

縦速度差の確率密度分布のスケール依存性

中大理工物理 中野 徹 ( Tohru Nakano )  
 中大理工物理 小山田稔宏 ( Toshihiro Oyamada )  
 中大理工物理 深山大元 ( Daigen Fukayama )  
 名工大生産システム 後藤俊幸 ( Toshiyuki Gotoh )

乱流における条件付平均の概念はPope [1]によりずっと以前に導入され、乱流中のスカラー場の確率密度分布に適用されてきたが [2, 3, 4, 5, 6, 7]、乱流中の縦速度差の統計的性質の解析にも適用できる。ここでは、(1) まず条件付平均の方法 (Conditional Average Method、以後CAMと略する) を如何に縦速度差に適用するかについて述べる。ある2個の条件付平均値を導入すれば、それらを用いて縦速度差の確率密度関数(PDF)が表現できることを示す。(2) 次にCAMを用いて、数値シミュレーションの結果を解析し、(3) それらの結果を説明する物理的なモデルを提案する。詳細は参考文献 [8]に譲り、ここでは特にスケール依存性に注目したい。

§1. 条件付平均法

乱流研究では、縦速度場の増分の統計的性質が非常に興味深い [9, 10, 11, 12, 13]。その理由は、縦速度差が乱流での基本的な量である上に、観測しやすい量だからである。

距離 $r$ だけ離れた2点の縦速度差を

$$U_r(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_x) - u(\mathbf{x}) \tag{1}$$

で定義しよう。ここで $u(\mathbf{x})$ は点 $\mathbf{x}$ での速度場の $x$ 成分であり、 $\mathbf{e}_x$ は $x$ 方向の単位ベクトルである。観測される $U_r$ の確率密度分布関数 $P(U_r)$ は次のような性質を持っている。2点間の距離 $r$ が最大スケール (積分長さ) の $P(U_r)$ はガウシアンに近いが、距離が減少するにつれて、分布はガウシアンからずれていき、縦速度の空間微分の分布は指数分布より平坦でさえある [14, 15, 16, 17, 18]。このような性質を乱流の間欠性と呼び、揺らぎのスケールが減少するにつれて、大きな揺らぎの頻度が増すことを反映している。分布関数のスケール依存性の定量的な評価は $p$ 次構造関数

$$\langle U_r(\mathbf{x})^p \rangle \sim r^{\zeta_p} \tag{2}$$

のスケーリング指数 $\zeta_p$ に反映される。1941年のコルモゴロフのスケーリングは $\zeta_p = p/3$ に対応する。

CAMは、 $U_r$ の値を固定して種々の量の平均値を計算する方法である。例えば、 $u(\mathbf{x})$ のラプラシアン場の差の平均値

$$H(U_r) = \langle \nabla_{\mathbf{x}}^2 u(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_x) - \nabla_{\mathbf{x}}^2 u(\mathbf{x}) | U_r \rangle \equiv \langle \nabla_{\mathbf{x}}^2 U_r(\mathbf{x}) | U_r \rangle \tag{3}$$

はそのような例である。もう一つ

$$G(U_r) = \langle \nabla_{\mathbf{x}} U_r(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} U_r(\mathbf{x}) | U_r \rangle. \tag{4}$$

を導入しよう。これらの二つの条件付期待値を用いれば、空間的に一様な系での $P(U_r)$ は

$$P(U_r) = \frac{N}{G(U_r)} \exp \left[ \int_0^{U_r} \frac{H(x)}{G(x)} dx \right] \quad (5)$$

と表される。ここで $N$ は規格化定数である。要点は $H, G$ の関数形が分かれば、PDFが導けるということである。シミュレーションで求められた $H, G$ を(5)に代入して計算されたPDFとその観測値が正確に一致することはスカラーの場合に確かめられている[7]。

この講演では、(1) シミュレーションから求められた $H, G$ がどのように振舞い、それらがどのような関数でフィットできるか、(2) フィットされた関数形は物理的に説明可能か、(3) 説明可能だとしたら、それらのスケール依存性はどうなっているか、について述べる。シミュレーションの詳細は参考文献[7, 8, 19]に譲り、概略のみを記す。数値計算は航技研の数値風洞の512<sup>3</sup>のメッシュ上で実行され、乱流はある初期値から出発した減衰乱流である。データの採取はエネルギー散逸が最大に達した直後に行われ、その時の $R_\lambda$ は120、 $k_{max}\eta$ は1.42であった。

$H, G$ はスケールと共に変化するのを、それらを統一的にとらえるために次のような無次元化をする：

$$u_r = \frac{U_r}{S_2(r)}, \quad h(u_r) = \frac{2\nu\sqrt{S_2(r)}}{J_2(r)} H(U_r), \quad g(u_r) = -\frac{2\nu}{J_2(r)} G(U_r). \quad (6)$$

ここで $\nu$ は動粘性係数であり、 $S_2(r) = \langle U_r(\mathbf{x})^2 \rangle$ 、 $J_2(r) = -2\nu \langle |\nabla \mathbf{x} U_r(\mathbf{x})|^2 \rangle$ である。以後小文字は無次元変数を表すことに注意しよう。また誤解が生じない場合は、下付きの添字 $r$ は書かないことがある。このような定義を用いれば、 $u$ のPDFは

$$P(u) = \frac{N}{g(u)} \exp \left[ - \int_0^u \frac{h(x)}{g(x)} dx \right] \quad (7)$$

となる。これらの無次元量が満たさなければならない条件を書いておくのが便利である：

$$\begin{aligned} \int P(u) du &= \int u^2 P(u) du = 1, \\ \int h(u) P(u) du &= 0, \quad \int h(u) u P(u) du = 1, \quad \int g(u) P(u) du = 1. \end{aligned} \quad (8)$$

シミュレーションの結果に触れるまえに、上の条件をみたす理想的な場合  $h(u) = u, g(u) = 1$ を考えよう。これを(7)に代入すれば、ガウシアン $P(u) \sim e^{-u^2/2}$ が得られる。あとで分かるようにスケールが大きいほど理想的な振舞いに近くなる。

これまでは確率密度分布関数を解析的に評価することは困難であったが、もし関数 $H, G$ を解析的に評価出来れば、分布関数に迫ることが出来る。(  $H, G$ の関数形を理論的に求めることが出来なければ、CAMは単なるデータ解析の方法に過ぎない。) 賢明な読者は気づかれるように、分布関数を表現できる $H, G$ の組み合わせは(3)、(4)とは限らず、他に幾らでもある。したがって出来るだけ解析的な形を予想できる $H$ と $G$ が望ましく、そのような意味で(3)、(4)はよい候補であることが後で分かる。

乱流にはノイズ的な成分とコヒーレントな成分の両方があり、前者はランダム的な振舞いを、後者は決定論的な振舞いをすることはよく知られている。振幅の小さな揺らぎは多分にノイズ的であろうし、振幅の大きな揺らぎはコヒーレント的である。CAMは $U_r$ の値を固定して平均値を求める方法であるから、 $H, G$ の関数形の評価に際して、小さな振幅ではランダムな振舞い、大きな振幅では決定論的な振舞いを反映させることが出来る。これがCAMの大きな利点である。

## §2. 縦速度場の増分の条件付平均値

### (a) $h$

図1には、種々の $r/\eta$ の値に対する $h(u_r)$ が $u_r$ の関数としてプロットされている。スケールとしては、散逸領域( $r/\eta = 5$ )、慣性領域( $15 \leq r/\eta \leq 50$ )、それより大きなスケールが選ばれている。顕著なことは、慣性領域のスケールでは $h(u_r)$ はほぼ同じカーブに乗ることであり、これには深い理由があることを示唆している。

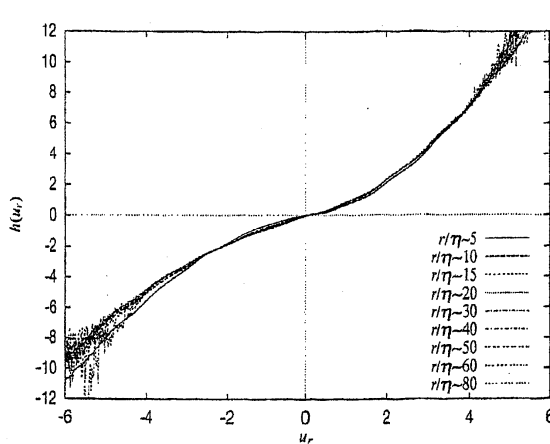


図 1.

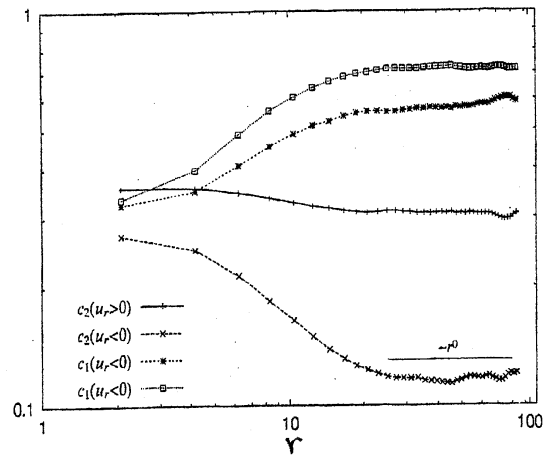


図 2.

注意深くみると、 $h(u)$ は反対称のグラフにはなっていないことである。その理由は、縦速度差の分布関数 $P(u)$ が $u$ の反転に関して対称でないからである。(細かいことを言うと、この図では見にくいだが、 $h(u)$ は原点も通っていない。)

このカーブのフィッティングを考えよう。反対称でないので $u$ の正負の領域に共通なフィッティングは不可能だが、正負別々の領域で

$$h(u) = c_1 u + c_2 u|u| \quad (9)$$

が大変よくデータとフィットする[8]。図2に $c_1, c_2$ の $r$ 依存性が示されている。確かに慣性領域では $c_i$ は $r$ に殆ど依らない。

### (b) $g$

図3には縦速度差の $g(u_r)$ が種々の $r$ に対して掲げられている。 $h(u_r)$ とは違って、 $r$ による変化が激しいのに気がつく。特徴は、 $u_r$ がゼロでも $g(u_r)$ はゼロでないこと、 $r$ の増加と共に

カーブが平坦になることである。 $h(u_r)$ の反対称性が破れているのと同様に、 $g(u_r)$ は対称的性質を失っている。

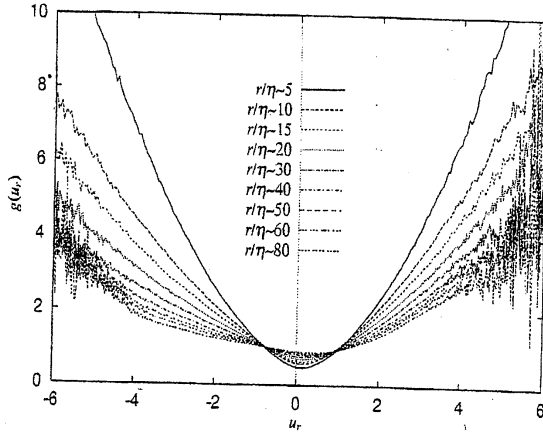


図 3.

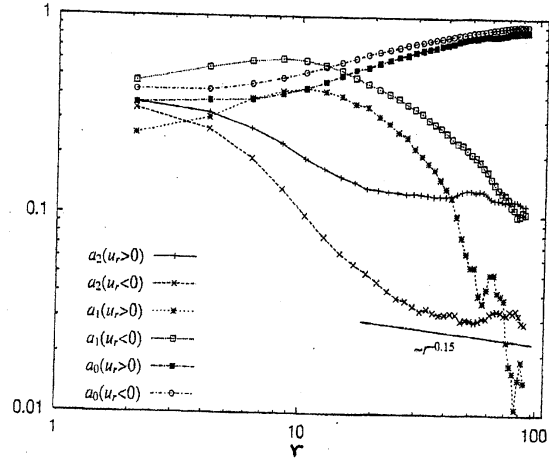


図 4.

$g(u_r)$ のカーブは

$$g(u_r) = a_0 + a_1 u_r + a_2 u_r^2 \quad (10)$$

で極めてよくフィットされる[8]。しかし $a_i$ は $r$ と共に変化し、その有り様は図4にあげてある。図3から理解されるように、 $g(u_r)$ は $h(u_r)$ に比べて大きな $|u_r|$ で揺らぎが大きいので、 $a_i$ の評価は $c_i$ のそれより信頼性が劣るかもしれない。

$H, G$ の理論的なモデルを考える前に、上のような得られた $h, g$ から予測されるPDFが観測で得られたものと矛盾しないかを調べてみよう。(9),(10)を(7)に代入すれば、任意の振幅での $P(u_r)$ が求められる。 $|u_r|$ の中間ぐらいまでの値に対するPDFの議論は参考文献[8]に譲り、ここでは大きな振幅でのPDFを考えよう。

Praskovsky and Oncley [11]は、 $R_\lambda = 1.27 \times 10^4$ の大気境界層の実験より、大きな振幅では

$$P(u_r) \sim \exp[-b(r)|u_r|] \quad (11)$$

の指数分布になっており、 $b(r) \propto r^{0.17 \pm 0.01}$ であることを示した。我々のモデルでは大きな振幅では、

$$P(u_r) \sim \exp\left[-\frac{c_2}{a_2}|u_r|\right] \quad (12)$$

である。 $c_2$ は $r$ に依らないので、 $1/a_2$ の $r$ 依存性が $b(r)$ のそれとなる。確かに $a_2$ は $r$ の減少関数になっており、便宜のために書き込まれた $r \sim r^{0.15}$ のカーブとそれほど違ってはいない。ここで主張したいことは、 $a_2(r)$ の $r$ による減少の仕方が、Praskovsky等の観測と矛盾していないことであり、そのベキの大きさを論じるほどには我々のシミュレーションのデータのせい精度は高くない。

### §3. $H$ と $G$ の理論的導出

前章で導かれた $h(u_r)$ と $g(u_r)$ の振舞いは、ナヴィエ=ストークス方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p(\mathbf{x}) + \nu \nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}). \quad (13)$$

( $\rho$ は密度、 $p(\mathbf{x})$ は圧力である) からどのように説明されるのであろうか。縦速度差 $U_r(\mathbf{x})$ に対する式は、(13)の点 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{x} + r\mathbf{e}_x$ での $x$ 成分の差を取ることににより、

$$\frac{\partial U_r(\mathbf{x})}{\partial t} = T(U_r(\mathbf{x})) + \nu \nabla_{\mathbf{x}}^2 U_r(\mathbf{x}) \quad (14)$$

と書ける。ここで $T(U_r(\mathbf{x}))$ は圧力項を含む慣性項である。正確には、 $T(U_r(\mathbf{x}))$ は $U_r(\mathbf{x})$ の汎関数である。(14)に $U_r(\mathbf{x})$ を掛けて、 $U_r$ の値を固定した条件付平均を取れば、

$$U_r \left\langle \frac{\partial U_r(\mathbf{x})}{\partial t} \middle| U_r \right\rangle = U_r \langle T(U_r(\mathbf{x})) | U_r \rangle + \nu U_r \langle \nabla_{\mathbf{x}}^2 U_r(\mathbf{x}) | U_r \rangle. \quad (15)$$

準定常状態では左辺は無視できる。なぜなら分布関数の時間変化は

$$\frac{\partial P(U_r)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial U_r} \left( \left\langle \frac{\partial U_r(\mathbf{x})}{\partial t} \middle| U_r \right\rangle P(U_r) \right) \quad (16)$$

と書けるので、分布関数が増えない時間スケールでは $U_r$ の時間微分の条件付平均値はゼロでなければならない。それゆえ、 $H$ の定義(3)を用いれば、

$$-\nu U_r H(U_r) = U_r \langle T(U_r) | U_r \rangle \quad (17)$$

ということになる。

右辺は $r$ 空間での $U_r$ を固定した条件下でのエネルギー輸送量であるので[8]、

$$U_r \langle T(U_r) | U_r \rangle \sim \frac{U_r^2}{\tau_r} \quad (18)$$

のように表現できる。ここで $\tau_r$ は $U_r$ を固定した状況下でのサイズ $r$ の揺らぎの緩和時間である。おなじみのコルモゴロフのK41スケーリングでは、 $\tau_r^{(K)} \sim \varepsilon^{-1/3} r^{2/3}$ である。しかし $U_r$ が大きな場合は緩和時間は $U_r$ 自身が決めているのであから、 $\tau_r \sim r/|U_r|$ である。しかし $U_r(\mathbf{x})$ が局在する点 $\mathbf{x}$ の近傍では強い乱れもあれば、弱い乱れもあり、緩和には両者が効くであろう。したがって

$$\nu U_r H(U_r) = -C_1 \frac{U_r^2}{\tau_r^{(K)}} - C_2 \frac{|U_r| U_r^2}{r}. \quad (19)$$

ここで $C_1, C_2$ は $r$ に依らない定数である。(6)にしたがって無次元化をする。慣性領域では $J_2(r) \sim \varepsilon$ であり、 $S_2(r) \sim \varepsilon^{2/3} r^{2/3}$ を用いると、(9)に現れる $c_1, c_2$ は $r$ に依らないとの結果が得られ、シミュレーションの解析結果と矛盾しない。この一致は、 $h(u_r)$ の振舞いの理論的な説明が正しいことを示唆している。

重要なポイントは、 $H(U_r)$ が摂動展開で求められたものではないことである。摂動展開として $H(U_r)$ を $U_r$ のべきとして求めれば、 $U_r$ のもっと高次の項が現れるであろう。しかしながら $H(U_r)$ の最大べきは、ナビエ=ストークス方程式の非線形次数と同じであることが重要である。

縦速度差 $U_r(\mathbf{x})$ に対する $G$ は

$$G(U_r) = \langle (|\nabla \mathbf{x} u(\mathbf{x})|^2 + |\nabla \mathbf{x} u(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_x)|^2) | U_r \rangle - 2 \langle \nabla \mathbf{x} u(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{x} u(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_x) | U_r \rangle \quad (20)$$

と書ける。慣性領域の $r$ では第2項目のクロス積の項は無視できるから、 $\nu G(U_r)$ はエネルギー散逸率の条件付平均値である。

前にも述べたように、 $-\nu U_r H(U_r)$ は $U_r$ の大きさを固定した条件下での $r$ 空間でのフラックスである。もしそのフラックスが空間的に拡散することなく、散逸のスケールまで伝播すれば、 $-\nu U_r H(U_r) = \nu G(U_r)$ であろう。ならば、 $G(0) = 0$ でなければならない。しかしそうではない。なぜならば、空間的な拡散により、 $U_r = 0$ の近傍の $U_r \neq 0$ の領域からエネルギーが流れ込み、そのエネルギーが散逸されて、 $G(0) = 0$ でなくなる。すなわち、小さな $|U_r|$ では

$$G(U_r) = A_0(r) \quad (21)$$

であり、 $A_0(r)$ は $r$ の増加関数である。 $G(U_r)$ での $U_r$ の2次の項はどう説明されるか。 $U_r$ を固定した $G(U_r)$ は条件付の散逸率であるから、 $U_r^2$ に比例するであろう：

$$G(U_r) = A_2(r) U_r^2. \quad (22)$$

これが最大の次数で、 $U_r$ を固定した条件付散逸率にはそれより高次の項が現れることはない。フィッティング(10)に $U_r$ の1次の項が必要なのは、 $H(U_r)$ が2個のプロセスの和で表されるのに対して、 $G(U_r)$ は(21)と(22)の和としては表されないからであろう。

最後に指数分布で重要な $a_2$ の $r$ 依存性について考えてみる。(6)の無次元化により、 $A_2$ は $a_2$ と

$$A_2(r) = \frac{-J_2(r) a_2(r)}{2\nu S_2(r)} \sim r^{-0.84} \quad (23)$$

のように関係付けられる。最後の項では $a_2(r) \sim b(r)^{-1} \sim r^{-0.17}$ 、 $S_2(r) \sim r^{2/3}$ を用いた。 $r$ 依存性がPraskovsky等の実験と矛盾しないためには、 $A_2(r)$ は上のようにスケールしなければならない。

$U_r$ の値を固定した状況を考えよう。点 $\mathbf{x}$ と点 $\mathbf{x} + \mathbf{e}_x r$ の間には強さが $U_r$ のeddyがある。この運動エネルギーが $\mathbf{x}$ と点 $\mathbf{x} + \mathbf{e}_x r$ の間で平均的に散逸すれば、散逸率は $G(U_r)$ であるから、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{x} + \mathbf{e}_x r$ で起こる散逸の大きさは $rG(U_r)$ である。この散逸量のエネルギー $U_r^2$ に対する比を $R$ とすれば、

$$R = \frac{rG(U_r)}{U_r^2} = rA_2(r) \sim r^\delta \quad (24)$$

となる。 $\delta$ の大きさに応じて次の3つのケースが想定できる。(a)  $\delta > 0$ ならば、カスケードで $r$ が小さくなるにつれて、 $R$ が減少することを意味する。すなわちエネルギーよりも散逸が小さ

くなり、熱に変わるよりも、逃げて行く割合が大きいことを意味する。(b)  $\delta = 0$ の場合は、エネルギー $U_r^2$ の一定の割合が丁度その場所で散逸されることを意味する。(c)  $\delta < 0$ なら、散逸の方が大きい。実験と矛盾しないのは $\delta = 0.16$ であり、 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_x r$ の間で起こる散逸がエネルギー $U_r^2$ より、少し小さい場合に対応している。これは物理的に言って妥当な結果であろう。現在の段階では $G(U_r)$ の係数の $r$ 依存性を理論的に予測出来ないが、少なくとも上のような考えとは矛盾しないことは確かめられた。

この研究にあたっては、東大理学部の高橋直也氏、神部勉氏、航技研の山本稀義氏に負う所が多であった。この場を借りてお礼を申し上げたい。

## References

- [1] S. Pope; *Combust. Flame* **27** (1976), 299 .
- [2] Ya.G. Sinai and V. Yakhot: *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 1962.
- [3] V. Yakhot: *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 1965.
- [4] E. Ching: *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 283.
- [5] E. Ching: *Phys. Rev.* **E53** (1996) 5899.
- [6] E. Ching and Y.K. Tang: *Phys. Fluids* **9** (1997) 1353.
- [7] N. Takahashi, T. Kambe, T. Nakano, T. Gotoh, and K. Yamamoto: *J. Phys. Soc. Japan* **67** (1998) 833.
- [8] N. Takahashi, T. Kambe, T. Nakano, T. Gotoh, and K. Yamamoto: *J. Phys. Soc. Japan* **68** (1999) 86.
- [9] A. S. Monin and A. M. Yaglom: *Statistical Fluid Mechanics*, vol.2 (MIT Press, Cambridge, 1975).
- [10] B. Castaing, Y. Gagne and E. J. Hopfinger: *Physica D* **46** (1990) 177.
- [11] A. Praskovsky and S. Oncley: *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994) 3399.
- [12] Y. Gagne, M. Marchand and B. Castaing: *J. Phys. II* **4** (1994) 1.
- [13] Y. Zhu, R. A. Antonia and I. Hosokawa: *Phys. Fluids* **7** (1995) 1637.
- [14] Z. She: *Fluid Dyn. Res.* **8** (1991) 143.
- [15] A. Vincent and M. Meneguzzi: *J. Fluid Mech.* **225** (1991) 1.
- [16] K. Yamamoto and T. Kambe: *Fluid Dyn. Res.* **8** (1991) 65.

- [17] S. Chen, G. D. Doolen, R. H. Kraichnan and Z. S. She: *Phys. Fluids A* **5** (1993) 458.
- [18] F. Belin, J. Maurer, P. Tabeling and H. Willaime: *Phys. Fluids* **9** (1997) 3843.
- [19] K. Yamamoto: Direct numerical simulation of isotropic turbulence using NAL numerical wind tunnel, in *Parallel Computational Fluid Dynamics: New Algorithms and Applications, Proceedings of the Parallel CFD '94 Conference* ed. N. Satofuka, J. Periaux and A. Ecer (North-Holland, 1995) p13; S. Oide, I. Hosokawa and K. Yamamoto, *Journal of Japan Society of Fluid Mechanics (Nagare)* **16** (1997) 259 (in Japanese).