

平均曲率流方程式の Dirichlet 型境界値問題に対する数値実験

金沢大学大学院自然科学研究科 (M2) 森 望 (MORI, Nozomu)

金沢大学理学部計算科学科 後藤 俊一 (GOTO, Shun'ichi)

§1. はじめに

本稿は平均曲率流方程式の Dirichlet 型境界値問題に対するある数値実験の試みの中間的な報告である。最初に Peter Sternberg & William P. Ziemer の論文 (Generalized motion by curvature with a Dirichlet condition, J. Diff. Equations **114** (1994)) に従ってこの問題の設定を述べる。

Ω は \mathbb{R}^N の有界な C^2 領域とする。閉曲面 $\Gamma_0 \subset \bar{\Omega}$ に対して、 $\Gamma_0 \cap \Omega = \{g = 0\}$ となる関数 $g \in C(\bar{\Omega})$ 及び、 $\Gamma_0 \cap \partial\Omega = \{h = 0\}$ となる関数 $h \in C(\partial\Omega)$ をとる。このとき、

$$(1.1) \quad \partial_t u = |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right), \quad t > 0, x \in \Omega$$

$$(1.2) \quad u(t, x) = h(x), \quad t > 0, x \in \partial\Omega$$

$$(1.3) \quad u(0, x) = g(x), \quad x \in \Omega$$

を考えると、 $\Gamma_t = \{u = 0\}$ は境界が固定された曲面の平均曲率流を定義する。Sternberg & Ziemer は $\partial\Omega$ の平均曲率が正のときに (1.1)-(1.3) の粘性解の存在を証明した。ただし Ω は解法の便宜上設定されたもので、本来は固定境界 $\gamma (= \Gamma_0 \cap \partial\Omega)$ と初期曲面 Γ_0 ($\partial\Gamma_0 = \gamma$) が与えられたとき、その時間発展 Γ_t を求めていると考えるべきであろう。

上の (1.1)-(1.3) は平均曲率流方程式を等高面の方法で表現したものであるが、本稿はグラフの場合を考察する。 $x_n = v(t, x')$ ($x' \in \mathbb{R}^{N-1}$) に対して、例えば $u(t, x) = v(t, x') - x_n$ ($x = (x', x_n)$) と思えばよい。

我々は \mathbb{R}^3 の中で円環領域の上に張った回転対称な曲面に対する数値計算を実験的に行っている。これは $\partial\Omega$ の平均曲率が正でない場合の典型的な例の一つである。以下に差分近似の概略を述べ、実験結果を紹介する。

§2. 差分近似

\mathbb{R}^3 の座標を (x, y, z) とする。 (x, y) 平面上に半径 $a > 0$ の円周 γ_a と半径 $b > a$ の円周 γ_b をとり、 $\gamma = \gamma_a \cup \gamma_b$ を境界とする時刻 $t \geq 0$ における曲面を Γ_t とする。 Γ_t は $z = v(t, x, y)$

のようにグラフで表されていると仮定する。点 $P(x, y, z)$ での Γ_t の平均曲率 $K_M(P)$ は

$$\begin{aligned} K_M(P) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_x}{\sqrt{1+v_x^2+v_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_y}{\sqrt{1+v_x^2+v_y^2}} \right) \\ &= \frac{v_{xx}(1+v_y^2) - 2v_x v_y v_{xy} + v_{yy}(1+v_x^2)}{(1+v_x^2+v_y^2)\sqrt{1+v_x^2+v_y^2}} \end{aligned}$$

と計算できる。 Γ_t が z 軸に関して回転対称であることから、 $y=0$ で切った断面のうち $x>0$ にある曲線 $S_t: z=v(t, x, 0)$ ($=V(t, x)$ とおく) を考えればよく、また $v_y(t, x, 0)=0$ より

$$K_M(P) = \frac{v_{xx} + v_{yy}(1+v_x^2)}{(1+v_x^2)\sqrt{1+v_x^2}} \quad (P \in S_t)$$

となる。微小時間を Δt 、点 P での上向き単位法ベクトルを $\vec{\nu}$ とする。時刻 $t=t_n$ ($=n \cdot \Delta t$) における S_t 上の (離散化されたデータである) 点を $P_j^n(x_j^n, z_j^n)$ ($j=0, 1, \dots, k$) とする。 k は分割数、 $h=(b-a)/k$ とおく。

各点が $\vec{\nu}$ 方向に速度 $K_M(P)$ で動いていくというのが平均曲率流であるから、時刻 $t_{n+1}=t_n + \Delta t$ における点 $\tilde{P}_j^{n+1}(\tilde{x}_j^{n+1}, \tilde{z}_j^{n+1})$ は

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_j^{n+1}, \tilde{z}_j^{n+1}) &= (x_j^n, z_j^n) + \Delta t \cdot K_M(P_j^n) \cdot \vec{\nu} \\ &= (x_j^n, z_j^n) + \Delta t \cdot \frac{v_{xx} + v_{yy}(1+v_x^2)}{(1+v_x^2)\sqrt{1+v_x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+v_x^2}} (-v_x, 1) \\ &= (x_j^n, z_j^n) + \Delta t \cdot \frac{v_{xx} + v_{yy}(1+v_x^2)}{(1+v_x^2)^2} (-v_x, 1) \end{aligned}$$

となる。 v_x, v_{xx} の値は差分を用いてそれぞれ

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{V(t, x+h) - V(t, x-h)}{2h} \\ v_{xx} &= \frac{V(t, x+h) - 2V(t, x) + V(t, x-h)}{h^2} \end{aligned}$$

で計算し、 v_{yy} の値は回転対称性より $v(t, x, \pm h) = V(t, \sqrt{x^2+h^2})$ となることを利用して

$$\begin{aligned} v_{yy} &= \frac{v(t, x, h) - 2v(t, x, 0) + v(t, x, -h)}{h^2} \\ &= \frac{V(t, \sqrt{x^2+h^2}) - 2V(t, x) + V(t, \sqrt{x^2+h^2})}{h^2} \\ &= \frac{2(V(t, \sqrt{x^2+h^2}) - V(t, x))}{h^2} \end{aligned}$$

により計算する。端点は Dirichlet 条件により 0 に固定する。

このまま計算を進めていくと標本点が不均等になってきてしまうので、それを回避するために \tilde{P}_j^{n+1} の取り直しを行った。これまでの数値実験では、 $h > 0$ に対して Δt を十分小さくしたとき $|x_j^n - \tilde{x}_j^{n+1}| < h$, 即ち (1) $\tilde{x}_{j-1}^{n+1} \leq x_j^n \leq \tilde{x}_j^{n+1}$ または (2) $\tilde{x}_j^{n+1} \leq x_j^n \leq \tilde{x}_{j+1}^{n+1}$ のいずれかが成り立っていることから、 $x_j^{n+1} = x_j^n$ かつ

$$z_j^{n+1} = \frac{\tilde{z}_j^{n+1} - \tilde{z}_{j-1}^{n+1}}{\tilde{x}_j^{n+1} - \tilde{x}_{j-1}^{n+1}} (x_j^{n+1} - \tilde{x}_{j-1}^{n+1}) + \tilde{z}_{j-1}^{n+1} \quad ((1) \text{ の場合})$$

$$z_j^{n+1} = \frac{\tilde{z}_{j+1}^{n+1} - \tilde{z}_j^{n+1}}{\tilde{x}_{j+1}^{n+1} - \tilde{x}_j^{n+1}} (x_j^{n+1} - \tilde{x}_j^{n+1}) + \tilde{z}_j^{n+1} \quad ((2) \text{ の場合})$$

として、時刻 t_{n+1} における点 $P_j^{n+1}(x_j^{n+1}, z_j^{n+1})$ を決める。

なお、この差分近似の妥当性については、上の事実の証明を含めてまだ完全には示すことが出来ていないことを注意しておく。

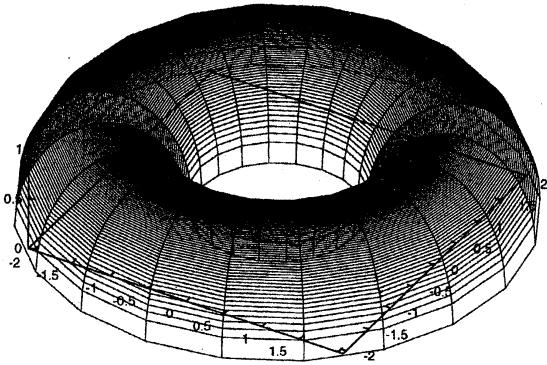
§3. 実験結果

Sternberg & Ziemer の結果の場合は、 $\partial\Omega$ の平均曲率が正であることから $|\nabla u|$ が a priori に評価され、それが解の存在定理の証明に重要な役割を果たした。我々の問題においても曲面全体は低く平らかになろうとするのだが、内側の円周 γ_a の半径が小さいときは、その付近で Γ_t を $\vec{\nu}$ の方向に移動させる力が大きいために曲面が境界から直立しそうになることが容易に予想できる。

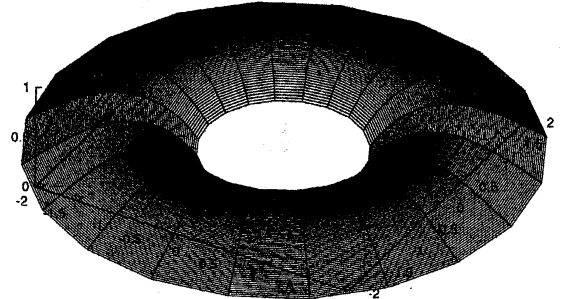
結果の (1) では、内周円の半径 $a = 1.0$, 外周円の半径 $b = 3.0$ とした。このとき上の困難はあまり観測されない。結果の (2) では、内周円の半径 $a = 0.15$, 外周円の半径 $b = 2.15$ とした。この場合は Γ_t の内側で v_x が発散しかけているように見えるが、前節の後半で述べたように数値の上ではグラフの関係が崩れることはなく、全体としては平らかになっていっている。

結果 1: $\gamma_a = 1.0$, $\gamma_b = 3.0$, $h = 0.02$, $\Delta t = 10^{-5}$

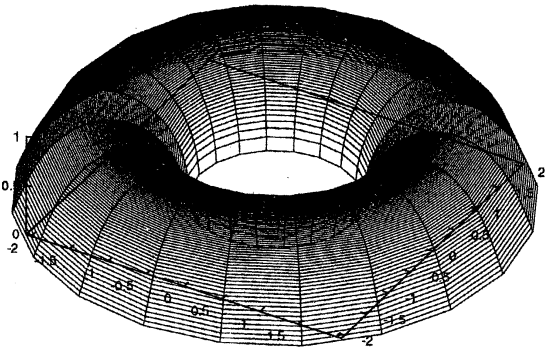
$t = 0.0$



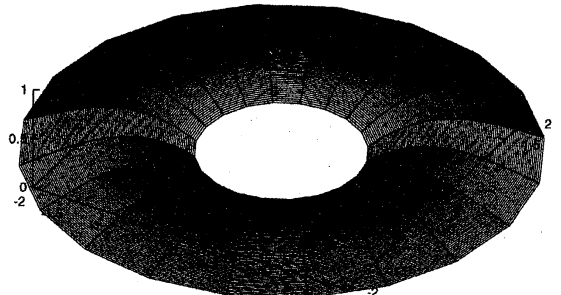
$t = 0.6$



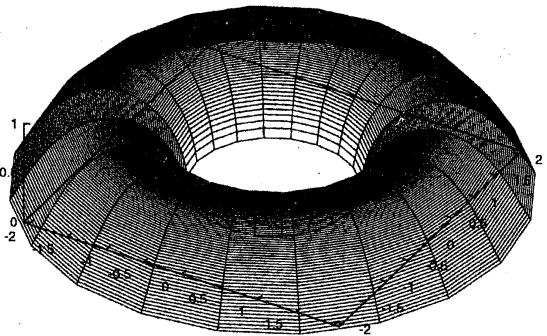
$t = 0.1$



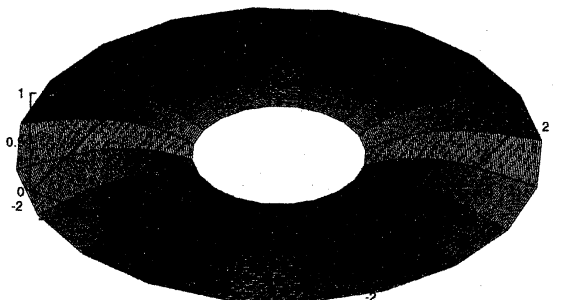
$t = 0.8$



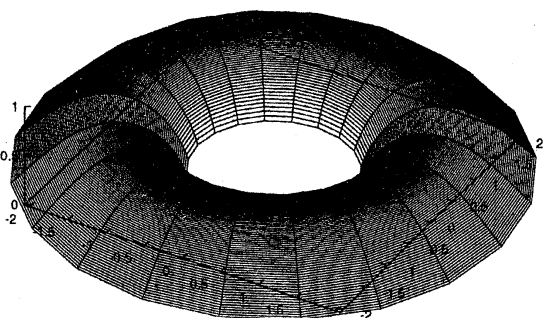
$t = 0.2$



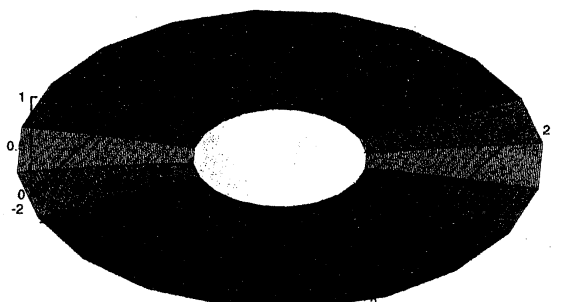
$t = 1.0$



$t = 0.4$

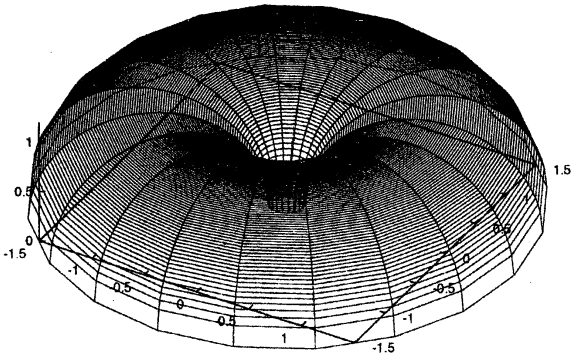


$t = 2.0$

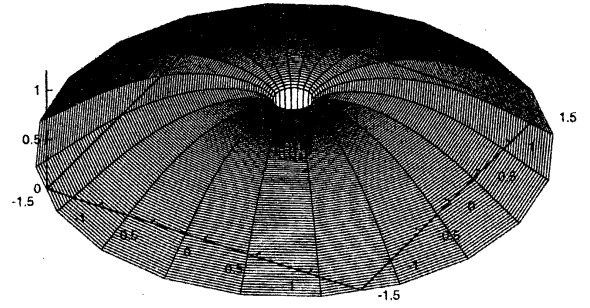


結果 2: $\gamma_a = 0.15$, $\gamma_b = 2.15$, $h = 0.02$, $\Delta t = 10^{-5}$

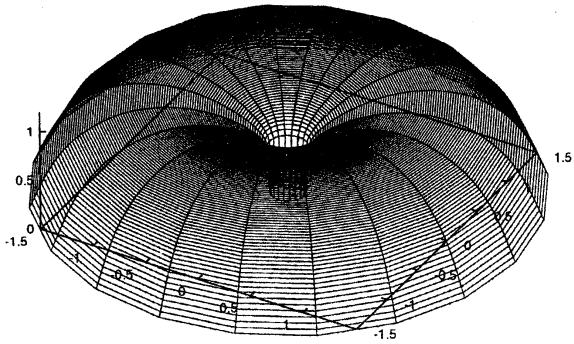
$t = 0.0$



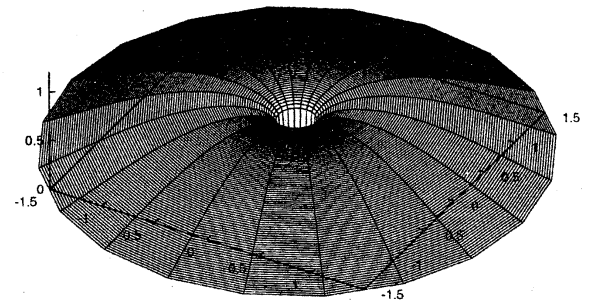
$t = 0.4$



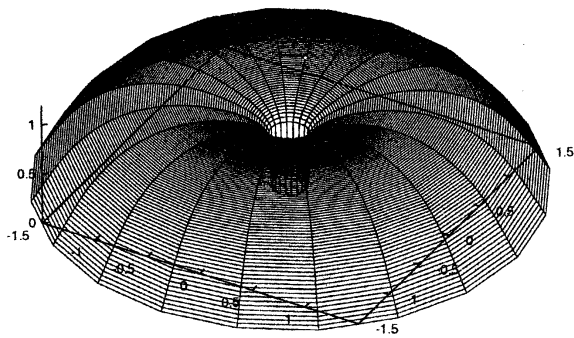
$t = 0.06$



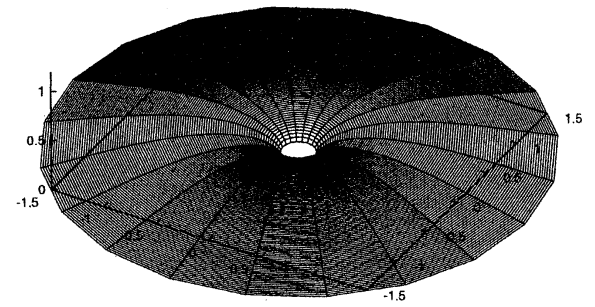
$t = 0.6$



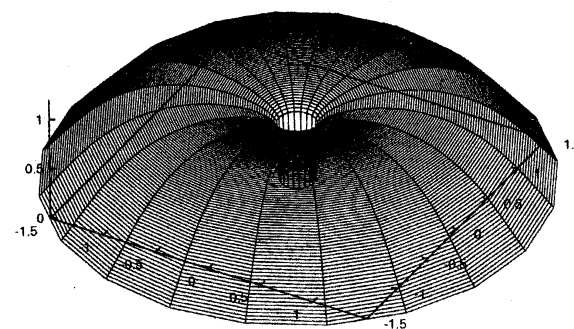
$t = 0.12$



$t = 1.0$



$t = 0.2$



$t = 2.0$

