

## 回転剪断乱流の絶対渦度ゼロ状態

京工織大 田中 満 (Mitsuru Tanaka)  
核科研 木田 重雄 (Shigeo Kida)  
岡山大 柳瀬 眞一郎 (Shinichiro Yanase)  
愛媛大 河原 源太 (Genta Kawahara)

### 1. はじめに

回転剪断乱流は地球物理・宇宙物理のさまざまな自然現象において観察されるほか、ターボ機械内流れなどにも見られ工学的にも重要であることから、これまでに数多くの研究が行われてきた。その結果、乱流構造の2次元化機構など、回転乱流のさまざまな特徴が明らかになってきている。特に、主流の渦度が回転軸と平行(または反平行)な流れにおける最大の特徴として、回転角速度と主流剪断の渦度との大小関係により流れのふるまいが大きく異なることを挙げる事ができる。回転が弱く、回転角速度ベクトルと主流剪断の渦度ベクトルが反平行の場合には、3次元的な乱れは増大し、反平行で十分に回転が強い場合や平行な場合には乱れが減衰することが知られている(なお、本稿では、2つの渦度が平行となる系をサイクロニック系、反平行となる系をアンチサイクロニック系と呼ぶ。)

チャンネル乱流では、壁付近の剪断と回転との関係がサイクロニック (suction side) かアンチサイクロニック (pressure side) かにより乱流特性が大きく異なり、平均分布もチャンネル中央に関して非対称となることが知られている。また、回転が強くなるにつれ、コア領域に線形の平均速度分布が現れ、そこで平均剪断の絶対渦度がほぼゼロとなることが実験 (Johnston et al. 1972, Nakabayashi & Kitoh 1996) と直接数値計算 (Kristoffersen & Andersson 1993, Lamballais et al. 1996) により見い出されている。さらに、この絶対渦度ゼロの領域は剪断の絶対渦度がゼロの回転単純剪断乱流において観測される縦渦構造 (Tanaka 1994, Tanaka et al. 1999) と類似した極めて秩序だった構造からなっていることが数値計算により知られている (Lamballais et al. 1996)。絶対渦度の消失はポアズイユ乱流のみならず、回転自由剪断乱流 (Métais et al. 1995) や回転平面クエット乱流 (Bech & Andersson 1997) など他の流れにおいても観測されている。しかしながら、絶対渦度ゼロの領域が形成されるメカニズムについてはわかっていない。そこで本稿では、そのメカニズムの解明のため、平行剪断乱流の平均速度分布の時間変化について考察する。比較的単純な系において、平均速度分布の時間変化が観察できるように、単純剪断流に剪断の方向に周期的に変化し、剪断流に平行な流れを加えたものについて数値的に調べる。

### 2. 定式化

#### 2.1 基礎方程式

回転系での非圧縮性流体の運動を考える。単純剪断流  $\mathbf{U} = (Sx_2, 0, 0)$  が  $x_3$  軸まわりに回転しているとき (図 1), 回転系での速度変動  $u_i$  に対する方程式は、

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + Sx_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -Su_2 \delta_{i1} + f \epsilon_{ij3} u_j - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i \quad (1)$$

にソレノイダル条件 ( $\partial u_i / \partial x_i = 0$ ) を加えたものとなる。ここで、 $p$  は圧力、 $\nu$  は流体の動粘性係数、 $f = 2\Omega$  で  $\Omega$  は系の回転角速度である。流体の密度  $\rho$  は一定であるので、ここでは 1 とおいている。なお、主流剪断の絶対渦度は  $(f - S)\hat{x}_3$  である。

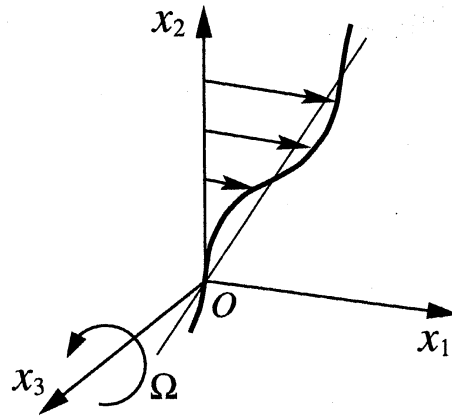


図1 流れの形態.

一般に、剪断流はほぼ流れ方向を向いた渦（縦渦）に支配され、乱れの  $x_1$  方向への変動は相対的に小さい。そこで本研究では、速度および圧力変動が  $x_1$  方向に変化しないと仮定して式 (1) より得られる

$$\partial_t u_1 + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp) u_1 = (f - S) u_2 + \nu \nabla_\perp^2 u_1, \quad (2a)$$

$$\partial_t u_2 + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp) u_2 = -\partial_2 p - f u_1 + \nu \nabla_\perp^2 u_2, \quad (2b)$$

$$\partial_t u_3 + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp) u_3 = -\partial_3 p + \nu \nabla_\perp^2 u_3 \quad (2c)$$

についても考察する。ここで、 $\perp$  は  $x_1$  軸に垂直な方向の成分を表し、 $\partial_i = \partial/\partial x_i$ ,  $\partial_t = \partial/\partial t$  のように略記している。式 (2b) からわかるように、この流れは速度の垂直成分が流れ方向成分の影響を受けるといふ点で通常の2次元乱流とは異なっている。

ここでは、速度変動場  $\mathbf{u}(\mathbf{x}; t)$  を  $x_3$  方向に平均した量  $\bar{\mathbf{u}}(x_2; t)$  とそれからの変動  $\mathbf{u}'(\mathbf{x}; t)$  に分ける。初期条件として、

$$\bar{u}_1(x_2; 0) = A \sin x_2 \quad (3)$$

のように  $x_2$  方向に変化する大きなスケールの変動 (図1) とランダムな攪乱を与え、その後の平均速度場  $\mathbf{U}(x_2; t) + \bar{\mathbf{u}}(x_2; t)$  の時間発展を調べる。

## 2.2 シアー・コリオリ不安定性

回転単純剪断流の線形安定性について簡単に述べる。Bradshaw (1969) は無次元量、

$$B = f(f - S)/S^2 = (1 + Ro)/Ro^2 \quad (4)$$

を導入し、回転乱流と成層乱流のアナロジーから、系の回転は剪断乱流の3次元運動を  $B > 0$  のとき安定化させ、 $B < 0$  のとき不安定化させるものと論じた。ここで、

$$Ro = -\frac{S}{f}, \quad (5)$$

は (剪断) ロスビー数で、回転に対する単純剪断の相対的な強さを表わす。この判定条件に従えば、流れはアンチサイクロニックで回転が弱い ( $Ro < -1$ ) のときには不安定、サイクロニック ( $Ro > 0$ ),

表 1: Runs.

run	$f$	$A$	$\omega'$	$k_p$	回転単純剪断流の安定性	不安定領域
run1	2.0	-1	0.1	8	アンチサイクロニック (安定)	---
run2	1.5	-1	0.1	8	アンチサイクロニック (安定)	$2\pi/3 < x_2 < 4\pi/3$
run3	1	-1	0.1	8	アンチサイクロニック (中立)	$-\pi/2 < x_2 < \pi/2$
run4	0.5	-1	0.1	8	アンチサイクロニック (不安定)	$\pi/3 < x_2 < 5\pi/3$
run5	0	-1	0.1	8	非回転 (中立)	---
run6	-0.5	-1	0.1	8	サイクロニック (安定)	---

もしくは、アンチサイクロニックで回転が強い ( $0 > Ro > -1$ ) ときには安定となる。非回転の場合 ( $Ro = \infty$ ) と単純剪断の絶対渦度がゼロの場合 ( $Ro = -1$ ) は中立である。

実際、この判定条件は、以下に示すように、 $x_1$  方向への一様性を仮定して得られる式 (2) の線形化方程式から導出することができる (Pedley 1969, Yanase et al. 1993, Leblanc & Cambon 1997). 粘性を無視すると、正弦波状の攪乱  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  は、

$$\frac{d\tilde{u}_1}{dt} = (-S + f)\tilde{u}_2, \quad \frac{d\tilde{u}_2}{dt} = -\frac{k_3^2}{k_2^2 + k_3^2}f\tilde{u}_1, \quad \tilde{u}_3 = -\frac{k_2}{k_3}\tilde{u}_2, \quad (6)$$

に従う。ここで、 $\mathbf{k}$  は波数ベクトルである (ここでは、 $k_1 = 0$  と仮定していることに注意)。  $B < 0$  では速度場は時間とともに指数的に増大するが、 $B > 0$  では振動的である。Bradshaw の判定条件は、厳密には  $x_1$  方向への変動場の一様性を仮定したときの層流 (単純剪断流) の線形安定性を示している。

本研究では単純剪断乱流に加えて式 (3) の形の速度変動を与えているため、平均速度勾配は  $x_2$  方向に変化している。そこで局所的な流れの性質を表す量として、局所ロスビー数、

$$Ro^{(l)}(x_2; t) = -\frac{S + d\bar{u}_1(x_2; t)/dx_2}{f} \quad (7)$$

を導入する。

### 2.3 数値計算法

主に、2次元の計算を行う。式 (2) を空間微分には擬スペクトル法、時間積分にはルンゲ・クッタ・ギル法を用いて解く。初期場としては、式 (3) で定義される速度変動にランダムで等方的な攪乱を加える。そのエネルギースペクトルは3次元スペクトルが  $E(k) = ck^4 \exp(-2k^2/2k_p^2)$  の形をもつ3次元等方的なスペクトルのうち、 $k_1 = 0$  平面 (ここでは  $k = \sqrt{k_2^2 + k_3^2}$ ) だけを抜き出したものとする。ここで、 $c$  は定数、 $k_p$  はスペクトルが最大となる波数である。剪断率  $S$  を 1、動粘性係数  $\nu$  を  $2^{-8}$  とし、回転角速度の2倍  $f$ 、式 (3) で表される変動の振幅  $A$ 、初期攪乱の振幅とその代表的な波数  $k_p$  を変えていくつかの計算を行う。ここでは、初期攪乱の振幅をその渦度の振幅  $\omega'$  で表すことにする。計算領域は  $0 \leq x_2 < 2\pi$ ,  $0 \leq x_3 < 32\pi$  とし、格子点数はそれぞれの方向に 128 点、2048 点とる。今回行った計算のうち代表的なものを表1にまとめる。なお、run2, run3, run4 では、初期に局所的に不安定となる領域が存在することを注意しておく。

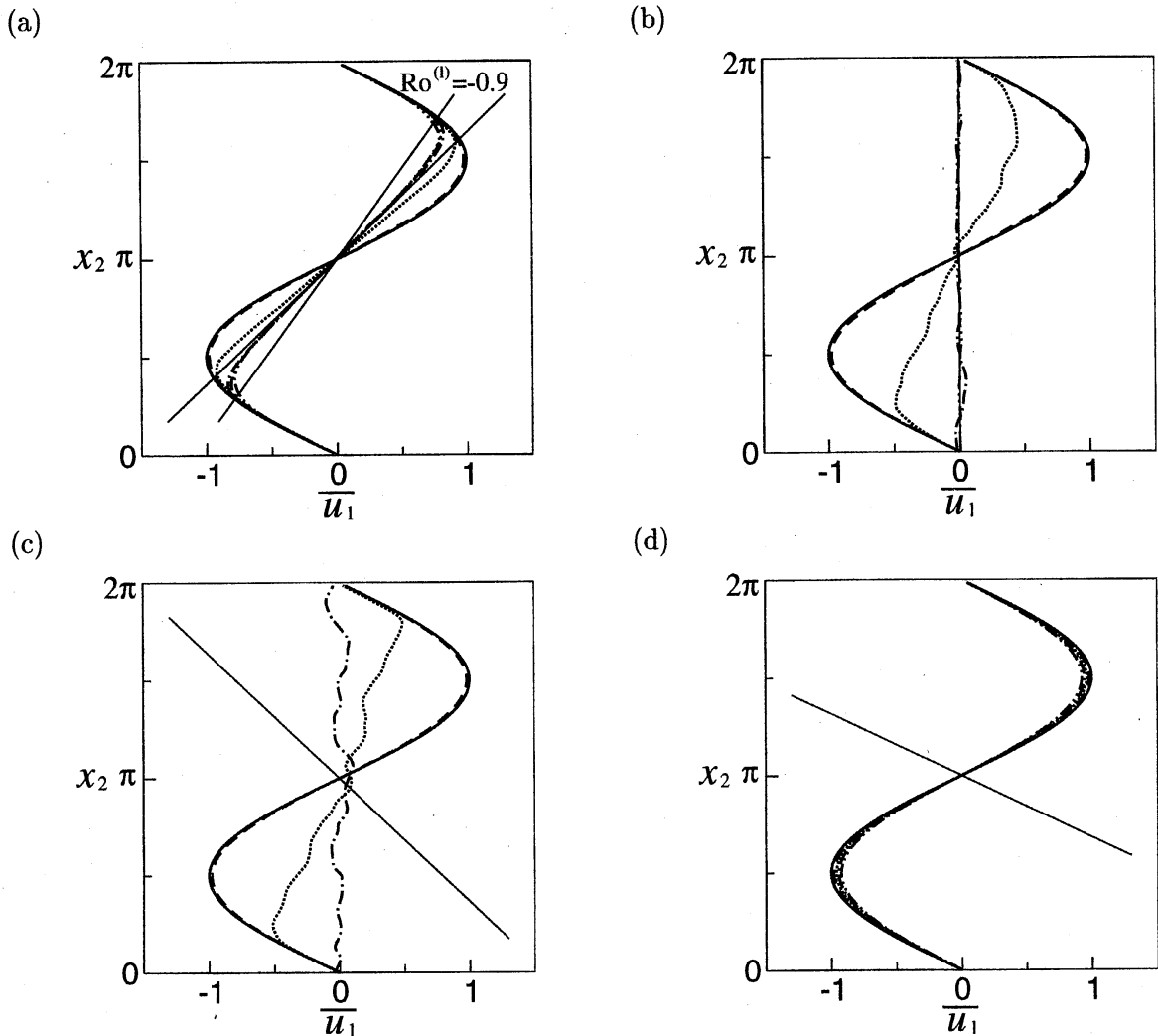


図2 平均速度分布の時間発展. (a) run2, (b) run3, (c) run4, (d) run6. 実線, 破線, 点線, 1点鎖線, 2点鎖線, 3点鎖線は, それぞれ,  $St = 0, 5, 10, 15, 20, 25$  での分布. 直線は絶対渦度ゼロ ( $Ro^{(l)} = -1$ ) の状態を表す. また, (a) の勾配が急な直線は  $Ro^{(l)} = -0.9$  を表す.

### 3. 結果と考察

#### 3.1 平均速度分布の時間変化

単純剪断を除いた平均速度分布の時間発展を図2に示す. (a) は run2 (線形安定な系), (b) は run3 (線形中立安定な系), (c) は run4 (線形不安定な系), (d) は run6 (線形安定な系) の結果である. 図(a)の run2 では初期の速度分布のうち,  $2\pi/3 < x_2 < 4\pi/3$  の範囲内が局所的に見て不安定な状態となっている.

局所的に不安定な領域の速度分布が変化していき, 線形の速度分布が現れている. 興味深いことに, この線形領域では絶対渦度がほぼゼロ ( $Ro^{(l)} \approx -1$ ) となっている. 一方, 初期に安定であった  $x_2 = 0$  を中心とする領域では, 平均速度分布の変化はほとんど見られない.

図(b),(c)に示す run3 (中立安定な系), run4 (不安定な系) においても, run2 と同様に局所的に不安定な領域から速度分布の変形が始まる. しかし, run2 とは異なり, 局所的に安定な領域は

維持されず、最終的に大スケールの変動  $\bar{u}_1(x_2; t)$  は消滅する。これは、 $Ro = -1$  の中立安定な系ではいたるところ線形中立安定な状態、不安定な系ではいたるところ線形不安定な状態に収束したことを意味している。なお、run4 では速度変動の振幅が単調に増大し続けたため、 $St = 12$  で計算を打ち切った（一点鎖線はこの最終時刻での分布を表す）。図 (d) より、run6 の平均速度分布はほとんど時間変化しないことがわかる。これは、全領域が安定な状態であるため、初期に与えた微小攪乱は減衰してしまい、平均速度を変化させなかったことによる。わずかに見られる平均速度分布の変化は、主として粘性のためである。run1 や run5 でも同様の理由で平均速度分布の時間変化は小さい（図略）。

run2 において他のパラメータを固定し、初期攪乱の振幅  $\omega'$  を 1, 0.01 に変更したものとその代表的な波数  $k_p$  を 4, 16 に変更したものの計 4 つの計算を行ったが、平均流速分布が落ち着くのに要する時間が異なるものの最終状態はほぼ同じであった（図略）。また、変動の振幅  $A$  を  $-0.5, 2$  に変化させた計算やレイノルズ数 ( $2\pi|A|/\nu$ ) を 4 倍にした計算も行ったが、run2 と同様に  $Ro^{(l)} \approx -1$  の領域が出現した（図略）。

### 3.2 レイノルズ応力

平均速度  $\bar{u}_1$  の時間変化は  $\partial_t \bar{u}_1 = -\partial_2(\overline{u'_1 u'_2}) + \nu \partial_2^2 \bar{u}_1$  と記述できる。右辺の 2 項のうち、第 1 項、すなわち、レイノルズ応力項が支配的であることを確認した。図 3 に示すように、レイノルズ応力  $-\overline{u'_1 u'_2}$  は  $x_2 = \pi$  に極大値をもち、 $x_2 < \pi$  ( $x_2 > \pi$ ) で流速を増加（減少）させている。つまり、速度勾配を減少させるようにはたらいっている。 $-\overline{u'_1 u'_2}$  は  $St \approx 10$  まで増加するが、その後減少に転じる。

レイノルズ応力のふるまいの詳細を知るため、その増減の収支、

$$\partial_t(-\overline{u'_1 u'_2}) = P + G + \Phi + \epsilon_{12} + T^{(N)} + T^{(P)} + T^{(V)} \quad (8)$$

について調べる。ここで、 $P = (S + \partial_2 \bar{u}_1) \overline{u'_2{}^2}$ 、 $G = f(\overline{u'_1{}^2} - \overline{u'_2{}^2})$ 、 $\Phi = -\overline{p'(\partial_1 u'_2 + \partial_2 u'_1)}$ 、 $\epsilon_{12} = 2\nu(\overline{\partial_k u'_1})(\overline{\partial_k u'_2})$  はそれぞれ、生成項、コリオリ項、圧力歪み項、粘性散逸項を表す。また、 $T^{(N)} = \partial_2(\overline{u'_1 u'_2{}^2})$ 、 $T^{(P)} = \partial_2(\overline{u'_1 p'})$ 、 $T^{(V)} = -\nu \partial_2^2(\overline{u'_1 u'_2})$  はそれぞれ、速度変動、圧力、粘性による輸送を表す。図 4 に、 $-\overline{u'_1 u'_2}$  が減少中のある時刻 ( $St = 11$ ) での  $-\overline{u'_1 u'_2}$  の収支を示す。(a) において実線は生成項とコリオリ項の和  $P + G$ 、破線は圧力歪み項  $\Phi$ 、点線は粘性散逸項  $\epsilon_{12}$ 、一点鎖線は輸送項  $T^{(N)} + T^{(P)} + T^{(V)}$  を表している。また、(b) において実線はすべての項の和、破線は生成項、コリオリ項、圧力歪み項の 3 項の和、点線は (a) と同じく粘性散逸項を表している。図 4 (a) より生成項と圧力歪み項の 2 項の絶対値が大きく、前者は正で後者は負であることがわかる。統計的なゆらぎが大きいため確定的ではないが、図 4 (b) より両者の和は負の値をとっており、少なくとも粘性項と同程度にレイノルズ応力の減少に寄与していることがわかる。また、圧力ポアソン方程式  $\nabla^2 p' = -(\partial_i u'_j)(\partial_j u'_i) + \partial_2^2(\overline{u'_2{}^2}) - f \partial_2 u'_1$  の右辺の中で線形項 (第 3 項) からの寄与は支配的ではないことを確かめた。このことから、平均速度勾配が  $Ro^{(l)} \approx -1$  に収束していく際に、圧力変動を伴う非線形のダイナミクスがはたらいっているといえる。

なお、run2 の安定領域では  $\overline{u'_2{}^2}$  は比較的小さな値のまま維持される（図略）。安定領域で  $u_2$  は  $u_1, u_3$  に変換されている。実際に収支を調べたところ、生成項により  $\overline{u'_2{}^2}$  は減少、 $\overline{u'_1{}^2}$  は増加し、圧力歪み項により  $\overline{u'_2{}^2}$  は減少、 $\overline{u'_3{}^2}$  は増加していることがわかった。このように安定領域では  $u'_2$  が小さく、そこで流れが分断されているため、周期境界条件が線形速度分布に与える影響は小さいものと思われる。

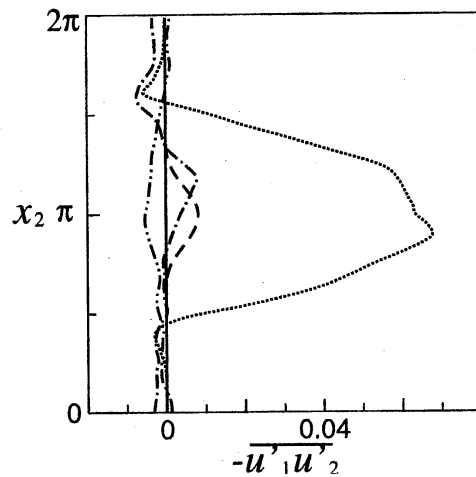


図3  $-\overline{u'_1 u'_2}$  の時間発展 (run2). 破線, 点線, 1点鎖線, 2点鎖線の順に  $St = 5, 10, 15, 20$ .

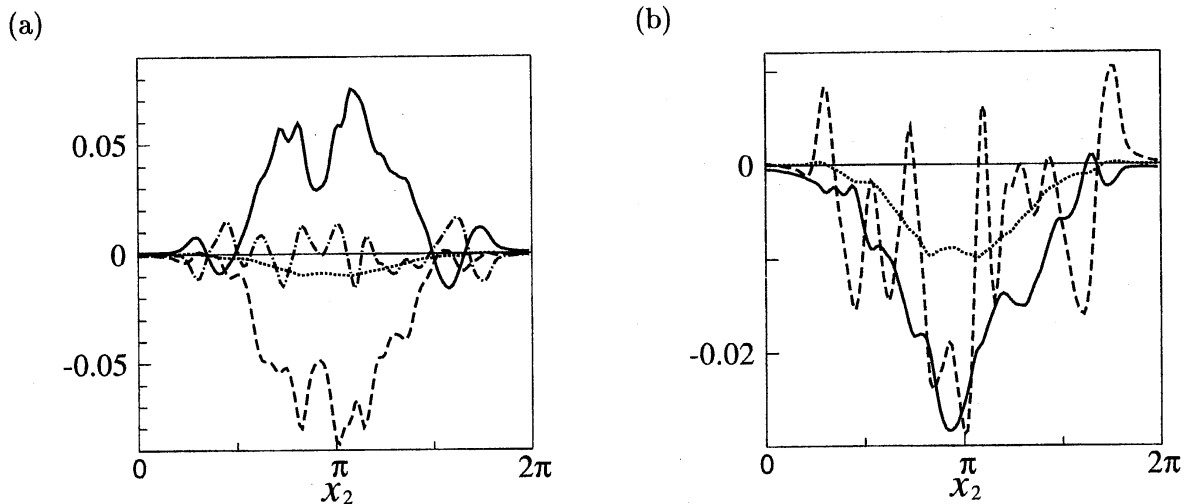


図4  $-\overline{u'_1 u'_2}$  の増減収支 (run2). 時刻  $St = 11$ .

### 3.3 熱対流乱流との類似性

ここでは, 回転剪断乱流と熱対流乱流との類似性について議論する. 乱流場が  $x_1$  方向に一様な場合には, 以下に示すように, 両者の間に非線形レベルでのアナロジーが成り立つ. 新たに変数,

$$\check{u}_1 = u_1 - (f - S)x_2, \quad \check{p} = p + \frac{f(f - S)}{2}x_2^2 \quad (9)$$

を導入すると, 式 (2a),(2b) は, それぞれ,

$$\frac{\partial \check{u}_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp) \check{u}_1 = \nu \nabla_\perp^2 \check{u}_1, \quad (10a)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp) u_2 = -\frac{\partial \check{p}}{\partial x_2} - f \check{u}_1 + \nu \nabla_\perp^2 u_2 \quad (10b)$$

のように書き換えられる. 一方, 2次元ブジネ方程式は熱拡散係数を  $\kappa$  として,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp) T = \kappa \nabla_\perp^2 T, \quad (11a)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp) u_2 = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \alpha g T + \nu \nabla_\perp^2 u_2 \quad (11b)$$

のように書ける．ここで，重力は  $-x_2$  方向にはたらくと仮定しており， $T$  は温度， $\alpha$  は体膨張率， $g$  は重力加速度である．上式より，熱対流での温度場  $T$  とここで新たに導入した変数  $\tilde{u}_1$  とは  $Pr = \nu/\kappa = 1$  のとき同じようにふるまうことがわかる．同様のアナロジーが Veronis (1970) によっても示されている．

非回転系では流体要素の移動に対して全速度  $u_1 + Sx_2$  が保存するが，式 (10a) より，回転系では  $\tilde{u}_1$  が保存することがわかる．これは，Tritton (1992) で議論されているように，流体要素が  $x_2$  方向に  $\Delta x_2$  だけ移動する際に，コリオリ力が  $f\Delta x_2$  の大きさの (流れ方向の) 運動量をその流体要素に供給することに対応している．なお，この議論においても圧力が  $u_1$  を変化させないこと，すなわち， $x_1$  方向への一様性が暗に仮定されていることに注意する必要がある．

上の結果をもとに，第 3.1 節で得られた結果を考察し直してみる．図 3 に run2 での  $-\bar{u}_1 = -\tilde{u}_1 + (f - S)x_2$  の時間発展を示す．熱対流との関係を考えて，重力が  $-x_2$  方向に作用しているものとして， $-\tilde{u}_1 > 0$  が高温域， $-\tilde{u}_1 < 0$  が低温域に相当する．初期には， $x_2 = \pi$  を挟んで，'低温域' が上側に '高温域' が下側にあることになる．この不安定な領域において分布は時間変化し，最終的には '温度勾配がほぼゼロ' の領域が出現する．つまり，回転剪断乱流における絶対渦度ゼロ ( $\bar{u}_1$  の勾配がゼロ) の領域の出現は，水平平行平板間の熱対流乱流の中央領域において現れる温度勾配ゼロの状態に対応していることがわかる．熱対流乱流での温度勾配ゼロの状態と円筒ジェット乱流における絶対渦度ゼロの状態の類似性が Bradshaw (1969) により指摘されている．ただし，そこでは両者がともに (層流の) 線形中立安定状態に対応していることが述べられているに過ぎない．一方，式 (10),(11) は，2次元性を仮定すると，回転剪断乱流と熱対流乱流が非線形のレベルで同等であることを示している．

### 3.4 3次元性

これまで，変動場の流れ方向への一様性を仮定して議論を進めてきたが，縦渦構造が流れ方向からの傾きをもっていることからわかるように現実の乱流場は 3次元的である．そこで，run2 に対応する 3次元計算を行った．なお，計算手法，計算で用いたパラメータとも 2次元計算と同様であり， $8\pi \times 2\pi \times 2\pi$  の計算領域に対して， $256 \times 256 \times 256$  の格子点をとった．

図 6 は，図 2 (a) と同じく平均速度分布の時間発展を示したものである (4点鎖線は  $St = 35$  の分布)．2次元の場合と同様に，局所不安定な領域から分布は変形し，線形な速度分布をもつ領域が形成される．しかし，そこでの局所ロスビー数は  $-1$  では落ち着かず，さらに増加 (速度勾配は減少) していく．分布の時間変化がほぼ停止する  $St = 25$

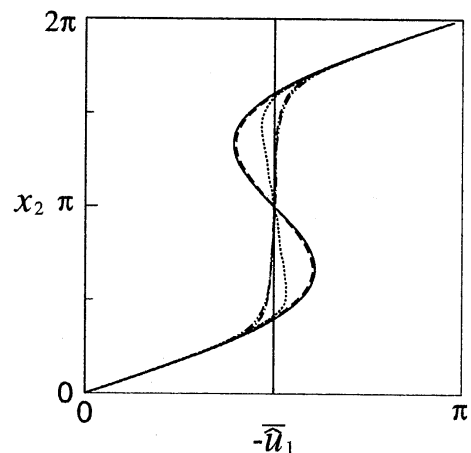


図5  $-\bar{u}_1$  の時間発展 (run2).

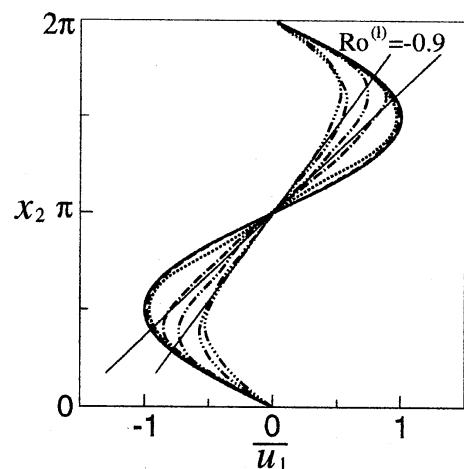


図6  $\bar{u}_1$  の時間発展.

では,  $Ro^{(l)} \approx -0.9$  の線形安定状態となった. 詳しい解析は今後の課題であるが, 圧力項により生成された  $u_1'^2$  がコリオリ項を通して  $-\overline{u_1' u_2'}$  を生成させ, それが平均勾配を減少させているようである. Bech & Andersson (1997) の回転平面クエット乱流の直接数値計算においても, チャンネル中央の線形速度領域で  $Ro^{(l)} \approx -0.94$  と局所ロスビー数が  $-1$  よりも小さくなるという結果が得られている.

#### 4. まとめ

剛体回転下にある剪断乱流の平均速度分布について考察した. 単純剪断に周期的な変動が加わった平均流をもつ回転乱流の時間発展を2次元の数値計算により調べた結果, 線形安定な系の中に局所的に存在する不安定領域から局所的ロスビー数  $Ro^{(l)} \approx -1$  の線形速度分布が出現することがわかった. また, 乱流場の流れ方向への一様性を仮定すると, 回転単純剪断乱流は熱対流乱流と非線形のレベルで同等であることを示した. このことから, 回転乱流における  $Ro^{(l)} \approx -1$  の領域と熱対流乱流における温度一定の領域が対応することがわかる. 乱流場の流れ方向への変動も考慮した3次元計算も行ない, 2次元流の場合と同様に線形速度分布が出現するが, そこでの局所ロスビー数は  $-1$  よりも大きいことを発見した.

#### REFERENCES

- Bech K.H. & Andersson, H.I.: Turbulent plane Couette flow subject to strong system rotation. *J. Fluid Mech.* **347** (1997) 289–314.
- Bradshaw, P.: The analogy between streamline curvature and buoyancy in turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.* **36** (1969) 177–191.
- Johnston, J.P., Halleen, R.M. & Lezius, D.K.: Effects of spanwise rotation on the structure of two-dimensional fully developed turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.* **56** (1972) 533–557.
- Kristoffersen, R. & Andersson, H.I.: Direct simulations of low Reynolds number turbulent flow in a rotating channel. *J. Fluid Mech.* **256** (1993) 163–197.
- Lamballais, E., Lesieur, M. & Métais, O.: Influence d'une rotation d'entraînement sur les tourbillons cohérents dans un canal. *C.R. Acad. Sci. Paris* **323**, Série IIb (1996) 95–101.
- Leblanc, S. & Cambon, C.: On the three-dimensional instabilities of plane flows subjected to Coriolis force. *Phys. of Fluids* **9** (1997) 1307–1316.
- Métais, O., Flores, C., Yanase, S., Riley, J.J. & Lesieur, M.: Rotating free-shear flows. Part 2. Numerical simulation. *J. Fluid Mech.* **293** (1995) 47–80.
- Nakabayashi, K. & Kitoh, O.: Low Reynolds number fully developed two-dimensional turbulent channel flow with system rotation. *J. Fluid Mech.* **315** (1996) 1–29.
- Pedley, T.J.: On the stability of viscous flow in a rapidly rotating pipe. *J. Fluid Mech.* **35** (1969) 97–115.
- Tanaka, M.: Vortical structures in homogeneously sheared turbulence subjected to background rotation. *J. Phys. Soc. Japan* **63** (1994) 3914–3918.
- Tanaka, M., Yanase, S., Kida, S. & Kawahara, G.: Vortical structures in rotating uniformly sheared turbulence. *Flow, turbulence and combustion* **60** (1999) 301–332.
- Tritton, D.J.: Stabilization and destabilization of turbulent shear flow in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **241** (1992) 503–523.
- Veronis, G.: The analogy between rotating and stratified fluids. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **2** (1970) 37–66.
- Yanase, S., Flores C., Métais, O. & Riley, J.J.: Rotating free-shear flows. Part 1: Linear stability analysis. *Phys. of Fluids A* **5** (1993) 2725–2737.