

準周期平行流の不安定モードの非線型相互作用

阪府大・工 福田浩昭 (Hiroaki FUKUTA)
阪府大・工 村上洋一 (Youichi MURAKAMI)

1 はじめに

パターン形成の問題と関連して、空間周期構造を持つ流れの安定性とその遷移の問題は活発に研究されている [1]。周期構造よりも複雑な構造を持つ流れとしては、周期の比の値が無理数であるような空間周期流を重ね合わせて得られる準周期流があげられる。近年、準周期構造の発生に関する実験が行われ、ファラデー共鳴の実験などでその存在が確認されている [2]。理論的にもいくつかの系では準周期的な空間構造の出現が予測されている [3]、準周期構造の発生機構に関する研究もなされている [4]。しかし、「準周期流がどのような安定特性を持つのか」については、筆者らの知る限り研究されていない。これは準周期構造を持つ流れの安定性を調べる際には、周期流の安定性を取り扱うときに有用である通常のプロッケの定理を適用できないためである。

我々は前回 ('98. 1)、2次元非圧縮流体において準周期構造を持つ平行流 $U(y) = \sin y + \sin \omega y$ を取り上げた。ここで、 $\omega = (1 + \sqrt{5})/2$ (黄金比) は無理数としている。準周期流の安定性を直接取り扱うのは困難なので、無理数 ω を有理数 ω_n で近似し、準周期流 $U(y)$ を周期流 $U_n(y) = \sin y + \sin \omega_n y$ で近似した。ここで、 ω_n は有理数列 $\omega_n = F_{n+2}/F_{n+1}$ ($F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_1 = F_2 = 1$) であり、 $n \rightarrow \infty$ の極限で $\omega_n \rightarrow (1 + \sqrt{5})/2$ となる。近似をあげること ($n \rightarrow \infty$) によって、準周期平行流 $U(y)$ の安定性を予測した。以下では、近似準周期流の例として主流 $U_6(y)$ ($\omega_6 = 21/13$) の安定性の結果について述べる。参考のために、図 2 (a) に $U_6(y)$ と $U_6''(y)$ の形を示す。

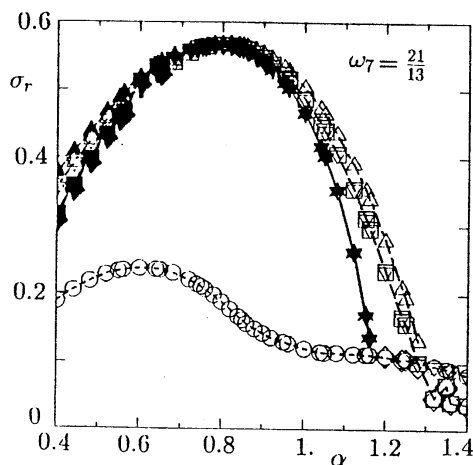


図 1. $n = 6$ の場合の増幅率曲線。

α	σ_r	σ_i	固有関数
0.75	5.4849×10^{-1}	0	ψ_1
0.75	5.4846×10^{-1}	0	ψ_2
0.75	5.4833×10^{-1}	2.629×10^{-2}	ψ_3
0.75	5.4833×10^{-1}	-2.629×10^{-2}	$\psi_4 (= \psi_3^*)$
0.75	5.4760×10^{-1}	1.810×10^{-2}	ψ_5
0.75	5.4760×10^{-1}	-1.810×10^{-2}	$\psi_6 (= \psi_5^*)$
0.75	5.4744×10^{-1}	1.858×10^{-2}	ψ_7
0.75	5.4744×10^{-1}	-1.858×10^{-2}	$\psi_8 (= \psi_7^*)$

表 1. 波数 $\alpha = 0.75$ での増幅率 σ 。

σ_r は増幅率の実部、

σ_i は増幅率の虚部。

ψ_j は、固有値に対応する固有関数。

この近似準周期流 $U_6(y)$ の線形安定性問題は通常のように取り扱うことができる。主流に対して攪乱 $\tilde{\psi}$ が小さいとして攪乱の非線形項を無視し、フロッケの定理を適用して攪乱 $\tilde{\psi}$ を $\tilde{\psi} = \exp[\sigma t + i(\alpha x + \beta y)]\psi(y)$, $\psi(y) = \sum a_n \exp(iny)$ とおく。ここで、 α は流れ方向の波数、 β は実のフロッケ指数、 σ は求める必要のある増幅率であり、複素数になりうる。この形を基礎方程式に代入すると、 σ に関する固有値問題が得られる。係数 a_n はこの固有値問題を解いて得られる固有ベクトルの成分に対応する。以下では、粘性 ν が弱い場合 ($\nu = 0.01$) の結果を示す。(非粘性の場合も同様の結果が得られている。)

図1に示されているように主流 $U_6(y)$ に対して複数個の不安定モードが存在し、最大増幅率を与える波数 $\alpha_m (\approx 0.8)$ で複数のモードの増幅率がほぼ等しくなる。詳しい増幅率の値は表1に示されている。固有モードの個数は、 n を増大させて近似をあげていくと一定の規則に従って増加したので、準周期平行流では無限個数であると前回予想している。このように、準周期平行流では、「最大増幅率を与える波数 α_m で増幅率の値が近くなるような複数の独立な固有モードが存在する。」という特徴がある。このような増幅率の分布の特徴を「増幅率縮退」と我々は呼んでいる。流れが不安定になるときは、同一波数 α_m を持つ複数個 ($n \rightarrow \infty$ では無限個) のモードが励起される。図2に、主流 $U_6(y)$ と不安定モードの構造を示す。表1に示されているように、固有関数 ψ_j の添え字 j は増幅率の大きい順番に対応させる。固有関数 ψ_3, ψ_4 は複素共役な固有値にそれぞれ対応し、複素共役の関係 ($\psi_4 = \psi_3^*$) が成り立ち、たがいに虚数部が逆符号になる。同様に、 $\psi_6 = \psi_5^*, \psi_8 = \psi_7^*$ が成立する。図2では、主流 U_6 と不安定モード $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_5, \psi_7$ の実部と虚部が図示されている。主流 $U_6(y)$ と比較すると、不安定モードはそれぞれ局所的にピークを持つことがわかる。また、図2 (b),(d),(e) は $y = 13\pi/2$ について対称: $\psi_j(13\pi/2 - y) = \psi_j(13\pi/2 + y)$, ($j = 1, 3, 4, 5, 6$)、図2 (c),(f) は反対称: $\psi_j(13\pi/2 - y) = -\psi_j(13\pi/2 + y)$, ($j = 2, 7, 8$) になっている。

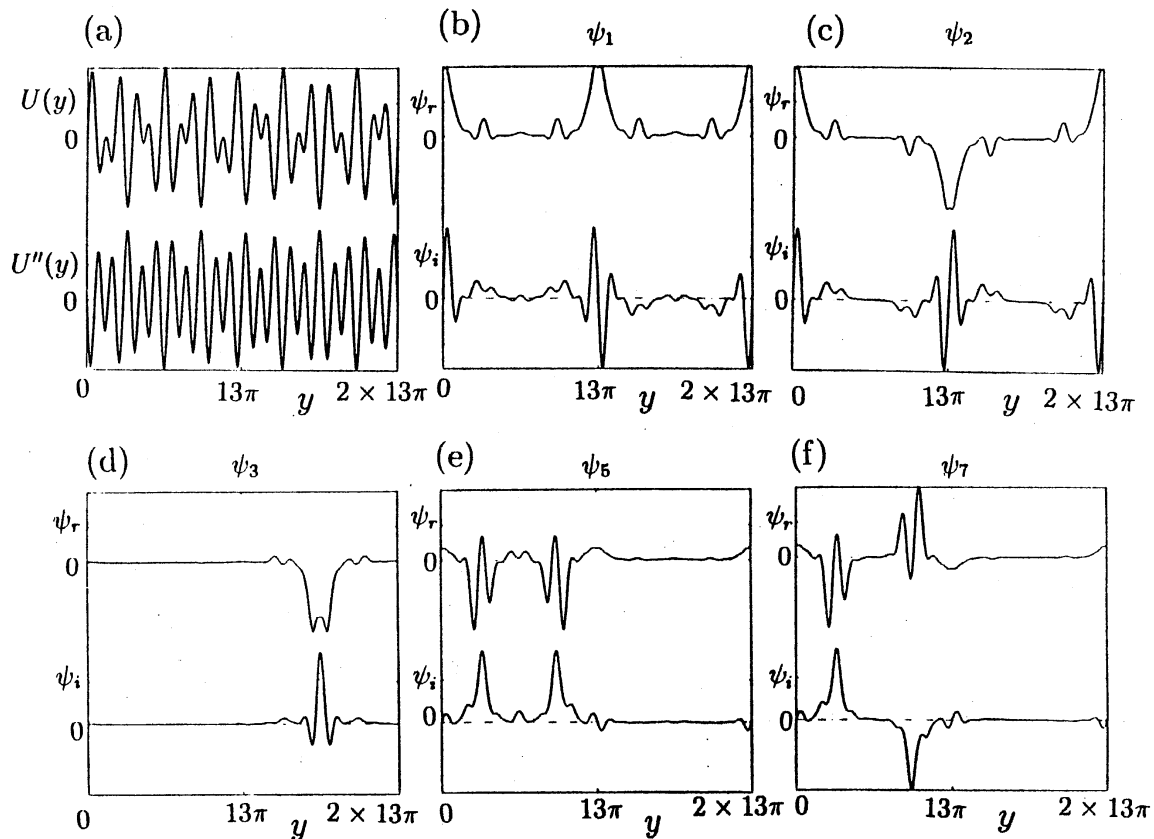


図 2. $U_6(y)$ 、 $\alpha = 0.75$ での固有モード (ψ_r :実部、 ψ_i :虚部)。

さらに、我々は「複数の不安定な固有モードのうち、どのモードが成長し、2次流を構成するか」に興味を持ち、 $n = 6$ ($\omega_6 = 21/13$) の場合の直接数値シミュレーションを行い、流れ場の形から複数個の不安定モードが同時に出現していることを見出した。前回は、それぞれの不安定モード ψ_j が流れ場においてどれだけの割合を占めているのかを、定量的には示さなかった。今回は、前回に引き続き数値シミュレーションを行い、流れ場の固有モード分解を行い、2次流を構成している不安定モード ψ_j の成分比を明らかにする。第2節では複数の不安定な固有モードのうち、どのモードが成長し、2次流を構成するかについて述べる。第3節では不安定モード間の相互作用を記述するランダウ方程式を導出する。第4節ではまとめと今後の課題について簡単に述べる。

2 数値シミュレーション

2.1 定式化

速度に比例する抵抗を伴う非圧縮2次元流（準2次元流と呼ばれている）における臨界モード $\exp(i\alpha_c x)\psi$ は、抵抗を伴わない2次元流における最大増幅率を与えるモード $\exp(i\alpha_m x)\psi$ に対応することが知られている[5]。以下では、 $\omega_6 = 21/13$ の場合について、流れが不安定になったときに縮退したモードのどれが成長するのかを直接数値シミュレーションによって調べる。準2次元流における渦度方程式は流れ関数 Ψ を用いて

$$\partial_t \Delta \Psi + \partial_x \Delta \Psi \partial_y \Psi - \partial_x \Psi \partial_y \Delta \Psi = \nu \Delta^2 \Psi - \lambda \Delta \Psi + F(y) \quad (1)$$

と与えられる。ここで、 $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ であり、 ν は粘性、 λ は底の摩擦による抵抗の係数であり、小さくすると攪乱の増幅率が増し、流れが安定から不安定に変わる。ここでは、 $U_6(y) = \sin y + \sin \omega_6 y$ が実現されるように、外力 $F(y)$ を

$$F(y) = -\nu \partial_y^3 U_6(y) + \lambda \partial_y U_6(y) \quad (2)$$

とする。したがって、 λ を変化させても、主流 $U_6(y)$ は変化しない。

以下では、 ν を固定し($\nu = 0.01$ とする)、 λ を臨界パラメーターとして変化させる。この場合、臨界の抵抗係数は $\lambda_c = 0.548$ であるので、 $\lambda = 0.4$ ($\sigma_r = 0.148$)と選び、主流 $U_6(y)$ が不安定である超臨界のところでの流れを調べる。領域を $[0, 4 \times 2\pi] \times [0, 13 \times 2\pi]$ とし、周期境界条件を課した。 x 方向の範囲を小さくとっているので $\alpha = 3/4$ のモードだけが不安定である。擬スペクトル法と積分因子法にもとづく1次の前進オイラー法を用いて、式(1)を数値的に解いた。空間の分割数は 64×1024 で、時間刻み幅 Δt は0.01とした。主流に線形固有値問題の固有モード ψ_j を加えた場合の時間発展において、その増幅率を求め、固有値問題の増幅率と比較し、初期の時刻では数値は上から2桁まで一致していることを確かめている。

主流を $\bar{\Psi} = -[\cos y + (1/\omega_6) \cos \omega_6 y]$ として、攪乱 $\tilde{\Psi} = \Psi - \bar{\Psi}$ を x, y 方向の方向に分解し、それぞれの成分のエネルギー E ($E = \int \int (u^2 + v^2) dx dy$) を求めた。分解の際には、攪乱 $\tilde{\Psi}$ を x 方向に関して $\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}_0 + \exp(i\alpha_c x)\tilde{\Psi}_1 + \exp(2i\alpha_c x)\tilde{\Psi}_2 + c.c.$ と分解し、それぞれ

成分のエネルギーを評価した。次に、 $\tilde{\Psi}_1$ がどの固有関数によって構成されているのかを調べた。 $\tilde{\Psi}_1$ を線形問題の固有関数 ψ_j の和の形 $\tilde{\Psi}_1 = \sum c_j \psi_j$ に分解する。この際、随伴作用素の固有関数 g_j を用いて $c_j = \int (\partial_y^2 - \alpha^2) \tilde{g}_j \tilde{\Psi}_1 dy / \int (\partial_y^2 - \alpha^2) \tilde{g}_j \psi_j dy$ を定義している。ただし、 ψ_j, g_j はそれぞれ線形安定性の固有値問題:

$$\sigma_j(\partial_y^2 - \alpha^2)\psi_j = i\alpha\{\partial_y^2 U_6 \psi_j - U_6(\partial_y^2 - \alpha^2)\psi_j\} + \nu(\partial_y^2 - \alpha^2)^2 \psi_j, \quad (3)$$

および随伴固有値問題:

$$\sigma_j^*(\partial_y^2 - \alpha^2)g_j = -i\alpha\{2\partial_y U_6 \partial_y g_j + U_6(\partial_y^2 - \alpha^2)g_j\} + \nu(\partial_y^2 - \alpha^2)^2 g_j \quad (4)$$

の固有関数である。

2.2 数値計算の結果

主流に小さな乱数を加えた初期条件(A)の下で流れ場の時間発展を求めた。流れ場全体 Ψ のエネルギーと分解された攪乱 $\tilde{\Psi}$ の成分 $\tilde{\Psi}_0, \tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2$ のエネルギーの時間発展が図3に示されている。初期の時間発展において、 $\tilde{\Psi}_1$ は増幅率 $\sigma = 0.148$ で指数的に増大することを確認している。一方、 $\tilde{\Psi}_2, \tilde{\Psi}_0$ の増幅率は線形増幅率の2倍になっている。 $t = 300$ で、それぞれの成分のエネルギーの値は一定値になり、攪乱 $\tilde{\Psi}$ のエネルギーは流れ全体に対して45%となっている。攪乱のエネルギーは33% ($\tilde{\Psi}_1$)、10% ($\tilde{\Psi}_0$)、2% ($\tilde{\Psi}_2$)のように分配されているので、2倍高調波までで攪乱のエネルギーをほぼ100%占めている。したがって、ランダウ方程式によって2次流を評価できると考えられる。

1節で述べたように $U_6(y)$ の臨界波数の成分 $\tilde{\Psi}_1$ は、8個の不安定モード ψ_j によって構成されている。(ただし、 $\psi_4 = \psi_3^*, \psi_6 = \psi_5^*, \psi_8 = \psi_7^*$ である。) $\tilde{\Psi}_1$ を不安定モード ψ_j ($j = 1, \dots, 8$)で分解し、それぞれのエネルギーの時間発展を図4に示す。

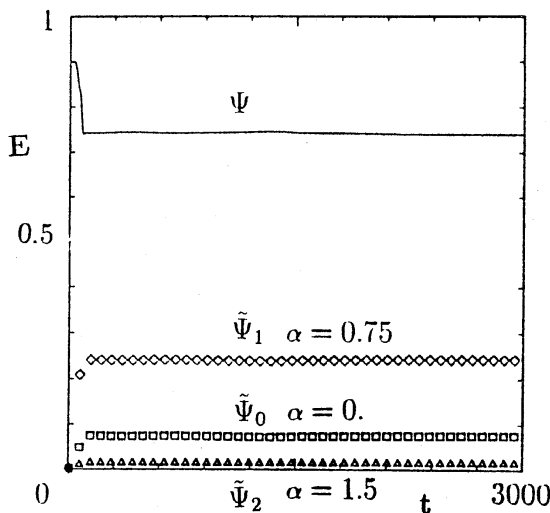


図3. ランダムな初期値からの時間発展
 $\Psi = \tilde{\Psi} + \tilde{\Psi}_0 + \exp(i\alpha x)\tilde{\Psi}_1 + \exp(2i\alpha x)\tilde{\Psi}_2 + \dots + c.c.$
 —: 流れ場 Ψ の全エネルギー,
 他は□: $\tilde{\Psi}_0$, ◇: $\tilde{\Psi}_1$, △: $\tilde{\Psi}_2$ のエネルギー

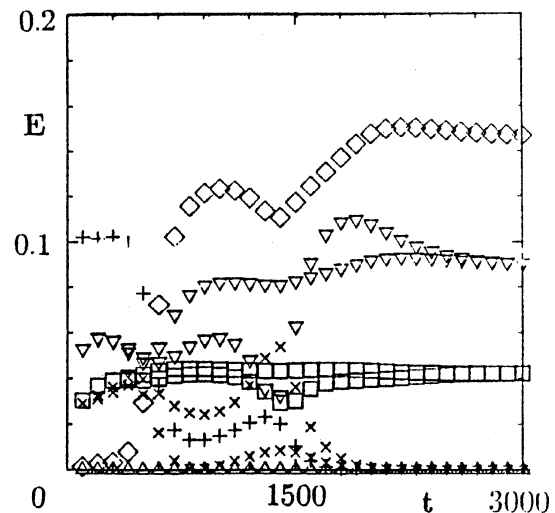


図4. ランダムな初期値からの時間発展
 ◇: ψ_1 , +: ψ_2 , □: ψ_3, ψ_4 , ▽: ψ_5, ψ_6 , ×: ψ_7, ψ_8

$t = 50$ までは、全ての不安定モードが線形増幅率にしたがって増大することを確認している。 $t = 300 \sim 1200$ では増幅された不安定モードは相互作用し、 $t = 1200$ 以降では ψ_2, ψ_7, ψ_8 は単調に減少していき、2次流は $\psi_1, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6$ で構成される。最後まで生き残るモード $\psi_1, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6$ は、空間的に対称なモードであり、減衰する ψ_2, ψ_7, ψ_8 は空間的に反対称なモードである。このように、モード間の相互作用によって特定のモードが選ばれる。

単一の不安定モード ψ_1 を主流に加えた初期条件(B)から出発した場合、流れ場全体 Ψ のエネルギーと分解された攪乱 $\tilde{\Psi}$ の成分 $\tilde{\Psi}_0, \tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2$ のエネルギーの時間発展は図3と同様になる。一方、 $\tilde{\Psi}_1$ を ψ_j ($1 \leq j \leq 8$)で分解した結果は図5に示されていて、 ψ_2, ψ_7, ψ_8 は励起されず、2次流は $\psi_1, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6$ から構成される。初期の時間発展において、 ψ_1 は線形増幅率 $\sigma = 0.148$ で指数的に増大し、 ψ_5, ψ_6 と ψ_3, ψ_4 がついて励起される。最終状態において、 $\tilde{\Psi}_1$ のエネルギーのうちそれぞれの ψ_j のエネルギーが占める割合は、 $\psi_1:35\%$, $\psi_3:12\%$, $\psi_4:12\%$, $\psi_5:20\%$, $\psi_6:20\%$ である。この割合は、初期条件(A)のもとで得られた結果と一致している。特定の不安定モード ψ_1 のみを主流に加えても、そのモードの成長をきっかけとして他の縮退した不安定モードも成長し、初期条件(A)の場合と同じ2次流を形成している。初期値 $\psi_1, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6$ から出発した場合は、 $\psi_1, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6$ が組となって励起され、 ψ_2, ψ_7, ψ_8 は励起されない。このように、縮退したモードのうち、特定の組のものだけが成長している。

初期条件(A)のもとで成長した後に減衰した不安定モード ψ_2 を主流に加えた初期条件(C)のもとで時間発展を求めた。それぞれの不安定モードのエネルギーの時間発展を図6に示す。まず、 ψ_2 が成長し、 ψ_7, ψ_8 が次に励起されている。初期の段階では、同じ対称性を持つ不安定モードが組になって増幅している。 $t = 200$ で、他の不安定モードも励起される。 $t = 2000$ まで計算を行ったが、この範囲では ψ_2, ψ_7, ψ_8 は減衰していない。また、 ψ_5, ψ_6 が振動しながら増大していて、この状態は過渡期であると考えられる。最終的に ψ_2, ψ_7, ψ_8 が減衰するのかどうか、2次流が他の場合(A),(B)と一致するのかどうかを明らかにするために、現在も計算を継続中である。

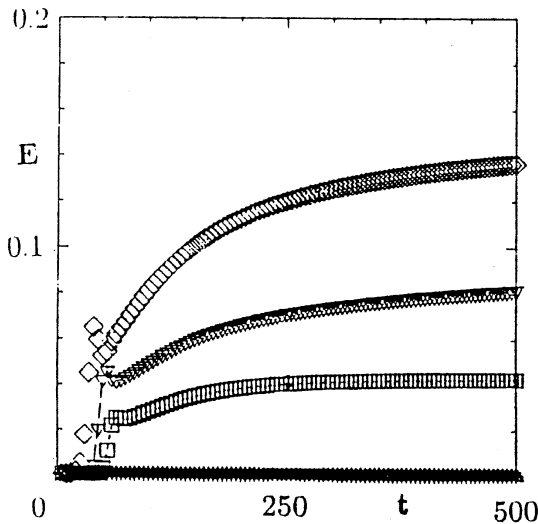


図5. 初期値 $\tilde{\Psi} + 10^{-6}\psi_1$ からの時間発展
◇: ψ_1 , +: ψ_2 , □: ψ_3, ψ_4 , ▽: ψ_5, ψ_6 , ×: ψ_7, ψ_8

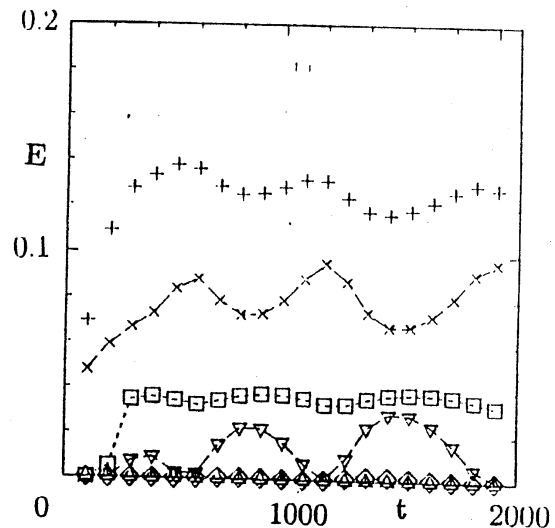


図6. 初期値 $\tilde{\Psi} + 10^{-6}\psi_2$ からの時間発展
◇: ψ_1 , +: ψ_2 , □: ψ_3, ψ_4 , ▽: ψ_5, ψ_6 , ×: ψ_7, ψ_8

3 ランダウ方程式

直接数値計算で得られた結果を説明するために、弱非線形解析を行い、ランダウ方程式を導く。λを減らすと増幅率 σ_r が増大して流れが安定から不安定に変わるので、臨界でのλを λ_0 として、λ、 ∂_t 、 Ψ を次のように展開する。

$$\lambda = \lambda_0 + \epsilon^2 \lambda_2 + \dots, \quad (5)$$

$$\partial_t = \partial_{\tau_0} + \epsilon^2 \partial_{\tau_2} + \dots, \quad (6)$$

$$\Psi = \Psi_0(y) + \epsilon \Psi_1 + \epsilon^2 \Psi_2 + \epsilon^3 \Psi_3 + \dots. \quad (7)$$

$F(y)$ は式(2)で与えられていて、 $F(y) = -\nu \partial_y^3 U_6(y) + \lambda_0 \partial_y U_6(y) + \epsilon^2 \lambda_2 \partial_y U_6(y) + \dots$ である。これらを基礎方程式(1)に代入して ϵ の冪で整理すると次のようになる。

$$O(1) : -\nu \Delta^2 \Psi_0 + \lambda_0 \Delta \Psi_0 = -\nu \partial_y^3 U_6(y) + \lambda_0 \partial_y U_6(y). \quad (8)$$

$$O(\epsilon) : \partial_{\tau_0} \Delta \Psi_1 + \partial_y \Psi_0 \partial_x \Delta \Psi_1 - \partial_y^3 \Psi_0 \partial_x \Psi_1 - \nu \Delta^2 \Psi_1 + \lambda_0 \Delta \Psi_1 = 0. \quad (9)$$

$$O(\epsilon^2) : \partial_{\tau_0} \Delta \Psi_2 + \partial_y \Psi_0 \partial_x \Delta \Psi_2 - \partial_y^3 \Psi_0 \partial_x \Psi_2 - \nu \Delta^2 \Psi_2 + \lambda_0 \Delta \Psi_2 \\ = \lambda_2 \partial_y U_6(y) - \lambda_2 \Delta \Psi_0 - (\partial_x \Delta \Psi_1 \partial_y \Psi_1 - \partial_y \Delta \Psi_1 \partial_x \Psi_1). \quad (10)$$

$$O(\epsilon^3) : \partial_{\tau_0} \Delta \Psi_3 + \partial_y \Psi_0 \partial_x \Delta \Psi_3 - \partial_y^3 \Psi_0 \partial_x \Psi_3 - \nu \Delta^2 \Psi_3 + \lambda_0 \Delta \Psi_3 \\ = -(\partial_{\tau_2} \Delta \Psi_1 + \lambda_2 \Delta \Psi_1 + \partial_x \Delta \Psi_1 \partial_y \Psi_2 - \partial_y \Delta \Psi_1 \partial_x \Psi_2 + \partial_x \Delta \Psi_2 \partial_y \Psi_1 \\ - \partial_y \Delta \Psi_2 \partial_x \Psi_1). \quad (11)$$

低次から解を求め非同次項を評価していくと次のようになる。式(8)から $\Psi_0 = -\cos y - (1/\omega_6) \cos \omega_6 y$ と決まる。式(9)は、 Ψ_0 を主流、 Ψ_1 を攪乱としたときの線形安定性の基礎方程式と一致していて、 $\Psi_1 = \exp(i\alpha x)(\tilde{\psi}) + c.c.$ とおける。 $\tilde{\psi}$ は線形安定性の固有問題(3)の解であり、最大増幅率を与える固有関数 ψ_j ($j = 1, \dots, 8$)と固有関数 ψ_j の振幅 \tilde{A}_j を用いて、 $\tilde{\psi} = \sum_{j=1}^8 \tilde{A}_j \psi_j$ とおく。式(10)の右辺は、

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \lambda_2 \partial_y U_6(y) - \lambda_2 \Delta \Psi_0 + i\alpha \partial_y [\tilde{\psi} \partial_y^2 \tilde{\psi}^* - \tilde{\psi}^* \partial_y^2 \tilde{\psi}] \\ &\quad + i\alpha \exp(2i\alpha x) \partial_y [\tilde{\psi} \partial_y^2 \tilde{\psi} - (\partial_y \tilde{\psi})^2] \\ &\quad - i\alpha \exp(-2i\alpha x) \partial_y [\tilde{\psi}^* \partial_y^2 \tilde{\psi}^* - (\partial_y \tilde{\psi}^*)^2] \\ &= i\alpha \sum_{m=1}^8 \sum_{n=1}^8 \tilde{A}_m \tilde{A}_n^* \partial_y [\psi_m \partial_y^2 \psi_n^* - \psi_n^* \partial_y^2 \psi_m] \\ &\quad + i\alpha \exp(2i\alpha x) \sum_{m=1}^8 \sum_{n=1}^8 \tilde{A}_m \tilde{A}_n \partial_y [\tilde{\psi}_m \partial_y^2 \tilde{\psi}_n - \partial_y \tilde{\psi}_m \partial_y \tilde{\psi}_n] \\ &\quad - i\alpha \exp(-2i\alpha x) \sum_{m=1}^8 \sum_{n=1}^8 \tilde{A}_m^* \tilde{A}_n^* \partial_y [\tilde{\psi}_m^* \partial_y^2 \tilde{\psi}_n^* - \partial_y \tilde{\psi}_m^* \partial_y \tilde{\psi}_n^*] \end{aligned}$$

となる。 Ψ_{20mn} 、 Ψ_{22mn} をそれぞれ、

$$-\nu \Delta^2 \Psi_{20mn} + \lambda_0 \Delta \Psi_{20mn} = i\alpha \partial_y [\psi_m \partial_y^2 \psi_n^* - \psi_n^* \partial_y^2 \psi_m], \quad (12)$$

$$-2i\alpha\{\partial_y^2 U \Psi_{22mn} - U(\partial_y^2 - 4\alpha^2)\Psi_{22mn}\} - \nu(\partial_y^2 - 4\alpha^2)^2 \Psi_{22mn} = i\alpha\partial_y [\tilde{\psi}_m \partial_y^2 \tilde{\psi}_n - \partial_y \tilde{\psi}_m \partial_y \tilde{\psi}_n] \quad (13)$$

を満たす解であるとする、 Ψ_2 は

$$\Psi_2 = \sum_{m,n} \tilde{A}_m \tilde{A}_n^* \Psi_{20mn} + \exp(2i\alpha x) \sum_{m,n} \tilde{A}_m \tilde{A}_n \Psi_{22mn} + \exp(-2i\alpha x) \sum_{m,n} \tilde{A}_m^* \tilde{A}_n^* \Psi_{22mn}^* \quad (14)$$

となる。式(11)の右辺を、 $G_{30} + \exp(i\alpha x)G_{31} + \exp(2i\alpha x)G_{32} + \exp(3i\alpha x)G_{33} + c.c$ とおくと、

$$\begin{aligned} G_{31} = & -\left(\sum_{n=1}^8 \tilde{A}_n [\partial_{\tau_2}(\partial_y^2 - \alpha^2)\psi_n + \lambda_2(\partial_y^2 - \alpha^2)\psi_n]\right) \\ & + i\alpha \sum_{l=1}^8 \sum_{m=1}^8 \sum_{n=1}^8 \tilde{A}_l \tilde{A}_m \tilde{A}_n^* (\partial_y^2 - \alpha^2)\psi_l \partial_y \Psi_{20mn} \\ & - i\alpha \sum_{l=1}^8 \sum_{m=1}^8 \sum_{n=1}^8 \tilde{A}_l \tilde{A}_m \tilde{A}_n^* \psi_l \partial_y^3 \Psi_{20mn} \\ & - i\alpha \sum_{l=1}^8 \sum_{m=1}^8 \sum_{n=1}^8 \tilde{A}_l^* \tilde{A}_m \tilde{A}_n (\partial_y^2 - \alpha^2)\psi_l^* \partial_y \Psi_{22mn} \\ & + i\alpha \sum_{l=1}^8 \sum_{m=1}^8 \sum_{n=1}^8 \tilde{A}_l^* \tilde{A}_m \tilde{A}_n \psi_l^* (\partial_y^2 - 4\alpha^2)\partial_y \Psi_{22mn} \\ & - 2i\alpha \sum_{l=1}^8 \sum_{m=1}^8 \sum_{n=1}^8 \tilde{A}_l^* \tilde{A}_m \tilde{A}_n [\Psi_{22mn}(\partial_y^2 - \alpha^2)\partial_y \psi_l^* - \psi_l^* (\partial_y^2 - 4\alpha^2)\partial_y \Psi_{22mn}] \end{aligned}$$

である。 g_j を随伴固有値問題(4)の固有関数とすると、可解条件より

$$\int_0^{13\pi} g_j^* G_{31} dy = 0 \quad (j = 1 \sim 8) \quad (15)$$

が得られる。この式を \tilde{A}_j について整理すると、

$$\partial_{\tau_2} \tilde{A}_j = -\lambda_2 \tilde{A}_j + \sum B_{l,n,m,j} \tilde{A}_l \tilde{A}_m \tilde{A}_n^* \quad (16)$$

が得られる。さらに、 $\epsilon^2 \partial_{\tau_2} = \partial_t$ 、 $\epsilon^2 \lambda_2 = \lambda - \lambda_0$ を代入し $A_j = \epsilon \tilde{A}_j$ とおくと、次式の連立ランダウ方程式

$$\partial_t A_j = \sigma_j A_j + \sum B_{l,n,m,j} A_l A_m A_n^* \quad (17)$$

が得られる。この式 of 非線形項は不安定モード間の相互作用を示している。異なる波数のモード A_j 間の連立ランダウ方程式では、波数の成分 $\exp(i\alpha x)$ で分離されるので、たとえば、 A_1 の3次の相互作用の項 $|A_1|^2 A_1$ は dA_1/dt の式以外に含まれることはない。しかし、式(17)のように、同じ波数で不安定が起こる場合には、 $|A_1|^2 A_1$ は、 A_1 の時間発展の式以外にも含まれている。これは、非線形項 $\psi_1 \psi_1^* \psi_1$ が成分 ψ_1 だけではなく他の成分も含んでいるためである。 dA_3/dt に対しても $|A_1|^2 A_1$ の項が存在するので、初期条件 $A_j = 0 (j \neq 1)$ から A_3 が増大する可能性がある。このように、式(17)には通常の連立ランダウ方程式には含まれないような項が含まれている。これが2.2節の(B),(C)の初期条件のもとでの結果を定性的に説明していると考えられる。この方程式のランダウ係数を評価し、平衡振幅解を求めるのが今後の課題である。

4 まとめ

準周期流は「最大増幅率をもつ臨界波数 α_c の攪乱に対して、複数の独立な固有モードが存在する」という線形安定特性をもつ。したがって、流れが不安定になるとときには同一波数を持つ複数のモードが励起される。我々は、「複数の不安定な固有モードのうちどのモードが成長し、2次流を構成するか」に興味を持ち、 $U_6(y)$ ($\omega_6 = 21/13$) の場合に直接数値計算を行い、不安定の後、不安定モードの一部によって2次流が形成されることを見出した。結果は以下のようにまとめられる。

- [1] 微小なランダムの初期値から全ての線形不安定モードがいったんは励起され相互作用し、その結果、2次流は一部の不安定モード $\psi_1, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6$ のみで構成される。
- [2] 主流 \bar{v} に微小な不安定モード ψ_1 を加えた初期値の場合も、他のモードが励起され、2次流は[1]と同じになる。

これらのモード選択の機構を明らかにするために弱非線形解析を行い、連立ランダウ方程式を導出した。この方程式は通常のランダウ方程式には含まれないような項が入っていて、あるモードが成長するときには別の不安定モードを励起する。連立ランダウ方程式によって得られた平衡振幅解と流れの直接数値計算によって得られた2次流との定量的な比較を行うことが今後の課題である。

参考文献

- [1] M. C. Cross and H. C. Hohenberg, Rev. Mod. Phys. **65**, 851 (1993)
- [2] B. Christiansen, P. Alstrom and M. T. Levinsen, Phys. Rev. Lett. **68**, 2157 (1992)
- [3] H. Fukuta and Y. Murakami, Phys. Rev. **E57**, 449 (1998)
- [4] A. C. Newell and Y. Pomeau, J. Phys. A. **26**, L429 (1993)
- [5] F. V. Dolzhanskii, V. A. Krymov and D. Yu. Manin, Sov. Phys. Usp. **33** 495 (1990)