数理解析研究所講究録
1121巻 2000年 165-169

回転系乱流におけるヘリシティの効果

森西 洋平，中林 功一（名工大）任 水強（名工大院）

Effects of the Helicity on Rotating Turbulence

Youhei MORINISHI, Koichi NAKABAYASHI, Shuiqiang REN,

To consider the non-reflection property of the rotating turbulence, a new method was proposed to introduce the helicity into the initial field of turbulence for direct numerical simulation (DNS). In addition, a new algorithm with the complex helical decomposition was introduced to extend the integral factor technique to the Coriolis term in a rotating system. With the initial field with helicity, the effects of helicity and the system rotation on the turbulence statistics and the vortical structure were investigated. The DNS results show that, as the same influence as the rotation, helicity also inhibits the energy decaying. Rotation elongates the vortical structure along the rotating axis, and it appears to weaken this tendency with the presence of helicity.

1. はじめに

一般的なスペクトル·テンソル[(1)]は次式で表される.

$$\hat{U}_{ij}(\mathbf{k},t)=e(\mathbf{k},t)P_{ij}+\mathrm{Re}[z(\mathbf{k},t)N_i(\mathbf{k})N_j(\mathbf{k})] + I\varepsilon_{ijl}\frac{k_l}{k^2}h(\mathbf{k},t) \tag{1}$$

ここで $e(\mathbf{k},t)$，$z(\mathbf{k},t)$ 及び $h(\mathbf{k},t)$ はそれぞれエネルギ，複素偏差及びヘリシティ·スペクトルである．回転対称性及び反射対称性を満足する等方性乱流は球対称のエネルギ·スペクトル $e(\mathbf{k},t)=E(k,t)/4\pi k^2$ の存在のみを許す。回転対称性のみを満足する等方性乱流では，さらに球対称のヘリシティ·スペクトル $h(\mathbf{k},t)=H(k,t)/4\pi k^2$ の存在も許す．また，回転系等方性乱流は回転対称性のみを持つ軸対称乱流である．従来の等方性乱流の直接数値計算(DNS)[(2)]では，初期条件に球対称のエネルギ·スペクトルを持つソレノイダルな速度場が用いられてきた．より一般的な初期スペクトル分布を持つ回転系(軸対称)一様乱流の DNS を行うために，本研究では，まず，ヘリシティを含むソレノイダルな速度場の発生方法を提案する。次に，DNS の計算のアルゴリズムとして，回転系におけるコリオリ力に対する積分因子法を提案する．これらの方法を用いて，初期に等方な回転系乱流の DNS を実行し，ヘリシティ及び座標回転の効果を調べる．

2. ヘリシティを伴う初期速度場の発生方法

初期速度場にヘリシティを含めるためには，局所クラヤ座標系及び複素ヘリカル波分解を用いるのが便利である。局所クラヤ座標の直交基底ベクトル

$$\mathbf{e}^1(\mathbf{k})=\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{\Omega}}{|\mathbf{k}\times\mathbf{\Omega}|},\quad \mathbf{e}^2=\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{e}^1}{|\mathbf{k}|},\quad \kappa=\frac{\mathbf{k}}{k} \tag{2}$$

を用いて速度 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ を表現すると，連続の式 $\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})=0$ より，

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})=\hat{u}_v(\mathbf{k})\mathbf{e}^1+\hat{u}_w(\mathbf{k})\mathbf{e}^2 \tag{3}$$

と表される．ここで，$\mathbf{k}$ は波数ベクトル，$\mathbf{\Omega}$ は回転軸方向のベクトルであり，ベクトル $\mathbf{e}^1$ と $\mathbf{e}^2$ は $\mathbf{k}$ に垂直な面に存在する．$\hat{u}_v$ と $\hat{u}_w$ はそれぞれ $\mathbf{e}^1$ 及び $\mathbf{e}^2$ 方向の速度 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ の射影成分である．また，複素ヘリカル波分解の直交基底ベクトル

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(+\mathbf{k})&=\mathbf{e}^2(\mathbf{k})-I\mathbf{e}^1(\mathbf{k})\\ \mathbf{N}(-\mathbf{k})&=\mathbf{e}^2(\mathbf{k})+I\mathbf{e}^1(\mathbf{k})\end{aligned} \tag{4}$$

を導入すれば，$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ は次式で表される．

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})=\xi_{+1}\mathbf{N}(\mathbf{k})+\xi_{-1}\mathbf{N}(-\mathbf{k}) \tag{5}$$

ここで，ξ_{+1} と ξ_{-1} はそれぞれ $\mathbf{N}(\mathbf{k})$ 及び $\mathbf{N}(-\mathbf{k})$ 方向の速度 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ の射影成分である．ヘリカル波分解の成分 ξ_{+1}, ξ_{-1} とクラヤ座標系の速度成分 $\hat{u}_v(\mathbf{k}), \hat{u}_w(\mathbf{k})$ の関係は次のように与えられる[(3)]．

$$\begin{aligned}\xi_{+1}&=\frac{1}{2}(\hat{u}_w+I\hat{u}_v)\\ \xi_{-1}&=\frac{1}{2}(\hat{u}_w-I\hat{u}_v)\end{aligned} \tag{6}$$

速度成分 ξ_{+1}，ξ_{-1} を用いて，球対称のスペクトル·テンソルを表現すると，

$$\left\langle\xi_{+1}\xi_{+1}^*\right\rangle=\frac{E^{++}(k,t)}{4\pi k^2},\quad \left\langle\xi_{-1}\xi_{-1}^*\right\rangle=\frac{E^{--}(k,t)}{4\pi k^2} \tag{7}$$

となる．ここで，$E^{++}(k,t)$，$E^{--}(k,t)$ は

$$\begin{aligned}E^{++}(k,t)&=\frac{1}{2}\left[E(k,t)+H(k,t)/k\right]\\ E^{--}(k,t)&=\frac{1}{2}\left[E(k,t)-H(k,t)/k\right]\end{aligned} \tag{8}$$

で記述できる．式(8)からヘリシティ・スペクトル$H(k,0)$に対する次の拘束条件が導かれる[4]．

$$|H(k,t)| \le kE(k,t) \qquad (9)$$

式(8)，(9)に従い，ここでは初期エネルギ・スペクトル$E(k,0)$を与えた後にヘリシテイ・スペクトル$H(k,0)$を次式で与える．

$$H(k,0)=\alpha kE(k,0)\,,\quad |\alpha|\le 1 \qquad (10)$$

αは本方法のパラメータであり，$\alpha=0$と$\alpha=1$はそれぞれ初期にヘリシテイが存在しない及び存在する場合に対応する．また，位相の変化を表現するために，本研究では，

$$\begin{aligned}\xi_{+1}(\mathbf{k},0)&=[\frac{E^{++}(k,0)}{4\pi k^2}]^{\frac{1}{2}}\exp(I\theta)\\ \xi_{-1}(\mathbf{k},0)&=[\frac{E^{--}(k,0)}{4\pi k^2}]^{\frac{1}{2}}\exp[I(\theta+\phi)]\end{aligned} \qquad (11)$$

とおく．ここでθとϕは$(0,2\pi)$の間に分布する一様乱数である．

初期エネルギ・スペクトル$E(k,0)$を与え，式(10)に従って$H(k,0)$を定めると，$E^{++}(k,0)$と$E^{--}(k,0)$は式(8)から求められる．これらを式(11)に代入して，$\xi_{+1}(\mathbf{k},0)$と$\xi_{-1}(\mathbf{k},0)$が与えられれば，式(5)，(6)及び式(3)を通してヘリシティを含む初期速度場$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$が求められる．

3.　コリオリ力に対する積分因子法

3.1 基礎方程式

x_3軸まわりに回転角速度Ωで回転する座標系に存在する非圧縮性流体の乱流を考え，N-S式及び連続の式を基礎方程式として用いる．

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}-2\Omega\varepsilon_{i3j}u_j\\ &\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0\end{aligned} \qquad (12)$$

上式をフーリエ変換すると次式を得る．

$$\left(\frac{d}{dt}+\nu k^2\right)\hat{u}_i=P_{im}(\mathbf{k})(-Ik_j\widehat{u_j u_m}-2\Omega\varepsilon_{m3j}\hat{u}_j \qquad (13)$$

ここで$P_{im}(\mathbf{k})=\delta_{im}-k_ik_j/k^2$はソレノイダル射影演算子である．式(13)から明かなとおりコリオリ力項は線形項であるが粘性項のように対角化されていないので従来は陽的に時間進行されている．しかし，その場合には回転角速度Ωが大きくなると時間刻み幅Δtを非常に小さく設定しなければ数値計算を安定に実行できないことがこれまで経験的に知られている[6]．ここで，式 (13) のコリオリ力項の対角化を行う．まず，式 (13) をベクトル表示する．

$$\left[\left(\frac{d}{dt}+\nu k^2\right)\mathbf{E}+\frac{2\Omega k_3}{k^2}\mathbf{A}\right]\hat{\mathbf{u}}=\hat{\mathbf{M}} \qquad (14)$$

ここで，Eは単位行列．ベクトル$\hat{\mathbf{u}}$及び$\hat{\mathbf{M}}$は

$$\hat{\mathbf{u}}=\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\\ \hat{u}_3\end{bmatrix},\quad \hat{\mathbf{M}}=\begin{bmatrix}\hat{M}_1\\ \hat{M}_2\\ \hat{M}_3\end{bmatrix},$$

であり，$\hat{\mathbf{M}}$の成分は$\hat{M}_i=-Ik_jP_{im}(\mathbf{k})\widehat{u_j u_m}$である．また，行列$\mathbf{A}$は次式で定義される．

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -k_3 & +k_2\\ +k_3 & 0 & -k_1\\ -k_2 & +k_1 & 0\end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$を対角化し，式(14)を変形すると，

$$\left[\left(\frac{d}{dt}+\nu k^2\right)\mathbf{E}+\frac{2\Omega k_3}{k^2}\mathbf{D}\right]\hat{\mathbf{V}}=\hat{\mathbf{N}} \qquad (15)$$

を得る．ここで，

$$\mathbf{D}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}+Ik & 0 & 0\\ 0 & -Ik & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \hat{\mathbf{V}}=\mathbf{Q}^{-1}\hat{\mathbf{u}},\quad \hat{\mathbf{N}}=\mathbf{Q}^{-1}\hat{\mathbf{M}}$$

$\mathbf{Q}$と$\mathbf{Q}^{-1}$は行列$\mathbf{A}$のモードマトリックスである．

$$\mathbf{Q}=\frac{1}{\sqrt{2}k\sqrt{k_2^2+k_3^2}}\begin{bmatrix}(k_2^2+k_3^2) & (k_2^2+k_3^2) & \sqrt{2}k_1\sqrt{k_2^2+k_3^2}\\ (-k_1k_2-Ikk_3) & (-k_1k_2+Ikk_3) & \sqrt{2}k_2\sqrt{k_2^2+k_3^2}\\ (-k_1k_3+Ikk_2) & (-k_1k_3-Ikk_2) & \sqrt{2}k_3\sqrt{k_2^2+k_3^2}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}k\sqrt{k_2^2+k_3^2}}\begin{bmatrix}(k_2^2+k_3^2) & (-k_1k_2+Ikk_3) & (-k_1k_3-Ikk_2)\\ (k_2^2+k_3^2) & (-k_1k_2-Ikk_3) & (-k_1k_3+Ikk_2)\\ \sqrt{2}k_1\sqrt{k_2^2+k_3^2} & \sqrt{2}k_2\sqrt{k_2^2+k_3^2} & \sqrt{2}k_3\sqrt{k_2^2+k_3^2}\end{bmatrix}$$

式(15)の各成分は次式のように記述できる．

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}+\nu k^2+I\frac{2\Omega k_3}{k}\right)\hat{v}_1&=\hat{N}_1\\ \left(\frac{d}{dt}+\nu k^2-I\frac{2\Omega k_3}{k}\right)\hat{v}_2&=\hat{N}_2\end{aligned} \qquad (16)$$

ここで，成分$\hat{v}_3$及び$\hat{N}_3$は連続の式よりゼロである．回転積分因子$\exp[(\nu k^2\pm I2\Omega k_3/k)t]$を導入すると式(16)は次のように変形できる．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[e^{(\nu k^2+I\frac{2\Omega k_3}{k})t}\hat{v}_1\right]&=e^{(\nu k^2+I\frac{2\Omega k_3}{k})t}\hat{N}_1\\ \frac{d}{dt}\left[e^{(\nu k^2-I\frac{2\Omega k_3}{k})t}\hat{v}_2\right]&=e^{(\nu k^2-I\frac{2\Omega k_3}{k})t}\hat{N}_2\end{aligned} \qquad (17)$$

本研究では式(17)の時間進行法に 4 次精度のルンゲ・クッタ(RK4)法を用いてスペクトル法による DNS を行う．

3.2 アルゴリズムの検証

前節で示されたDNSの計算アルゴリズムの有効性を確認するために，コリオリ力項を陽的に扱う従来の手法(Standard)と本アルゴリズム(Present)を用い，初期に等方な回転系一様減衰乱流のDNSを検証計算として実行した．図1に，乱流エネルギKの時間変化を示す．ここで，Ω＝100[rad/s]と設定した．Standardの結果は，Δt＝0.02，0.015[s]とした計算例が発散し，Δt＝0.01，0.005，0.0002[s]とした計算例が安定な計算結果を与えている．しかし，Δt＝0.01[s]の計算例はコリオリ力項に対する安定性条件は満足しているが，収束解(Δt＝0.0002の計算結果)とかなり異なる結果を与えている．これはコリオリ力項に対するRK4の拡散誤差の影響と考えられる．一方，本論文で提案する手法(Present)は，Δt＝0.01で既にStandardのΔt＝0.0002とほぼ一致する計算結果を与え，コリオリ力項に関する拡散誤差も与えないことが確認されている．以上より，高回転角速度の条件に対する本手法の有効性が確認された．

4. DNSの結果及び考察

4.1 計算条件

本研究ではエネルギ・スペクトル$E(k,t)$の初期分布として次式を仮定する[5]，

$$E(k,0) = q_0 \frac{k}{k_p^2} \exp(-\frac{k}{k_p}) \tag{18}$$

ただし，$q_0 = 3$，$k_p = 5$を用いる．計算条件を表1に示す．

Table 1. Computational Condition

Region $[m^3]$	Grid	Viscosity ν $[m^2/s]$	Δt [s]	Ω [rad/s]
$(2\pi)^3$	96^3	0.01	0.01	0,2,5,10

4.2 計算結果

図2に乱流エネルギKの時間発展を示す。Kは時間とともに減衰するが，Ωが増大するとKの減衰が抑制される。これは今までの理論解析及び数値計算結果[7]より，回転のスクランブル効果と考えられる．さらに，α＝0とα＝1の結果を比較すると，同じ回転数Ωでも，ヘリシティの存在はエネルギの減衰を抑制することが分かる．これについて更に詳しく調べるために，エネルギ輸送関数$T(k,t)$を検討する．N-S式の対流項を回転型で表すと次式となる．

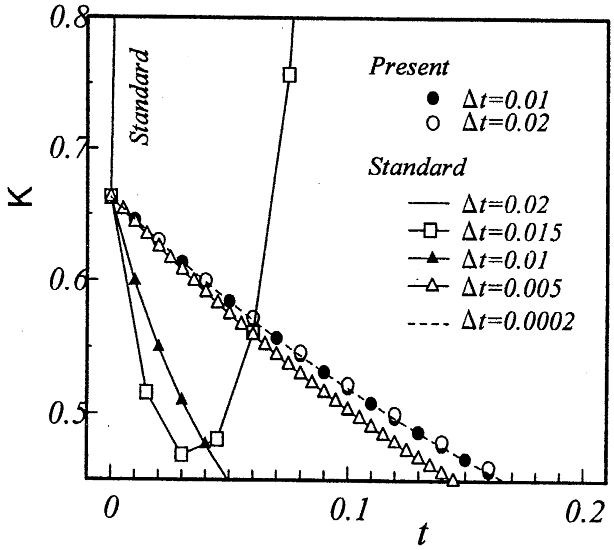


Fig.1 The evolution of the turbulence energy.

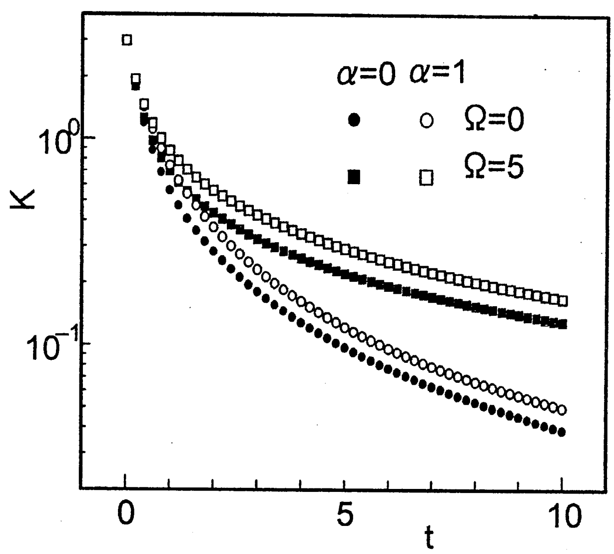


Fig.2 The evolution of the turbulence energy.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \omega \times \mathbf{u} = -\nabla \Pi + \nu \Delta^2 \mathbf{u} \tag{19}$$

ここで，$\Pi = p/\rho + |\mathbf{u}|^2/2$である．上式から得られるエネルギ輸送関数は次式と表される．

$$T(k,t) = \int \mathrm{Re}\left\langle P_{im} \left(\widehat{\mathbf{u} \times \omega}\right)_m^* \hat{\mathbf{u}}_i \right\rangle d\mathbf{k} \tag{20}$$

また，非線形項$\mathbf{u} \times \omega$とヘリシテイ$\mathbf{u} \cdot \omega$の関係が次式で与えられる．

$$|\mathbf{u} \times \omega|^2 + |\mathbf{u} \cdot \omega|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\omega|^2 \tag{21}$$

式(21)より$|\mathbf{u}|^2|\omega|^2$が変化しないとすれば，平均ヘリシテイ$|\mathbf{u} \cdot \omega|$が増大すると，非線形項$|\mathbf{u} \times \omega|$が小さくなる．図3に$|\mathbf{u} \cdot \omega|$及び$|\mathbf{u} \times \omega|$の変化の一般的な例を示す．この場合$|\alpha|$が増

大しでも，$|\mathbf{u}|\cdot|\omega|$ の値がほとんど変化せず，$|\mathbf{u}\times\omega|$ の値が小さくなる．これより，$|\alpha|$ が増大すると非線形効果が弱まり，式(20)よりエネルギの輸送も弱まる．

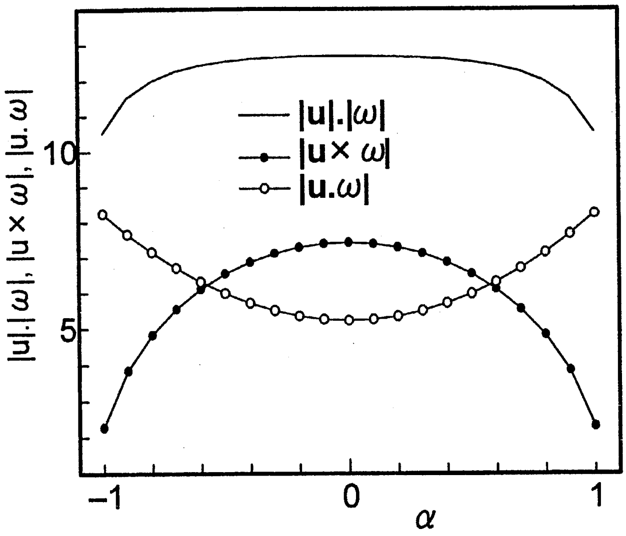


Fig.3 Varying of $|\mathbf{u}\cdot\omega|$ and $|\mathbf{u}\times\omega|$ with α

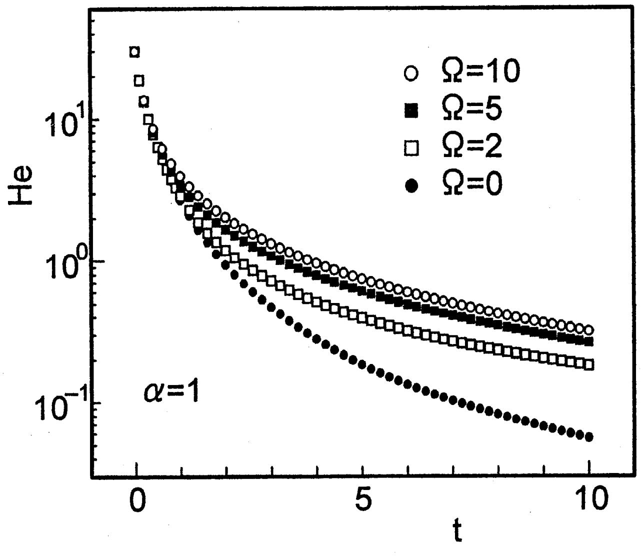


Fig.4 The evolution of the helicity.

図４にヘリシティの時間発展を示す。回転がヘリシティに及ぼす影響はエネルギに対する影響と同様であり，ヘリシテイの減衰が抑制される．ヘリシティに対する回転のスクランブル効果と考えられる．更に，図５と図６に速度ベクトル $\mathbf{u}$ と渦度ベクトル ω の間の角度 θ の確率密度関数（PDF）を示す．初期に平均ヘリシテイが存在しない場合(α=0, 図 5)では，回転の有無によらず，PDF の最大値は $\theta=55^0\sim60^0$ に存在し，時間的にあまり変わらない．一方，初期に平均ヘリシテイが存在する場合(α=1, 図6)では，回転を加えると PDF の極値が約 25° においても現れてくる．ヘリシテイの値が $|\mathbf{u}\cdot\omega|=|\mathbf{u}|\cdot|\omega|\cos\theta$ であることを考えると，ヘリシテイの値は回転による θ の値の減少とともに増大する．すなわち，回転によってヘリシテイの減衰が抑制される．

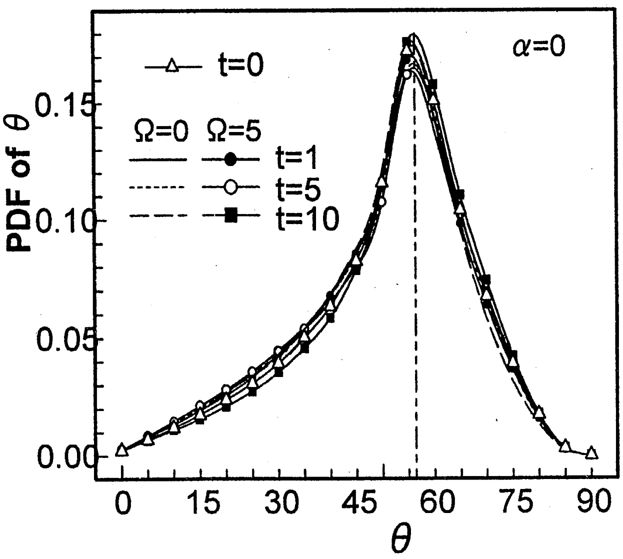


Fig.5 PDF of the angle θ between $\mathbf{u}$ and ω

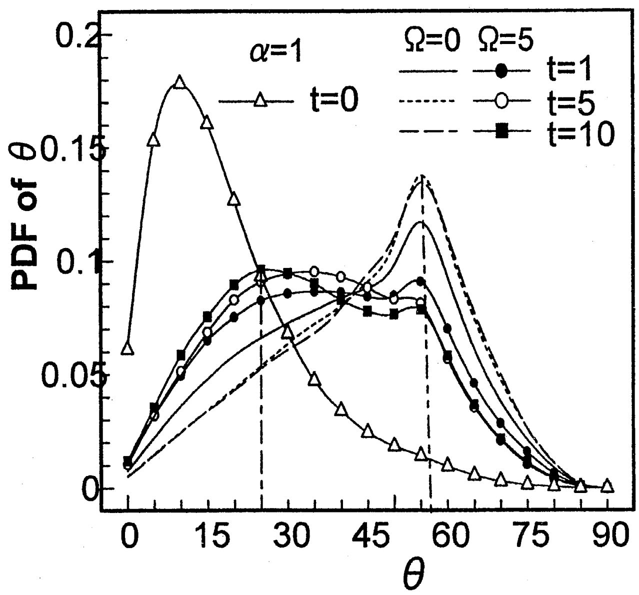
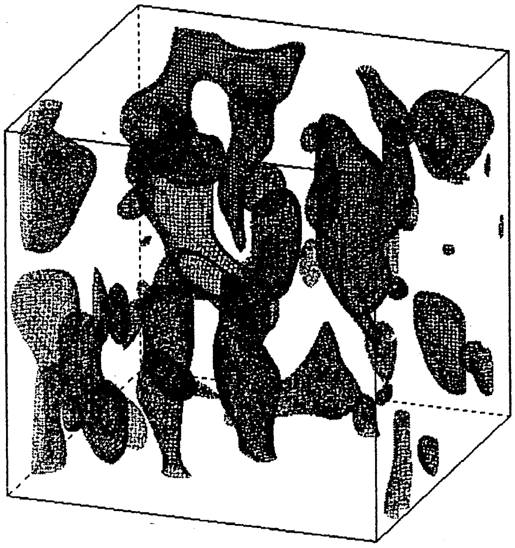
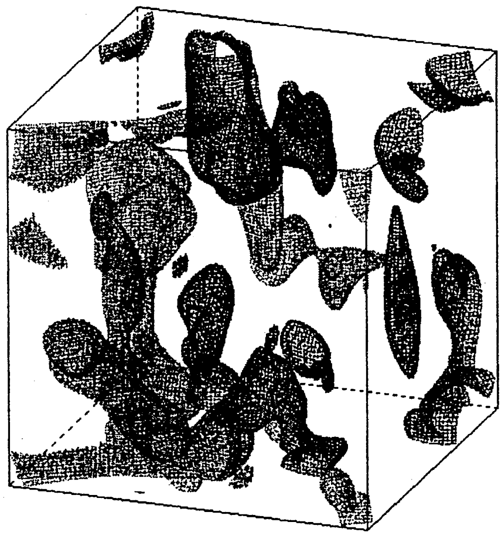


Fig.6 PDF of the angle θ between $\mathbf{u}$ and ω

図７の a, b に，Ω=5 におけるヘリシティが存在する場合(α=1)と存在しない場合(α=0)の渦度の絶対値の等値面を示す。初期 t=0 には細かい渦が多数存在しているが，時間発展とともに大きな渦構造が現れる．また，回転により，



(a). α=0



(b). α=1

Fig. 7 Iso-surface of the vorticity $|\omega|$

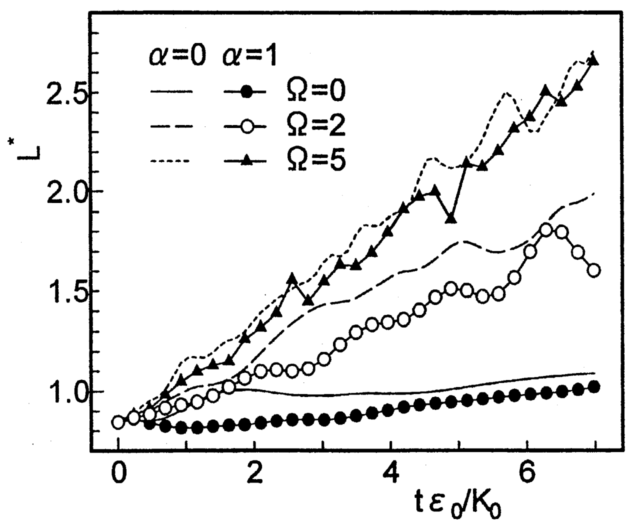


Fig.8 The evolution of the integral scale

ヘリシティが存在しない場合には回転軸に平行な渦構造が現れるが，ヘリシティが存在する場合にはこの傾向は弱まる．図 8 に，横積分長さと縦積分長さの比 L^* の時間発展を示す．ここで，

$$L^* = \left[(L_{11}^3)^2 + (L_{22}^3)^2\right]^{0.5} \Big/ L_{33}^3 \tag{22}$$

$$L_{ij}^k = \int_0^\infty \left\langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + r\mathbf{n}^{(k)}) \right\rangle dr \Big/ \left\langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) \right\rangle \tag{23}$$

と定義される．回転が存在する場合には，横積分長さが縦積分長さより速く増大するが，α=1 のヘリシテイが存在する場合(Symbol)では，ヘリシテイが存在しない場合(Line)と比べて横積分長さの増大が少し遅くなる．

5. まとめ

1. 初期にヘリシティを含む等方な乱流場の構成方法を提案し，ヘリシティがある場合及びない場合について，初期に等方な回転系一様減衰乱流の DNS を実行した．
2. 等方性乱流に及ぼす回転の効果と同様に，ヘリシティの存在は乱流エネルギの減衰を抑制する．
3. ヘリシティが存在しない場合には座標回転により回転軸に平行な渦構造が現れるが，ヘリシティが存在する場合にはこの傾向は弱まる．

参考文献

(1) . Cambon, C. & Jacquin, L., J. Fluid Mech., 202 (1989) pp295-317.

(2) . Rogallo, R. S., NASA TM81315 (1981) , pp1-91.

(3) . Lesieur, M., Turbulence in Fluids (Third Revised and Enlarged Edition) Kluwar, London, (1997) pp141-146.

(4) . Andre, J. C. & Lesieur, M., J. Fluid Mech., 81 part 1 (1977) pp187~207.

(5) . Kraichnan, R. H., Phys. Fluids, vol.7, No.7 (1964) pp1030-1050.

(6) . 森西，中林，田平，任，回転系一様乱流の DNS アルゴリズム，機論(B 編)，65 巻 631 号，1999.

(7) . Cambon, C., Mansour, N. N. & Godeferd, F. S., J. Fluid Mech., 337(1997), pp. 303~332.