\mathrm{pdist}(x, y) = (|m_1(x) - m_1(y)| + |m_2(x) - m_2(y)| + |m_3(x) - m_3(y)|)/2.$$

pdist(x, y) を x, y 間の分割距離と呼ぶ。任意の x に対して $m_1(x) + m_2(x) + m_3(x) = m$ であることから、pdist(x, y) は常に整数となる。さらに pdist(x, y) ≤ 1 は、$|m_1(x) - m_1(y)| \leq 1$ かつ $|m_2(x) - m_2(y)| \leq 1$ かつ $|m_3(x) - m_3(y)| \leq 1$ と同値である。

3.2 グラフの構成

任意の $x, y \in U_a$について、x と y が十分近ければ pdist(x, y) ≤ 1 である様にとれれば定理 2の証明は比較的容易である。しかし、これを示すのは簡単では無い。そこで、もう少し限定した性質を以下に示すが、定理 2を証明する道具としてはこれで十分なのである。

定理 3 グラフ $G = (V, E)$（ただし V を節点集合、E を枝集合とする）で、$v \in V$ は $(U_a - \Gamma') \cup \{a\}$ 上に置かれ、各枝は節点間の線分で表現され、さらに以下の条件を満たすようなものが存在する。

(i) G の外周以外の窓は三角（すなわち丁度 3 本の枝から成る）である。

(ii) 任意の $v \in V$ に対し $Y(v)$ は凸。

(iii) 隣接する 2 節点 $v, v' \in V$ に対し pdist(v, v') ≤ 1 である。

(iv) bo(U_a) は G の外周と一致する。 □

定理 3の証明は構成的に与えられる。しかしこの証明はとても複雑な場合分けを必要とし、ここで紹介する余裕は無い。この証明は文献 [8] にあるので興味のある方は参照されたい。

3.3 証明

$v \in V$ に対し以下の関数を定める。

$$f(v) = \lfloor ((m_3(v) - q_3m) - (m_2(v) - q_2m))/2 \rfloor,$$

$$g(v) = m_1(v) - q_1m.$$

定理 3の条件 (iii) より、$f(v)$ と $g(v)$ は v を隣接節点に動かしても高々± 1 しか変化しない。q_1, q_2, q_3のラベルがLOW であることから、$m_1(b) - q_1m < 0$, $m_3(b) - q_3m < 0$, $m_1(c) - q_1m < 0$, $m_2(c) - q_2m < 0$ である。従って $f(b) < 0$ かつ $f(c) > 0$ となる。

補題 3 G 上に路 $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ で、$v_1 \in \overrightarrow{ab} \cup \overrightarrow{ac}$かつ $v_k \in \ell_a$かつ任意の $i = 1, 2, \ldots, k$ に対し $f(v_i) = 0$ である様なものが存在する。 □

証明 この様な路が存在しないと仮定すると、ある隣接 2 節点 v, v'で $f(v) \geq 1$ かつ $f(v') \leq -1$ である様なものが存在する。これは条件 (iii) に反する。 Q.E.D.

$f(v_1) = 0$ であるので $m_3(v) - q_3m = m_2(v) - q_2m$ である。$v_1 \in \overrightarrow{ab} \cup \overrightarrow{ac}$であることを考慮すると $m_3(v) - q_3m = m_2(v) - q_2m < 0$ が得られる（q_2と q_3のラベルが LOW であることに注意）。よって $g(v_1) = m_1(v_1) - q_1m > 0$。$q_1$のラベルが LOW であるので、$g(v_k) < 0$ となる。従って、$g(v_h) = 0$ となる様な $v_h \in \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ が存在しなければならない。よって $m_1(v_h) = q_1m$, $m_2(v_h) = q_2m$, $m_3(v_h) = q_3m$ となる。$Y(v_h)$ は凸であるので、これが所望の均等分割である。以上より定理 2が証明された。

定理 2を用いれば定理 1の証明は数学的帰納法によって容易であるのでここでは省略する。

4 関連話題

本章では関連する話題についていくつか紹介する。

4.1 k-扇

Bárány と Matoušek は平面を分割する k-扇 (k-fan) という概念を定義した。

定義 1 平面上の任意の点 x と x を端点とする任意の k 本の半直線 $l_1, l_2, \ldots, l_k$によって分割される平面分割を **k-扇 (k-fan)** と呼ぶ。（半直線上の任意の部分は、任意に両隣りの集合のどちらかに属していると解釈する。） □

k-扇は一見ハムサンドイッチ分割の特殊な場合に見えるが、k-扇によって得られる分割は凸で無くても良い点は逆に自由度が高い。彼等は k-扇に対していくつかの性質を得た [2] が、そのうち重要なものは次の性質である。

定理 4 (Bárány and Matoušek 1999) 平面上の $5n$ 個の赤点と $5m$ 個の白点で、いかなる 5-扇でも全ての集合が各々赤点 n 個と白点 n 個を含む様に出来ないものが存在する。また、平面上の任意の $5n$ 個の赤点と $5m$ 個の白点に対し、4-扇で、1 つの集合が赤点 $2n$ 個と白点 $2n$ 個を含み、残りの 3 集合が各々赤点 n 個と白点 n 個を含む様なものが存在する。

Bárány と Matoušek の元の定理は離散点集合ではなく、平面上の連続的な測度に対する結果であるがその結果は明らかに離散的な対象に適用できる。

4.2 完全分割

周囲にチョコレートが塗られたケーキを k 人で公平に分けたい。その時各人はスポンジの量もチョコレートの量も k 分の1欲しいし、さらにもらったケーキ片があまり汚い形をしているのは気分が悪い。こういった条件をモデル化したのが次の完全分割である。

定義 2 S を平面上の凸集合とする。S が互いに重ならない k 個の凸集合に分割され、さらに各集合は S の面積の k 分の *1* の面積を持ちかつ S の境界のうちの k 分の *1* を含み、各集合の含む S の境界は連続しているとき、その分割を**完全 k-分割 (perfect k-division)** と呼ぶ。 □

金子と加納は以下の定理を与えた [11]。

定理 5 (金子・加納 1999) 任意の平面上の凸集合 S と任意の自然数 k に対し、完全 k-分割が存在する。 □

完全 k-分割において特徴的なのは、「各集合の含む S の境界は連続している」とする点である。実際この条件が無い場合は、面積を表す測度を赤点の数で、境界長を表す測度を白点の数で表すことによって、平面ハムサンドイッチ分割問題の特殊な場合となるため、定理1の結果に包含されることになる（点数を増加させることによって、連続的な測度をいくらでも正確に近似できることに注意)。しかし境界の連続性があることによって $k=3$ の場合で既に平面ハムサンドイッチ分割とは異なる問題となっている（例えば平行な2直線による3分割はハムサンドイッチ分割では許容されるが完全分割では許されない)。よってこの完全分割もハムサンドイッチ分割と似ているが独立した概念である。

4.3 ケーキ分割問題

ハムサンドイッチ分割や完全分割はケーキの分割の抽象化として語られることが多いが、それそのものの「ケーキ分割問題 (cake cutting problem)」と呼ばれている問題がある。この問題の定義を説明する前に、次の問題を考えてみよう。

問題 太郎と次郎が1つのケーキを分けようとしている。2人とも全体の価値の2分の1以上を貰えば満足する。但し、2人の価値観は同じとは限らない（すなわち、チョコの量を重視する子もいればサンタクロースの人形を強く欲する子いるという様に様々な価値観があるということだ)。どちらからも不満が出ない様に分けるにはどうしたら良いか？

この問題の答は後述するが、比較的有名かつ手ごろな頭の体操であるので、もし答を御存じ無い方は暫くここで考えてみることをお勧めする。ケーキ分割問題は上記の問題を色々な視点から一般化したものを総称してこう呼ぶ。まず問題を正確に記述する為に用語を定義しておかなければならない。

ケーキ全体を X と表す。ケーキ全体あるいは断片 A は2つの断片 B と C（但し $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$）に分けることができる。参加者 P_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ はケーキの任意の断片 A に対し、価値 $\mu_i(A)$ を持っている。この時関数 μ_i は下記の条件を満たさなければならない。

- ケーキ全体の価値は1である。すなわち $\mu_i(X) = 1$。
- ケーキを全く得られない場合の価値は零である。すなわち $\mu_i(\emptyset) = 0$
- どんな断片も負の価値を持つことは無い。すなわち任意のケーキ片 A に対して $\mu_i(A) \geq 0$.
- ケーキは分割によって全体の価値が減ったり増えたりしない。すなわち $B \cup C = A \subseteq X$, $B \cap C = \emptyset$ である時、$\mu_i(B) + \mu_i(C) = \mu_i(A)$。

言い換えれば、μ_iの数学的ふるまいは確率測度に等しい。さらに、任意のケーキ片 A、任意の参加者 P_i、任意の正の実数 $0 < r < \mu_i(A)$ に対し、P_iは A を$\mu_i(B) = r$, $\mu_i(C) = \mu_i(A) - r$ を満たす 2 つの片 B と C に正確に切り分けることができるものとする。

以上の前提に基づき、ケーキ分割のアルゴリズム（ルール）を与え、そのルールに乗っ取って分割を遂行すれば、各人が与えられた公平概念（例えば k 分の 1 以上の価値を持つ等; 詳細は後述する）を満足するケーキ片（複数の片の集まりでも良い）を得ることができる様にせよ、という問題を一般にケーキ分割問題と呼ぶ。

例えば前記の太郎 (P_1) と次郎 (P_2) による分割の問題の場合はアルゴリズムは次の様に与えられる。

begin
Step 1 P_1が X を$\mu_1(A) = \mu_1(B) = 1/2$ となる様に分割する。
Step 2 P_2が A と B のうち、価値の高いと思う方を取る。
end.

ここで面白い点は「各μ_iは個人的な価値であって他人からは分らなくても良い」ことである。つまり上記のアルゴリズムにおいて太郎が本当に正確に半分に分割したかどうかは次郎からは確認できなくとも良いのである。もし太郎が正確に半分に分割していなかったら、例えば$\mu_1(A) > 1/2 > \mu_1(B)$ の様に分割していたならば、次郎に A を取られた場合に太郎は半分の価値を取ることはできなくなってしまう。結局、アルゴリズムの指示に従わなかった場合、災難はその指示に従わなかった人自身にのみ降り掛かる様なアルゴリズムになっている。ケーキ分割問題のアルゴリズムを与える際には、この条件も満足する様に与えなければならない[1]。

公平概念については下記のものなどがある（参加者を k 人、参加者 P_iの得た片（の合計）を X_iとする）。なお、名称は文献 [12] に従っている。

1. **単純公平分割 (simple fair division):** 任意の $1 \le i \le k$ に対して$\mu_i(X_i) \ge 1/k$.
2. **強公平分割 (strongly fair division):** 任意の $1 \le i \le k$ に対して$\mu_i(X_i) > 1/k$.
3. **無羨望分割 (envy-free division):** 任意の $1 \le i, j \le k$ に対して$\mu_i(X_i) \ge \mu_i(X_j)$.
4. **超無羨望分割 (super envy-free division):** 任意の $i \ne j$, $1 \le i, j \le k$ に対して$\mu_i(X_j) < 1/k$.
5. **正確分割 (exact division):** 任意の $1 \le i, j \le k$ に対して$\mu_i(X_j) = 1/k$.

ケーキ分割問題の元となった冒頭の問題は、Brams と Taylor[5] によると 2800 年も遡ることができるというぐらい古い問題であるが、1995 年に Brams と Taylor[4] によって k 人の無羨望分割アルゴリズムが提案されたことをきっかけに、多くの研究者の注目を浴びる様になった。ケーキ分割問題についてここではスペースの関係でこれ以上は述べないが、詳しくは比較的最近刊行された専門書 [5, 12] や日本語による解説文 [14] があるので、興味のある方はそちらを参照することをお勧めする。以下ではケーキ分割問題とハムサンドイッチ分割との関係について少し触れておきたい。

ハムサンドイッチ分割との関係

定理 1において $q = 2$ の場合（すなわち古典的な平面ハムサンドイッチ分割）は、部分集合 P_1, P_2は共に赤点 n 個と白点 m 個を同時に含むことを要求される。ここで赤点の数を参加者 P_1の考える価値μ_1であり、白点の数を参加者 P_2の考える価値μ_2であると考えると、参加者 2 人による単純公平分割は、部

[1] μ_iが個人的な価値であるという前提の元では、アルゴリズムは自然とこうなると思われる。この件についてなんらかの証明があるかどうかは不明ではあるが。

分集合 P_1 が少なくとも赤点 n 個を含み、部分集合 P_2 が少なくとも白点 m 個を含む様にする問題であると考えることができる。さらに3人での分割では赤点、白点の他に参加者 P_3 の価値感を表す「青点」導入することで説明できる。この様に対応付けすると、ケーキ分割問題は点の種類が人数分ある点はハムサンドイッチ分割より複雑だが各人が自分の色の点だけ見ていれば良いという点はより簡単になっている。さらにケーキ分割問題では常にケーキは1次元の物体として考えられているが、これを2次元の物体と考えて凸制約等を考慮すれば、また面白い問題が考えられる。

平面ケーキの3人による凸無羨望分割が存在することは定理1を使えば簡単に示すことが出来る。しかしこれについては、2次元性を使用しなくても、任意の1次元ケーキが3片分割によって3人に無羨望分割できることが知られており [12, pp. 65–66]、いわば自明のことである。従って、2次元が有効に働くとすれば4人以上による凸無羨望分割が存在する時であろう。現在我々は4人ならば凸無羨望分割が存在すると予想しているが証明には至っていない。

5 まとめ

本稿では2次元ハムサンドイッチ定理の一般化に関する金子・加納の予想が成立すること（定理 1）の証明の概略を紹介した。元々のハムサンドイッチ定理は一般の n 次元に対しても存在するが、勿論定理 1が3次元以上に拡張できる可能性はある。実際平面2分割は自由度を使い切っているのにもかかわらず、平面3分割は自由度を1つ残している（a を $\mathrm{bo}(U)$ 上にほぼ自由に設定できることに注意）ことは興味深く、こういった観察から一般の n 次元においても同様の性質が成立する公算は高い。もちろんその証明は簡単では無さそうだが。

さらに関連する最近の話題についてもいくつか述べた。これらの他にも色々な変形があるものと思われ、今後の研究動向に興味がもたれる。

参考文献

[1] 秋山仁, Graham, R. L., 離散数学入門, 朝倉書店 (1993).

[2] Bárány, I., and Matoušek, J., Simultaneous partitions of mesures by k-fan, manuscript (1999).

[3] Bespamyatnikh, S., Kirkpatrick, D., and Snoeyink, J., Generalizing ham sandwich cuts to equitable subdivision, Proceedings of Fifteenth Annual ACM Symposium on Computational Geometry (SoCG'99), pp. 49–58 (1999).

[4] Brams, S. J, and Taylor, A. D., An envy-free cake division protocol, *American Mathematical Monthly*, **102**, pp. 9–18 (1995).

[5] Brams, S. J, and Taylor, A. D., *Fair Division*, Cambridge University Press (1996).

[6] Goodman, J. and O'Rourke, J., *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, CRC Press (1997).

[7] Ito, H., Uehara, H., and Yokoyama, M., 2-dimension ham sandwich theorem for partitioning into three convex pieces (Extended abstract), *Proceedings of Japan Conference on Discrete and Computational Geometry '98 (Collection of Extended abstracts)*, December, Tokai Univ., pp. 69–73 (1998).

[8] Ito, H., Uehara, H., and Yokoyama, M., 2-dimension ham sandwich theorem for partitioning into three convex pieces, *Proceedings of Japan Conference on Discrete and Computational Geometry '98 (JCDCG '98)*, Springer (to appear).
http://www.yilab.tutics.tut.ac.jp/ito/List.html#anchorPLHam.

[9] Kaneko, A. and Kano, M. A balanced partition of points in the plane and tree embedding problems, (submitted).

[10] Kaneko, A. and Kano, M., Balanced partition of two sets of points in the plane, (submitted).

[11] Kaneko, A. and Kano, M. Perfect n-divisions of convex sets in the plane, *Proceedings of Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications*, Kyoto, March 17-19, 1999, pp. 91–93.

[12] Robertson, J. and Webb, W., *Cake-Cutting Algorithms*, A K Peters (1998).

[13] Sakai, T., Radial partitions of point sets in $\Re^2$ (Extended abstract), *Proceedings of Japan Conference on Discrete and Computational Geometry '98 (Collection of Extended abstracts)*, December, Tokai Univ., pp. 74–78 (1998).

[14] 曽道智, 茨木俊秀, 公平分割とその手順, 応用数理, **9**, pp. 12–27 (1999).