数理解析研究所講究録
1125 巻 2000 年 81-92

論理プログラムの完備化と論理式の展開による証明手続きについて

A Proof Procedure by Completions of Logic Programs and Modified Unfolding

秋葉 澄孝[†] 佐藤 泰介[††] 元吉 文男[†]
Sumitaka AKIBA Taisuke SATO Fumio MOTOYOSHI

†電子技術総合研究所
Electrotechnical Laboratory
††東京工業大学大学院情報理工学研究科
Tokyo Institute of Technology

概要

論理式の展開と Clark の等号公理の下での真偽判定を組み合わせた証明手続きは、完備プログラムの 3 値の意味での論理的帰結を健全かつ完全に証明できる。特に、Clark の等号公理の下での真偽判定を選言標準形への変形によって行なうと、任意の形の論理式に対してその解を表現する選言標準形を求めることができる。本稿では、この手続きを完備化されていない論理プログラムに対して適用することについて考察する。論理式の展開の仕方によって証明できる論理式が異なるので、幾つかの展開の仕方に対して、証明できる論理式の必要十分条件をそれぞれ明らかにする。

1 はじめに

完備プログラムとゴールを表す論理式が与えられたとき，ゴールに含まれる等号以外の述語を，完備プログラムの本体で繰り返し置き換えた後，3 値の解釈による真理値が常に「未知」であるアトムに置き換える手続きを考えてみる．ゴールが閉論理式のとき，ゴールをこの手続きで Clark の等号公理 [1] の下で真な論理式に変形できることと，ゴールが完備プログラムの 3 値の意味での論理的帰結であることは，Kunen が証明した定理 [2] によると同値である．

また，述語として等号のみを含む論理式は，Clark の等号公理の下で選言標準形に変形できる [3]．この選言標準形は，元の論理式が真となる項の表現とみなすことができるので，この変形手続きを応用して一種の解を計算する手続きを作ることができる．

そこで，この 2 つの手続きを組み合わせると，ゴールが自由変数を含むときには，ゴールが完備プログラムの 3 値の意味での論理的帰結となるような解を過不足なく計算する手続きを作ることができる．この手続きで扱える完備プログラムとゴールには構文上の制限はなく，否定記号や限定記号を任意に含むことができる．解の表現としては，PROLOG のように代入を「$x = a$」というような肯定的な等式の表現として扱うものもあるが，選言標準形では「$x \neq a$」のような否定の式やもっと複雑な式を表現できるので，解の表現力は代入を用いるものよりも高い．

しかも，この手続きは単に理論上のものではなく，実際に実現することができる．我々が開発した ALL はこの手続きを実際に実現した完備プログラムの処理系の一つである [4] [5].

プログラムが完備プログラムではない場合でも，プログラムの論理的帰結を証明できるように上記のものと同様な手続きを作ることができる．但し，手続きの能力を把握するためには，Kunen の定理のようなプログラムと手続きの同値性を保証する根拠が必要である．

本稿では，完備ではない論理プログラムに対する述語の置き換え方について考察し，述語の置き換えによって Clark の等号公理の下で真な論理式に変形できる論理式が，論理プログラムの 2 値の意味での論理的帰結になるように，述語を置き換える論理式を考察する．また，この手続きで証明できることと 3 値の意味での論理的帰結であることが同値であるような論理プログラムについて考察する．

2 記号と用語の説明

$\mathbf{t}$，$\mathbf{f}$，$\mathbf{u}$ でそれぞれ真，偽，不明を意味する真理値を表す．また，同じ記号を用いて，真理値が常に $\mathbf{t}$，$\mathbf{f}$，$\mathbf{u}$ であるアトムを表す．

$\mathbf{t}$，$\mathbf{f}$，$\mathbf{u}$ 以外のボールド体で書かれた文字は「ベクトル」として複数の同様な文字の並びを表わすことにする．たとえば $\boldsymbol{p}$ は $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のことを表わす．$\mathbf{t}$ のベクトル，$\mathbf{f}$ のベクトル，$\mathbf{u}$ のベクトルをそれぞれを $\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{u}$ で表す．

ベクトルに関する関係は，対応する要素同士の関係を意味するものとする．例えば，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ は等式のベクトル $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$ を意味する．また，論理式のベクトルに対する結合記号の意味も同様である．例えば，$\boldsymbol{\phi} \wedge \boldsymbol{\psi}$ は論理式のベクトル $\phi_1 \wedge \psi_1, \ldots, \phi_n \wedge \psi_n$ を表す．

$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a})$ はアトム $p_1(\boldsymbol{a}), \ldots, p_n(\boldsymbol{a})$ のベクトルを表し，$p_i(\boldsymbol{a})$ は $p_i(a_1, \ldots, a_{m_i})$ を表す．但し，$\boldsymbol{a}$ は項 $a_1, \ldots, a_m$ のベクトル，$\boldsymbol{p}$ は述語記号 $p_1, \ldots, p_n$ のベクトル，m_i は p_i の引数の個数であり，$m_i \leq m$ が成り立つと仮定する．

解釈 M が定数記号 c に割り当てる M の領域の元を $M\langle c\rangle$ で表し，関数記号 f に割り当てる M の領域上の関数を $M\langle f\rangle$，述語記号 p に割り当てる M の領域上の述語を $M\langle p\rangle$ で表す．

解釈 M と M の領域への変数割り当て V による論理式 ϕ の真理値を $M[\![\phi]\!]_V$ で表す．M が 2 値であるか 3 値であるかに関わらず同じ記号を用いる．$V[d/x]$ で，変数 x に d を，x 以外の変数には V と同じ元を割り当てる変数割り当てを表す．なお，混乱するおそれがない場合には「解釈 M と変数割り当て V」のように記述して，V が割り当てる領域を断わることを省略する．

ϕ に $\boldsymbol{x}$ 以外の自由変数が現れないときには，$M[\![\phi]\!]_{V[\boldsymbol{d}/\boldsymbol{x}]}$ の値は V に依存しないので，V を省略して $M[\![\phi]\!]_{[\boldsymbol{d}/\boldsymbol{x}]}$ と書くこともある．また，ϕ が閉論理式の場合には，$M[\![\phi]\!]_V$ の値は V に依存しないので，V を省略して $M[\![\phi]\!]$ と書くことがある．

論理式 $\neg\phi$ の真理値を，$M[\![\phi]\!]_V = \mathbf{f}$ のとき $M[\![\neg\phi]\!]_V = \mathbf{t}$，$M[\![\phi]\!]_V = \mathbf{t}$ のとき $M[\![\neg\phi]\!]_V = \mathbf{f}$，その他のとき $M[\![\neg\phi]\!]_V = \mathbf{u}$ と定義し，$\phi \vee \psi$ の真理値を，$M[\![\phi]\!]_V = \mathbf{t}$ または $M[\![\psi]\!]_V = \mathbf{t}$ のとき $M[\![\phi \vee \psi]\!]_V = \mathbf{t}$，$M[\![\phi]\!]_V = \mathbf{f}$ かつ $M[\![\psi]\!]_V = \mathbf{f}$ のとき $M[\![\phi \vee \psi]\!]_V = \mathbf{f}$，その他のとき $M[\![\phi \vee \psi]\!]_V = \mathbf{u}$ と定義する．また，$\exists x\phi$ の真理値を，ある $d \in D$ において $M[\![\phi]\!]_{V[d/x]} = \mathbf{t}$ のとき $M[\![\exists x\phi]\!]_V = \mathbf{t}$，任意の $d \in D$ において $M[\![\phi]\!]_{V[d/x]} = \mathbf{f}$ のとき $M[\![\exists x\phi]\!]_V = \mathbf{f}$，その他のとき $M[\![\exists x\phi]\!]_V = \mathbf{u}$ と定義する．但し，D は M の領域とする．

$\phi \wedge \psi$，$\phi \leftarrow \psi$，$\forall x\phi$ の真理値を，それぞれ $\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$，$\phi \vee \neg\psi$，$\neg\forall x\neg\phi$ の真理値と一致するように定義する．

$\phi \leftrightarrow \psi$ を $(\phi \leftarrow \psi) \wedge (\psi \leftarrow \phi)$ の省略と定義する．

論理式の結合記号⇔を，真理値が $M[\![\phi]\!]_V = M[\![\psi]\!]_V$ のとき $M[\![\phi \Leftrightarrow \psi]\!]_V = \mathbf{t}$，その他のとき $M[\![\phi \Leftrightarrow \psi]\!]_V = \mathbf{f}$ となる記号と定義する．また，結合記号⇐を，$M[\![\phi]\!]_V \neq \mathbf{t}$ かつ $M[\![\psi]\!]_V = \mathbf{t}$ のとき $M[\![\phi \Leftarrow \psi]\!]_V = \mathbf{f}$，その他のとき $M[\![\phi \Leftarrow \psi]\!]_V = \mathbf{t}$ となる記号と定義する．

⇔と⇐は後述する述語定義や述語の条件を表す論理式で主にそれぞれ使用し，特に断らない論理式には現れないと仮定する．2 値の解釈では⇔と⇐の真理値はそれぞれ↔，←の真理値と一致する．

2 値の意味での論理的帰結を $\models$ で表し，3 値の意味での論理的帰結を $\models_3$ で表す．

ϕ と ψ が論理式，Δ が閉論理式の集合のとき，$\phi \equiv_{3\Delta} \psi$ を，Δ の任意の 3 値モデル M と任意の変数割り当て V において $M[\![\phi]\!]_V = M[\![\psi]\!]_V$ が成り立つことと定義し，この関係が成り立つとき ϕ と ψ は Δ の下で同値と呼ぶ．2 値の意味での同様の関係を $\equiv_\Delta$ で表す．Δ が空集合のときには，$\equiv_3$，$\equiv$ を用いる．

M を解釈とし，ϕ と ψ を論理式とする．関係

$\phi \preceq^{\mathbf{t}}_M \psi$ を，任意の変数割り当て V に対して

$$M[\![\phi]\!]_V = \mathbf{t} \implies M[\![\psi]\!]_V = \mathbf{t}$$

が成り立つことと定義し，関係 $\phi \preceq^{\mathbf{f}}_M \psi$ を，任意の変数割り当て V に対して

$$M[\![\phi]\!]_V = \mathbf{f} \implies M[\![\psi]\!]_V = \mathbf{f}$$

が成り立つことと定義する．関係 $\phi \preceq_M \psi$ を，$\phi \preceq^{\mathbf{t}}_M \psi$ と $\phi \preceq^{\mathbf{f}}_M \psi$ が成り立つことと定義する．

$\phi \preceq^{\mathbf{t}} \psi$，$\phi \preceq^{\mathbf{f}} \psi$，$\phi \preceq \psi$ を，それぞれ任意の解釈 M に対して $\phi \preceq^{\mathbf{t}}_M \psi$，$\phi \preceq^{\mathbf{f}}_M \psi$，$\phi \preceq_M \psi$ が成り立つことと定義する．

任意の n に対して $\phi_n \preceq \phi_{n+1}$ が成り立つ論理式のベクトル $\boldsymbol{\phi}$ を，increasing chain と呼ぶ．

論理式中に現れる部分論理式が，先頭からその部分論理式にたどり付くまでに偶数回の否定記号を通るものを正に現れていると呼び，奇数回の否定記号を通るものを負に現れていると呼ぶ．なお，結合記号 $\leftarrow$ を右辺の論理式に対して否定記号 1 個分に数える．

表現 $\{\phi_1/p_1,\ldots,\phi_n/p_n;\ \psi_1/p_1,\ldots,\psi_n/p_n \,|\, \boldsymbol{x}\}$ で，論理式中に正に現れる部分アトム $p_i(\boldsymbol{a})$ を論理式 $\phi_i\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{x}\}$ で置き換え，負に現れる部分アトム $p_i(\boldsymbol{a})$ を論理式 $\psi_i\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{x}\}$ で置き換える操作を表す．但し，$\boldsymbol{a}$ の変数が $\phi_i\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{x}\}$，$\psi_i\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{x}\}$ の中で束縛されないように，ϕ_i，ψ_i に現れる束縛変数を付け変える操作も同時に行なうことを表す．また，$p_1,\ldots,p_n$ は互いに他と異なると仮定する．

この操作を述語の置換と呼ぶ．$\{\boldsymbol{\phi}/\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{\psi}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$ はこれのベクトル表現である．正負の操作が同じときには，$\{\phi_1/p_1,\ldots,\phi_n/p_n \,|\, \boldsymbol{x}\}$，$\{\boldsymbol{\phi}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$ と略記する．

$\boldsymbol{\phi}$ と $\boldsymbol{\psi}$ が自由変数をもたない場合には，$\{\boldsymbol{\phi}/\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{\psi}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$ の作用は $\boldsymbol{x}$ のとり方に依存しないので，$\boldsymbol{x}$ を省略して $\{\boldsymbol{\phi}/\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{\psi}/\boldsymbol{p}\}$ と略記する．例えば，$\{\boldsymbol{f}/\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{t}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$，$\{\boldsymbol{t}/\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{f}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$，$\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$ をそれぞれ $\{\boldsymbol{f}/\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{t}/\boldsymbol{p}\}$，$\{\boldsymbol{t}/\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{f}/\boldsymbol{p}\}$，$\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$ と略記する．

論理式 G に述語の置換 Θ を適用することを G を Θ で展開すると呼び，その結果を $G\Theta$ で表す．

述語が等号，$\mathbf{t}$，$\mathbf{f}$，$\mathbf{u}$ のみの場合の Clark の等号公理 (Clark's Equational Theory) [1] [2] [6] を $E(\Sigma)$ で表す．すなわち，次の論理式の集合を $E(\Sigma)$ で表す．

$$\begin{aligned}
&\left\{ \begin{array}{l} \forall x(x{=}x) \\ \forall x\forall y(x{=}y \rightarrow y{=}x) \\ \forall x\forall y\forall z((x{=}y \wedge y{=}z) \rightarrow x{=}z) \end{array} \right\} \\
&\cup \{\, \forall \boldsymbol{x}\forall \boldsymbol{y}(f(\boldsymbol{x}){\neq}g(\boldsymbol{y})) \\
&\qquad |\ f,\ g \text{ は異なる関数記号} \,\} \\
&\cup \{\, \forall \boldsymbol{x}\forall \boldsymbol{y}((f(\boldsymbol{x}){=}f(\boldsymbol{y})) \rightarrow \boldsymbol{x}{=}\boldsymbol{y}) \\
&\qquad \forall \boldsymbol{x}\forall \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}{=}\boldsymbol{y} \rightarrow (f(\boldsymbol{x}){=}f(\boldsymbol{y}))) \\
&\qquad |\ f \text{ は関数記号} \,\} \\
&\cup \{\, \forall x(t[x]{\neq}x) \mid t[x] \text{ は } x \text{ ではない項であり，} \\
&\qquad \text{かつ，自由変数として } x \text{ を含む項} \,\}
\end{aligned}$$

但し，関数記号が有限個のときは Domain Closure Axiom [6] [7] [3] と呼ばれる論理式

$$\forall x \Big(\bigvee_{f\in\Sigma} \exists \boldsymbol{y}(x{=}f(\boldsymbol{y})) \Big)$$

を Clark の等号公理に加えたものを $E(\Sigma)$ で表す．Σ は関数記号の全体を表し，定数記号は引数が無い関数記号として扱う．等号の解釈は 2 値である．

$$\begin{aligned}
E(\Sigma) \cup \{\, &\forall \boldsymbol{x}\forall \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}{=}\boldsymbol{y} \rightarrow (p(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow p(\boldsymbol{y})) \\
&|\ p \text{ は等号，}\mathbf{t}\text{，}\mathbf{f}\text{，}\mathbf{u} \text{ 以外の述語記号} \,\}
\end{aligned}$$

を $E_p(\Sigma)$ で表す．

$\forall \boldsymbol{x}(p(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow P)$ の形の論理式であり，P に現れる自由変数はすべて $p(\boldsymbol{x})$ $(= p(x_i,\ldots,x_m))$ にも現れるものを $p(\boldsymbol{x})$ の述語定義と呼ぶ．述語定義のベクトル $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P})$ と $E(\Sigma)$ あるいは $E_p(\Sigma)$ からなる論理式の集合を完備プログラムと呼ぶ．

3 補題

補題 1 M を解釈，ϕ を論理式，$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{F}'$，$\boldsymbol{G}'$ を論理式のベクトルとする．このとき，

$$\boldsymbol{F} \preceq^{\mathbf{t}}_M \boldsymbol{F}' \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{G} \preceq^{\mathbf{f}}_M \boldsymbol{G}'$$

が成り立つならば，次の 2 式が成り立つ．

$$\phi\{\boldsymbol{F}/\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{G}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\} \preceq^{\mathbf{t}}_M \phi\{\boldsymbol{F}'/\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{G}'/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$$
$$\phi\{\boldsymbol{G}/\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{F}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\} \preceq^{\mathbf{f}}_M \phi\{\boldsymbol{G}'/\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{F}'/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$$

証明の概略：

ϕ の構造に関して帰納的に証明できる． □

補題 2 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{G}$ は自由変数として $\boldsymbol{x}$ だけが現れる論理式のベクトルであり，任意の解釈 M，変数割り当て V と任意の i に対して，$M[\![F_i]\!]_V \neq \mathbf{t}$ または $M[\![G_i]\!]_V \neq \mathbf{f}$ と仮定する．

このとき，任意の解釈 M に対して次の 2 つが成り立つ解釈 M' が存在する．

- 領域は M と同じ．

- V を変数割り当て，ϕ を論理式とすると

$$M'[\![\phi]\!]_V = \mathbf{t}$$
$$\iff M[\![\phi\{\boldsymbol{F}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{G}/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}]\!]_V = \mathbf{t}$$
$$M'[\![\phi]\!]_V = \mathbf{f}$$
$$\iff M[\![\phi\{\boldsymbol{G}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{F}/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}]\!]_V = \mathbf{f}$$

証明の概略：

M' を

$$M'\langle p_i\rangle(\boldsymbol{d}) = \mathbf{t} \iff M[\![F_i]\!]_{[\boldsymbol{d}/\boldsymbol{x}]} = \mathbf{t}$$
$$M'\langle p_i\rangle(\boldsymbol{d}) = \mathbf{f} \iff M[\![G_i]\!]_{[\boldsymbol{d}/\boldsymbol{x}]} = \mathbf{f}$$

と定義できる． □

補題 3 $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{F}'$, $\boldsymbol{G}'$ は自由変数として $\boldsymbol{x}$ だけが現れる論理式のベクトルであり，次の 2 つが成り立つと仮定する．

- 任意の解釈 M と変数割り当て V と任意の i に対して，$M[\![F]\!]_V \neq \mathbf{t}$ または $M[\![G]\!]_V \neq \mathbf{f}$
- $\boldsymbol{F} \preceq^{\mathbf{t}}_{E(\Sigma)} \boldsymbol{F}'$ かつ $\boldsymbol{G} \preceq^{\mathbf{f}}_{E(\Sigma)} \boldsymbol{G}'$

このとき ϕ を論理式とすると，任意の n に対して次の 2 式が成り立つ．

$$\phi\{\boldsymbol{F}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{G}/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$$
$$\preceq^{\mathbf{t}}_{E(\Sigma)} \phi\{\boldsymbol{F}'/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{G}'/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$$
$$\phi\{\boldsymbol{G}/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{F}/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$$
$$\preceq^{\mathbf{f}}_{E(\Sigma)} \phi\{\boldsymbol{G}'/\boldsymbol{p};\, \boldsymbol{F}'/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$$

証明の概略：

補題 1 と補題 2 を用いて証明できる． □

補題 4 ($E(\Sigma)$ の 3 値の完全性) ϕ を等号，$\mathbf{t}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{u}$ 以外の述語が現れない閉論理式とすると，以下の 3 つのどれかが成り立つ．

- $E(\Sigma)$ の任意のモデル M に対して $M[\![\phi]\!] = \mathbf{t}$
- $E(\Sigma)$ の任意のモデル M に対して $M[\![\phi]\!] = \mathbf{f}$
- $E(\Sigma)$ の任意のモデル M に対して $M[\![\phi]\!] = \mathbf{u}$

証明の概略：

$\phi\{\mathbf{f}/\mathbf{u};\, \mathbf{t}/\mathbf{u}\}$ と $\phi\{\mathbf{t}/\mathbf{u};\, \mathbf{f}/\mathbf{u}\}$ に $E(\Sigma)$ の 2 値の完全性を適用することによって証明できる． □

定理 5 任意の解釈 M に対して，次の 2 つが成り立つ解釈 M^* が存在する．M は 2 値でも 3 値でも良い．

- ϕ を閉論理式とする．$\Leftrightarrow$ や $\Leftarrow$ を含んでいても良い．このとき次の等式が成り立つ．

$$M^*[\![\phi]\!] = M[\![\phi]\!]$$

- M^* の領域を D^* で表し，V^* を D^* への変数割り当て，$\boldsymbol{\phi}$ を論理式の increasing chain とすると，

$$\forall d^* \in D^* \quad \exists n\ s.t.\ M^*[\![\phi_n]\!]_{V^*[d^*/x]} = \mathbf{t}$$
$$\iff \exists n\ s.t.\ \forall d^* \in D^* \quad M^*[\![\phi_n]\!]_{V^*[d^*/x]} = \mathbf{t}$$
$$\forall d^* \in D^* \quad \exists n\ s.t.\ M^*[\![\phi_n]\!]_{V^*[d^*/x]} = \mathbf{f}$$
$$\iff \exists n\ s.t.\ \forall d^* \in D^* \quad M^*[\![\phi_n]\!]_{V^*[d^*/x]} = \mathbf{f}$$

証明の概略：

M^* として countably incomplete ultrafilter [8] に関する M の超ベキ [8] [9] をとると良い． □

4 Kunen の定理

完備プログラムに関する次の定理が Kunen によって証明されている．

定理 6 (Kunen [2]) G を任意の閉論理式とする．次の 2 つは同値である．

$$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}) \models_3 G \tag{1}$$
$$\exists n\ s.t.\ E(\Sigma) \models_3 G\{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\} \tag{2}$$

また，これらが成り立つならば

$$E_p(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}) \models G \tag{3}$$

が成り立つ．

我々が開発した ALL はこの定理を応用した完備プログラムの処理系である [4] [5].

ALL は，述語定義 $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P})$ とゴールである閉論理式 G が与えられると，n を徐々に増やしながら G を展開し，(2) が成り立つ n を探す．そのような n が見つかると，G は $E(\Sigma) \cup \{\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P})\}$ の論理的帰結であると判定して，ALL は停止する．

(2) が成り立つ n が存在するならば，G の中の各 $p_i(\boldsymbol{a})$ を n 回以上展開したものは，展開の回数が一様でなくても，$E(\Sigma)$ の論理的帰結であることが，補題 1 よりわかる．つまり，ALL は n を 1 つずつ各アトムに対して均等に増やす必要はなく，柔軟に展開できる [4] [5].

$$E(\Sigma) \models_3 G\{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\} \tag{4}$$

の真偽は，右辺の論理式を選言標準形 (DNF) と呼ばれる次の形の論理式

$$\bigvee_i \Big(\exists \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}{=}\boldsymbol{s}_i[\boldsymbol{y}]) \bigwedge_j \neg\exists \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}{=}\boldsymbol{s}_{ij}[\boldsymbol{y}])\Big) \tag{5}$$

に変形することによって判定することができる [3].

G が閉論理式の場合には，(4) の右辺は $\mathbf{t}$ か $\mathbf{f}$ に変形されるので，どちらになるかで (4) の真偽が判定できる．G に自由変数 $\boldsymbol{x}$ が現れる場合には，(4) の右辺は変数を含む (5) の形に変形される．これは (4) が真となる $\boldsymbol{x}$，すなわち (4) の解の DNF 表現である．

ALL ではこの方法を採用しているので，n を徐々に増やしながら (4) の解を DNF の形で求め

ることによって，(1) の解を次々に求めることができる．G は任意の形をとれるので，否定記号が現れても良い．

このように，Kunen の定理を応用すると完備プログラムの処理系を作ることができる．

本稿では，次の形の論理式で述語の肯定条件と否定条件が与えられた場合を考える．

$$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^{+}) \tag{6}$$

$$\forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^{-}) \tag{7}$$

但し，$\boldsymbol{P}^{+}$ と $\boldsymbol{P}^{-}$ は $\Leftrightarrow$ や $\Leftarrow$ が現れない論理式のベクトルと仮定する．また，P_i^{+} と P_i^{-} に現れる自由変数は，$p_i(\boldsymbol{x})$ $(= p_i(x_1, \ldots, x_{m_i}))$ にも現れると仮定する．

$p_i(\boldsymbol{x})$ の肯定条件が

$$\forall \boldsymbol{y}(p_i(\boldsymbol{a}_{ij}) \leftarrow F_{ij})$$

という形の論理式の集合で表されている場合には，

$$\forall \boldsymbol{x}\Big(p_i(\boldsymbol{x}) \leftarrow \bigvee_j \exists \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}{=}\boldsymbol{a}_{ij} \wedge F_{ij})\Big)$$

の形で $p_i(\boldsymbol{x})$ の肯定条件を表すことができる．従って，この場合も (6) の形で述語の肯定条件が与えられていると考えて良い．

同様に，$p_1(\boldsymbol{x}), \ldots, p_n(\boldsymbol{x})$ の否定条件が

$$\forall \boldsymbol{y}(\neg p_i(\boldsymbol{a}_{ij}) \leftarrow F_{ij})$$

の形の論理式の集合で表されている場合には，(7) の形で与えられていると考えて良い．

また，完備プログラムのように $p_i(\boldsymbol{x})$ の必要十分条件が

$$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow F_i)$$

という形の論理式で表されていることもある．この場合には，$p_i(\boldsymbol{x})$ の条件が (6) と (7) の形の 2 つの論理式

$$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \leftarrow F_i)$$

$$\forall \boldsymbol{x}(\neg p_i(\boldsymbol{x}) \leftarrow \neg F_i)$$

で与えられているとみなすことができる．

$p_i(\boldsymbol{x})$ の肯定条件が与えられていない場合には

$$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \leftarrow \mathbf{f})$$

が与えられているとみなし，否定条件が与えられていない場合には

$$\forall \boldsymbol{x}(\neg p_i(\boldsymbol{x}) \leftarrow \mathbf{f})$$

が与えられているとみなす．

本稿では，このような (6) と (7) の形の論理式に対して適用できるように Kunen の定理を拡張し，

$$E(\Sigma), \Gamma^* \models_3 G$$

と

$$\exists n \ s.t. \ E(\Sigma) \models_3 G\Theta^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$$

は同値であり，これらが成り立つならば

$$E_p(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^{+}), \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^{-}) \models G$$

が成り立つような，論理式の集合 Γ^* と述語の置換 Θ について考察する．

以下では，まず Γ^* として述語定義をとった場合について考察し，次に結合記号 $\Leftarrow$ を用いた場合について考察する．

なお，次の補題が成り立つので，p_i に関する述語定義の本体 P_i に $p_i(\boldsymbol{x})$ が現れる場合には，$p_i(\boldsymbol{x})$ を $\mathbf{t}$, $\mathbf{f}$ および $\mathbf{u}$ に置き換えて，述語定義や述語の置換を簡略化できる．

補題 7 $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P})$ を述語定義とする．

P_i の中に現れるアトム $p_i(\boldsymbol{x})$ の幾つかを $\mathbf{u}$ に置き換えた論理式を $P_i^{\mathbf{u}}$ とおき，これらのベクトルを $\boldsymbol{P}^{\mathbf{u}}$ とおく．

また，P_i の中で正に現れる $p_i(\boldsymbol{x})$ の幾つかを $\mathbf{f}$ に置き換え，負に現れる $p_i(\boldsymbol{x})$ を $\mathbf{t}$ に置き換えた論理式を $P_i^{\mathbf{ft}}$，これらのベクトルを $\boldsymbol{P}^{\mathbf{ft}}$ とおき，P_i の中で正に現れる $p_i(\boldsymbol{x})$ の幾つかを $\mathbf{t}$ に置き換え，負に現れる $p_i(\boldsymbol{x})$ を $\mathbf{f}$ に置き換えた論理式を $P_i^{\mathbf{tf}}$，これらのベクトルを $\boldsymbol{P}^{\mathbf{tf}}$ とおく．

これらの置き換えは P_i に現れる全ての $p_i(\boldsymbol{x})$ に対して行なっていても良く，全く置き換えていなくても良い．但し，置き換えられる $p_i(\boldsymbol{x})$ の $\boldsymbol{x}$ は P_i の中で束縛されていないと仮定する．

G を任意の論理式とすると，以下の 4 つは同値である．

$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}) \models_3 G$

$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}^{\mathbf{u}}) \models_3 G$

$\exists n \ s.t. \ E(\Sigma) \models_3 G\{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$

$\exists n \ s.t. \ E(\Sigma) \models_3 G\{\boldsymbol{P}^{\mathbf{ft}}/\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{P}^{\mathbf{tf}}/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$

5 完備化

前節で述べたような Γ^* と Θ を定める最も簡単な方法は，述語定義 $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P})$ が

$$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^{+}) \wedge \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^{-})$$

と同値になるように，$\boldsymbol{P}$ をとることと思われる．

この方法により次の定理を導くことができる．

定理 8 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{P}^{+} \vee \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) \wedge (\neg \boldsymbol{P}^{-} \vee \neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) \wedge (\boldsymbol{P}^{+} \vee \neg \boldsymbol{P}^{-})$，$\boldsymbol{P}^{\mathbf{u}} = ((\boldsymbol{P}^{+} \wedge \neg \boldsymbol{P}^{-}) \vee \boldsymbol{u}) \wedge (\boldsymbol{P}^{+} \vee \neg \boldsymbol{P}^{-})$ とおく．G を任意の閉論理式とする．次の

3 つは同値である．

$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}) \models_3 G$

$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}^{\mathbf{u}}) \models_3 G$

$\exists n\ s.t.\ E(\Sigma) \models_3$

$G\{\boldsymbol{P}^+ \wedge \neg \boldsymbol{P}^- / \boldsymbol{p};\ \boldsymbol{P}^+ \vee \neg \boldsymbol{P}^- / \boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{x}\}^n \{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$

また，この 3 つが成り立つならば次の式が成り立つ．

$E_p(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^+), \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^-) \models G$

証明：

真理表を作ることにより

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}$$
$$\equiv (\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^+) \wedge (\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^-)$$

が成り立つことを確かめることができる．従って次の 2 つは同値である．

$E_p(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}) \models G$

$E_p(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^+), \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^-) \models G$

また，補題 7 と Kunen の定理より，次の 3 つは同値である．

$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}) \models_3 G$

$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}^{\mathbf{u}}) \models_3 G$

$\exists n\ s.t.\ E(\Sigma) \models_3$

$G\{\boldsymbol{P}^+ \wedge \neg \boldsymbol{P}^- / \boldsymbol{p};\ \boldsymbol{P}^+ \vee \neg \boldsymbol{P}^- / \boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{x}\}^n \{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$

2 値と 3 値の意味の関係から

$$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}) \models_3 G$$

ならば

$$E_p(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}) \models G$$

が成り立つので，以上をまとめると定理が成り立つことが分かる．□

本稿では，定理の $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P})$，及び，これと 3 値の意味で同値な述語定義を，$\{\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^+), \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^-)\}$ の完備化と呼ぶ．また，$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}^{\mathbf{u}})$ を完備化の簡略化と呼ぶ．

また，定理の述語の置換 $\{\boldsymbol{P}^+ \wedge \neg \boldsymbol{P}^- / \boldsymbol{p};\ \boldsymbol{P}^+ \vee \neg \boldsymbol{P}^- / \boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{x}\}$ をプログラムに対応する置換と呼ぶ．

なお，$\boldsymbol{F} \equiv_{3E(\Sigma)} \boldsymbol{F}'$ かつ $\boldsymbol{G} \equiv_{3E(\Sigma)} \boldsymbol{G}'$ ならば，補題 3 より

$$\phi\{\boldsymbol{F}/\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{G}/\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{x}\}^n \{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$$
$$\equiv_{3E(\Sigma)} \phi\{\boldsymbol{F}'/\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{G}'/\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{x}\}^n \{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$$

が成り立つ．従って，述語を置き換える論理式を $E(\Sigma)$ の下で同値変形しても良いことがわかる．以下では，この同値変形を適宜行なう．

5.1 $P_i^- = \mathbf{f}$ の場合

ある $p_i(\boldsymbol{x})$ に対して肯定条件

$$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \leftarrow P_i^+)$$

しか与えられていない場合がある．この場合には $P_i^- = \mathbf{f}$ である否定条件

$$\forall \boldsymbol{x}(\neg p_i(\boldsymbol{x}) \leftarrow \mathbf{f})$$

が与えられているとみなすことができる．従って，完備化された $p_i(\boldsymbol{x})$ の述語定義は

$$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow (P_i^+ \vee p_i(\boldsymbol{x})) \wedge (\neg \mathbf{f} \vee \neg p_i(\boldsymbol{x}))$$
$$\wedge (P_i^+ \vee \neg \mathbf{f}))$$

である．これは 3 値の意味で

$$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow P_i^+ \vee p_i(\boldsymbol{x}))$$

と同値であり，これらの簡略化は次の述語定義になる．

$$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow P_i^+ \vee \mathbf{u})$$

また，

$$P_i^+ \wedge \neg P_i^- = P_i^+ \wedge \neg \mathbf{f} \equiv_3 P_i^+$$
$$P_i^+ \vee \neg P_i^- = P_i^+ \vee \neg \mathbf{f} \equiv_3 \mathbf{t}$$

なので，プログラムに対応する置換は正負に現れる $p_i(\boldsymbol{x})$ をそれぞれ P_i^+ 及び $\mathbf{t}$ に置き換えるものになる．

特にどの $p_i(\boldsymbol{x})$ に対しても肯定条件しか与えられていない場合には，つまり $\boldsymbol{P}^- = \boldsymbol{f}$ の場合には，G を任意の閉論理式とすると，次の 3 つは同値である．

$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}^+ \vee \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) \models_3 G$

$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}^+ \vee \boldsymbol{u}) \models_3 G$

$\exists n\ s.t.\ E(\Sigma) \models_3 G\{\boldsymbol{P}^+/\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{t}/\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{x}\}^n \{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$

また，この 3 つが成り立つならば次の式が成り立つ．

$$E_p(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^+) \models G$$

5.2 $P_i^- = \neg P_i^+$ の場合

$p_i(\boldsymbol{x})$ の必要十分条件

$$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow P_i^+)$$

が与えられている場合がある．この場合は $P_i^- = \neg P_i^+$ である次の論理式が与えられていると考えて良い．

$$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \leftarrow P_i^+)$$
$$\forall \boldsymbol{x}(\neg p_i(\boldsymbol{x}) \leftarrow \neg P_i^+)$$

従ってこの場合の完備化は

$$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow (P_i^+ \vee p_i(\boldsymbol{x})) \wedge (\neg\neg P_i^+ \vee \neg p_i(\boldsymbol{x}))$$
$$\wedge (P_i^+ \vee \neg\neg P_i^+))$$

であり，これは 3 値の意味で

$$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow P_i^+)$$

と同値である．

また，プログラムに対応する置換は，正負の区別

をせずに，$p_i(\boldsymbol{x})$ を P_i^+ に置き換えるものになる．

特に，すべての $p_i(\boldsymbol{x})$ について必要十分条件が与えられている場合には，G を任意の閉論理式とすると，次の 2 つは同値である．

$$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}^+) \models_3 G$$

$$\exists n \ s.t. \ E(\Sigma) \models_3 G\{\boldsymbol{P}^+/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$$

また，この 2 つが成り立つならば次の式が成り立つ．

$$E_p(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow \boldsymbol{P}^+) \models G$$

すなわち，定理 8 は Kunen の定理の拡張になっている．

5.3 例

ここでは定理 8 を用いた解の計算例について述べる．

述語の条件として，次の 6 つの論理式

$$\forall \mathrm{x}\forall \mathrm{y}(\text{父}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \leftrightarrow \text{親}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \wedge \text{男}(\mathrm{x}))$$

$$\forall \mathrm{x}\forall \mathrm{y}(\text{親}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \leftarrow (\mathrm{x}{=}\text{太郎} \vee \mathrm{x}{=}\text{花子}) \wedge \mathrm{y}{=}\text{一郎})$$

$$\forall \mathrm{x}(\text{男}(\mathrm{x}) \leftarrow \mathrm{x}{=}\text{太郎} \vee \mathrm{x}{=}\text{一郎})$$

$$\forall \mathrm{x}(\neg\text{男}(\mathrm{x}) \leftarrow \mathrm{x}{=}\text{花子})$$

$$\forall \mathrm{x}(\text{女}(\mathrm{x}) \leftarrow \mathrm{x}{=}\text{花子})$$

$$\forall \mathrm{x}(\neg\text{女}(\mathrm{x}) \leftarrow \mathrm{x}{=}\text{太郎} \vee \mathrm{x}{=}\text{一郎})$$

が与えられている場合を考える．これらの集合を Γ_1 とおく．G として $\neg\exists \mathrm{y}\,\text{父}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ をとる．この論理式は x が誰の父でもないことを表している．

以下では，次の 2 つの等式を適宜用いる．

$$\mathrm{x}{=}\text{太郎} \vee \mathrm{x}{=}\text{一郎} \vee \mathrm{x}{\neq}\text{花子} \equiv_{3E(\Sigma)} \mathrm{x}{\neq}\text{花子}$$

$$(\mathrm{x}{=}\text{太郎} \vee \mathrm{x}{=}\text{一郎}) \wedge \mathrm{x}{\neq}\text{花子} \equiv_{3E(\Sigma)} \mathrm{x}{=}\text{太郎} \vee \mathrm{x}{=}\text{一郎}$$

Γ_1 に対応する定理 8 の述語の置換は，各述語を次のように置き換えるものになる．

父(x, y)：

$$\text{親}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \wedge \text{男}(\mathrm{x}))$$

正に現れる 親(x, y)：

$$(\mathrm{x}{=}\text{太郎} \vee \mathrm{x}{=}\text{花子}) \wedge \mathrm{y}{=}\text{一郎})$$

負に現れる 親(x, y)：

$$\mathbf{t}$$

正に現れる 男(x)：

$$(\mathrm{x}{=}\text{太郎} \vee \mathrm{x}{=}\text{一郎}) \wedge \neg(\mathrm{x}{=}\text{花子}) \equiv_{3E(\Sigma)} \mathrm{x}{=}\text{太郎} \vee \mathrm{x}{=}\text{一郎}$$

負に現れる 男(x)：

$$(\mathrm{x}{=}\text{太郎} \vee \mathrm{x}{=}\text{一郎}) \vee \neg(\mathrm{x}{=}\text{花子}) \equiv_{3E(\Sigma)} \mathrm{x}{\neq}\text{花子}$$

正に現れる 女(x)：

$$\mathrm{x}{=}\text{花子} \wedge \neg(\mathrm{x}{=}\text{太郎} \vee \mathrm{x}{=}\text{一郎}) \equiv_{3E(\Sigma)} \mathrm{x}{=}\text{花子}$$

負に現れる 女(x)：

$$\mathrm{x}{=}\text{花子} \vee \neg(\mathrm{x}{=}\text{太郎} \vee \mathrm{x}{=}\text{一郎}) \equiv_{3E(\Sigma)} \neg(\mathrm{x}{=}\text{太郎} \vee \mathrm{x}{=}\text{一郎})$$

このように置き換える述語の置換を Θ とおく．

$\Pi = \{\,\mathbf{u}/\text{親},\ \mathbf{u}/\text{父},\ \mathbf{u}/\text{男},\ \mathbf{u}/\text{女} \mid \mathrm{x},\mathrm{y}\,\}$ とおく．

定理 8 によると，

$$E(\Sigma),\ \Gamma_1 \models \neg\exists \mathrm{y}\,\text{父}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \qquad (8)$$

が成り立つ x を知りたい時には，$\neg\exists \mathrm{y}\,\text{父}(\mathrm{x},\mathrm{y})\Theta^n\Pi$ が $E(\Sigma)$ の下で真になるような n と x を求めれば良い．

$G = \neg\exists \mathrm{y}\,\text{父}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ とおいて $\Theta^n\Pi$ で実際に展開すると

$$G\Theta^0\Pi = \neg\exists \mathrm{y}\,\text{父}(\mathrm{x},\mathrm{y})\Pi = \mathbf{u}$$

$$G\Theta^1\Pi = \neg\exists \mathrm{y}(\text{親}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \wedge \text{男}(\mathrm{x}))\Pi = \mathbf{u}$$

$$G\Theta^2\Pi = \neg\exists \mathrm{y}(\mathbf{t} \wedge \mathrm{x}{\neq}\text{花子})\Pi \equiv_3 \mathrm{x}{=}\text{花子}$$

となる．つまり，x = 花子 は (8) の解であることが分かる．

また，$n \geq 2$ ならば $G\Theta^n\Pi \equiv_3 \mathrm{x}{=}\text{花子}$ なので，この方法で (8) の解だと分かるものは，x = 花子 だけである．

つまり，Γ_1^* で Γ_1 の完備化を，$\Gamma_1^{*\mathbf{u}}$ で Γ_1^* の簡略化を表すと，定理 8 より，(8) の解のうちの

$$E(\Sigma),\ \Gamma_1^* \models \neg\exists \mathrm{y}\,\text{父}(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

や

$$E(\Sigma),\ \Gamma_1^{*\mathbf{u}} \models \neg\exists \mathrm{y}\,\text{父}(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

の解は，x = 花子 だけであることが分かる．

なお，Γ_1^* は

$$\forall \mathrm{x}\forall \mathrm{y}(\text{父}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \Leftrightarrow \text{親}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \wedge \text{男}(\mathrm{x}))$$

$$\forall \mathrm{x}\forall \mathrm{y}(\text{親}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \Leftrightarrow ((\mathrm{x}{=}\text{太郎} \vee \mathrm{x}{=}\text{花子}) \wedge \mathrm{y}{=}\text{一郎}) \vee \text{親}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$

$$\forall \mathrm{x}(\text{男}(\mathrm{x}) \Leftrightarrow (\mathrm{x}{=}\text{太郎} \vee \mathrm{x}{=}\text{一郎} \vee \text{男}(\mathrm{x})) \wedge (\mathrm{x}{\neq}\text{花子} \vee \neg\text{男}(\mathrm{x})) \wedge \mathrm{x}{\neq}\text{花子})$$

$$\forall \mathrm{x}(\text{女}(\mathrm{x}) \Leftrightarrow (\mathrm{x}{=}\text{花子} \vee \text{女}(\mathrm{x})) \wedge (\neg(\mathrm{x}{=}\text{太郎} \vee \mathrm{x}{=}\text{一郎}) \vee \neg\text{女}(\mathrm{x})) \wedge \neg(\mathrm{x}{=}\text{太郎} \vee \mathrm{x}{=}\text{一郎}))$$

であり，$\Gamma_1^{*\mathbf{u}}$ は

$$\forall \mathrm{x}\forall \mathrm{y}(\text{父}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \Leftrightarrow \text{親}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \wedge \text{男}(\mathrm{x}))$$

$$\forall \mathrm{x}\forall \mathrm{y}(\text{親}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \Leftrightarrow ((\mathrm{x}{=}\text{太郎} \vee \mathrm{x}{=}\text{花子}) \wedge \mathrm{y}{=}\text{一郎}) \vee \mathbf{u})$$

$$\forall \mathrm{x}(\text{男}(\mathrm{x}) \Leftrightarrow (\mathrm{x}{=}\text{太郎} \vee \mathrm{x}{=}\text{一郎} \vee \mathbf{u})$$

$\wedge$x≠花子)
$\forall$x(女(x)$\Leftrightarrow$(x=花子$\vee$**u**)
$\wedge\neg$(x=太郎$\vee$x=一郎))
である．

6 完備化の応用

本章では，前章の証明手続きの改良について述べる．

Q_i^+ と Q_i^- を次の (A), (B) どちらかで定義する．

(A) $Q_i^+ = P_i^+,\quad Q_i^- = P_i^- \wedge \neg P_i^+$

(B) $Q_i^+ = P_i^+ \wedge \neg P_i^-,\quad Q_i^- = P_i^-$

$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{Q}^+)$ と $\forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{Q}^-)$ に定理 8 を適用すると次の定理が得られる．

定理 9 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{Q}^+ \vee \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) \wedge (\neg \boldsymbol{Q}^- \vee \neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) \wedge (\boldsymbol{Q}^+ \vee \neg \boldsymbol{Q}^-)$ とおく．G を任意の閉論理式とする．次の 2 つは同値である．

$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}) \models_3 G$

$\exists n \ s.t.\ E(\Sigma) \models_3 G\{\boldsymbol{Q}^+/\boldsymbol{p};\ \neg \boldsymbol{Q}^-/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$

また，この 2 つが成り立つならば次の式が成り立つ．

$E_p(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{Q}^+), \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{Q}^-) \models G$

系 10 定理において，前半の 2 式が成り立つならば，次の式が成り立つ．

$E_p(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^+), \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^-) \models G$

証明：

Q_i^+, Q_i^- が (A), (B) どちらで定義されていても，$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow P_i^+)$ と $\forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow P_i^-)$ のモデルは，それぞれ $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow Q_i^+)$ と $\forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow Q_i^-)$ のモデルになるから． □

なお，Q_i^+, Q_i^- が (A), (B) どちらで定義されているかにより，次の等式のどちらかが成り立つ．

(A) $Q_i \equiv_3 P_i^+ \vee (\neg P_i^- \wedge p_i(\boldsymbol{x}))$

(B) $Q_i \equiv_3 \neg P_i^- \wedge (P_i^+ \vee p_i(\boldsymbol{x}))$

6.1 前章の結果との比較

本節では

$\Gamma_P = \{\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^+), \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^-)\}$

$\Theta_P = \{\boldsymbol{P}^+ \wedge \neg \boldsymbol{P}^-/\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{P}^+ \vee \neg \boldsymbol{P}^-/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$

$\Gamma_Q = \{\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{Q}^+), \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{Q}^-)\}$

$\Theta_Q = \{\boldsymbol{Q}^+/\boldsymbol{p};\ \neg \boldsymbol{Q}^-/\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{x}\}$

とおく．

$\boldsymbol{P}^+ \wedge \neg \boldsymbol{P}^- \preceq^{\mathbf{t}} \neg \boldsymbol{Q}^+$ かつ $\boldsymbol{P}^+ \vee \neg \boldsymbol{P}^- \preceq^{\mathbf{f}} \neg \boldsymbol{Q}^-$ なので，補題 3 を用いて定理 8 と定理 9 を次のようにまとめることができる．

$$
\begin{aligned}
& E(\Sigma),\ \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}) \models_3 G \\
\Longleftrightarrow\ & \exists n \ s.t.\ E(\Sigma) \models_3 G\Theta_P^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\} \qquad (9) \\
\Longrightarrow\ & E(\Sigma),\ \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}) \models_3 G \\
\Longleftrightarrow\ & \exists n \ s.t.\ E(\Sigma) \models_3 G\Theta_Q^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\} \qquad (10) \\
\Longrightarrow\ & E_p(\Sigma),\ \Gamma_Q \models G \qquad (11) \\
\Longrightarrow\ & E_p(\Sigma),\ \Gamma_P \models G \qquad (12)
\end{aligned}
$$

つまり，前節の証明手続き (9) で証明可能な論理式は本節の証明手続き (10) でも必ず証明できる．しかし，(10) では証明可能だが (9) では証明できない論理式が存在する．その例を節 6.3 で述べる．

また，(9) や (10) で証明可能な論理式は (11) の論理的帰結でしかなく，本稿の主題である (12) の論理的帰結の中には (11) の論理的帰結ではないものが存在する．この例は節 7.1 で述べる．

6.2 $P_i^- = \mathbf{f}$ と $P_i^- = \neg P_i^+$ の場合

$p_i(\boldsymbol{x})$ の否定条件が与えられていない場合には，つまり $P_i^- = \mathbf{f}$ の場合には

$P_i^+ \wedge \neg P_i^- \equiv_3 P_i^+ \wedge \mathbf{t} \equiv_3 P_i^+$

$P_i^- \wedge \neg P_i^+ \equiv_3 \mathbf{f} \wedge \neg P_i^+ \equiv_3 \mathbf{f} = P_i^-$

だから，Q_i^+ と Q_i^- を (A) と (B) のどちらで定義しても，$Q_i^+ \equiv_3 P_i^+$ と $Q_i^- \equiv_3 P_i^-$ が成り立つ．

すなわち，本章の証明手続きは前章のものと一致する．

また，$p_i(\boldsymbol{x})$ の必要十分条件

$\forall \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow P_i^+)$

が与えられている場合，すなわち $P_i^- = \neg P_i^+$ の場合には，

$P_i^- \wedge \neg P_i^+ = P_i^- \wedge P_i^- \equiv_3 P_i^-$

$P_i^+ \wedge \neg P_i^- \equiv_3 P_i^+ \wedge \neg\neg P_i^+ \equiv_3 P_i^+$

だから，Q_i^+ と Q_i^- を (A) と (B) のどちらで定義しても，$Q_i^+ \equiv_3 P_i^+$ と $Q_i^- \equiv_3 P_i^-$ が成り立つ．

従って，この場合も本章と前章の証明手続きは一致する．

6.3 例

ここでは，本章の証明手続きでは証明できるが，前章の証明手続きでは証明できない論理的帰結の例について述べる．

述語の条件として，次の 6 つの論理式

$\forall$x$\forall$y(父(x, y)$\leftrightarrow$親(x, y)$\wedge$男(x))
$\forall$x$\forall$y(親(x, y)$\leftarrow$
(x=太郎$\vee$x=花子)$\wedge$y=一郎)
$\forall$x(男(x)$\leftarrow$x=太郎$\vee$x=一郎)

$$\forall \mathrm{x}(\neg 男(\mathrm{x}) \leftarrow 女(\mathrm{x})))$$
$$\forall \mathrm{x}(女(\mathrm{x}) \leftarrow \mathrm{x}=花子)$$
$$\forall \mathrm{x}(\neg 女(\mathrm{x}) \leftarrow 男(\mathrm{x}))$$

が与えられている場合を考える．これらからなる集合を Γ_2 とおく．G として $\neg\exists \mathrm{y}父(\mathrm{x},\mathrm{y})$ をとる．

本章の証明手続きに現れる Q_i^+ と Q_i^- のうち，男(x) と 女(x) に対応するものを (A) の方法で定義してみる．この場合，定理 9 の述語の置換は

$$\begin{aligned}\{\quad & 親(\mathrm{x},\mathrm{y})\wedge 男(\mathrm{x})/父,\\ & ((\mathrm{x}=太郎\vee \mathrm{x}=花子)\wedge \mathrm{y}=一郎)/親,\\ & (\mathrm{x}=太郎\vee \mathrm{x}=一郎)/男,\\ & \mathrm{x}=花子/女\,;\\ & 親(\mathrm{x},\mathrm{y})\wedge 男(\mathrm{x})/父,\\ & \mathbf{t}/親,\\ & (\mathrm{x}=太郎\vee \mathrm{x}=一郎)\vee\neg 女(\mathrm{x})/男,\\ & \mathrm{x}=花子\vee\neg 男(\mathrm{x})/女 \quad \mid \mathrm{x},\mathrm{y}\}\end{aligned}$$

となる．これを Θ_1 とおく．

$\Pi = \{\,\mathbf{u}/親,\ \mathbf{u}/父,\ \mathbf{u}/男,\ \mathbf{u}/女 \mid \mathrm{x},\mathrm{y}\,\}$ とおく．

$G = \neg\exists \mathrm{y}父(\mathrm{x},\mathrm{y})$ を $\Theta^n\Pi$ で展開すると

$$\begin{aligned}G\Theta_1^0\Pi &= \neg\exists \mathrm{y}父(\mathrm{x},\mathrm{y})\Pi = \mathbf{u}\\ G\Theta_1^1\Pi &= \neg\exists \mathrm{y}(親(\mathrm{x},\mathrm{y})\wedge 男(\mathrm{x}))\Pi = \mathbf{u}\\ G\Theta_1^2\Pi &= \neg\exists \mathrm{y}(\mathbf{t}\wedge((\mathrm{x}=太郎\vee \mathrm{x}=一郎)\\ &\qquad\vee\neg 女(\mathrm{x})))\Pi\\ &\equiv_{3E(\Sigma)} \neg(\mathrm{x}=太郎\vee \mathrm{x}=一郎)\wedge 女(\mathrm{x})\Pi\\ &\not\equiv_3 \mathbf{t}\\ G\Theta_1^3\Pi &= \neg\exists \mathrm{y}(\mathbf{t}\wedge((\mathrm{x}=太郎\vee \mathrm{x}=一郎)\\ &\qquad\vee\neg(\mathrm{x}=花子)))\Pi\\ &\equiv_{3E(\Sigma)} \neg(\mathrm{x}=太郎\vee \mathrm{x}=一郎)\wedge \mathrm{x}=花子\\ &\equiv_{3E(\Sigma)} \mathrm{x}=花子\\ G\Theta_1^4\Pi &\equiv_{3E(\Sigma)} \mathrm{x}=花子\\ &\vdots\end{aligned}$$

となる．

従って，定理 9 より $\mathrm{x} = 花子$ は

$$E_p(\Sigma),\Gamma_2 \models G \tag{13}$$

の解である．また，この方法で求められる (13) の解は $\mathrm{x} = 花子$ だけである．

一方，前章で述べた方法では (13) の解を求められないことは，次のようにして確認できる．

Γ_2 の完備化の簡約化は

$$\begin{aligned}&\forall \mathrm{xy}(父(\mathrm{x},\mathrm{y})\Leftrightarrow 親(\mathrm{x},\mathrm{y})\wedge 男(\mathrm{x}))\\ &\forall \mathrm{xy}(親(\mathrm{x},\mathrm{y})\Leftrightarrow\\ &\quad((\mathrm{x}=太郎\vee \mathrm{x}=花子)\wedge \mathrm{y}=一郎)\vee\mathbf{u})\\ &\forall \mathrm{x}(男(\mathrm{x})\Leftrightarrow\\ &\quad(((\mathrm{x}=太郎\vee \mathrm{x}=一郎)\wedge\neg 女(\mathrm{x}))\vee\mathbf{u})\\ &\qquad\wedge((\mathrm{x}=太郎\vee \mathrm{x}=一郎)\vee\neg 女(\mathrm{x})))\\ &\forall \mathrm{x}(女(\mathrm{x})\Leftrightarrow((\mathrm{x}=花子\wedge\neg 男(\mathrm{x}))\vee\mathbf{u})\\ &\qquad\wedge(\mathrm{x}=花子\vee\neg 男(\mathrm{x})))\end{aligned}$$

となる．これを Γ_2^* とおく．

$E(\Sigma)\cup\Gamma_2^*$ のモデルとして，女(花子)，男(花子)，父(花子, 一郎) の真理値が $\mathbf{u}$ になるものが存在するので，$\mathrm{x} = 花子$ は

$$E(\Sigma),\Gamma_2^* \models_3 G$$

の解ではない．つまり，前章の証明手続きでは (13) の解を求めることができない．

また，このことは，以下のように G を実際に展開することによっても確認できる．

前章の証明手続きで用いられる述語の置換は

$$\begin{aligned}\{\quad & 親(\mathrm{x},\mathrm{y})\wedge 男(\mathrm{x})/父,\\ & ((\mathrm{x}=太郎\vee \mathrm{x}=花子)\wedge \mathrm{y}=一郎)/親,\\ & (\mathrm{x}=太郎\vee \mathrm{x}=一郎)\wedge\neg 女(\mathrm{x})/男,\\ & \mathrm{x}=花子\wedge\neg 男(\mathrm{x})/女\,;\\ & 親(\mathrm{x},\mathrm{y})\wedge 男(\mathrm{x})/父,\\ & \mathbf{t}/親,\\ & (\mathrm{x}=太郎\vee \mathrm{x}=一郎)\vee\neg 女(\mathrm{x})/男,\\ & \mathrm{x}=花子\vee\neg 男(\mathrm{x})/女 \quad \mid \mathrm{x},\mathrm{y}\}\end{aligned}$$

である．これを Θ_2 とおく．

$G = \neg\exists \mathrm{y}父(\mathrm{x},\mathrm{y})$ を $\Theta_2^n\Pi$ で展開すると

$$\begin{aligned}G\Theta_2^0\Pi &= \neg\exists \mathrm{y}父(\mathrm{x},\mathrm{y})\Pi = \mathbf{u}\\ G\Theta_2^1\Pi &= \neg\exists \mathrm{y}(親(\mathrm{x},\mathrm{y})\wedge 男(\mathrm{x}))\Pi = \mathbf{u}\\ G\Theta_2^2\Pi &= \neg\exists \mathrm{y}(\mathbf{t}\wedge((\mathrm{x}=太郎\vee \mathrm{x}=一郎)\\ &\qquad\vee\neg 女(\mathrm{x})))\Pi\\ &\equiv_{3E(\Sigma)} \neg(\mathrm{x}=太郎\vee \mathrm{x}=一郎)\wedge 女(\mathrm{x})\Pi\\ &\not\equiv_3 \mathbf{t}\\ G\Theta_2^3\Pi &= \neg\exists \mathrm{y}(\mathbf{t}\wedge((\mathrm{x}=太郎\vee \mathrm{x}=一郎)\\ &\qquad\vee\neg(\mathrm{x}=花子\vee\neg 男(\mathrm{x}))))\Pi\\ &\equiv_{3E(\Sigma)} \neg(\mathrm{x}=太郎\vee \mathrm{x}=一郎)\wedge \mathrm{x}=花子\\ &\qquad\wedge\neg 男(\mathrm{x})\Pi\\ &\not\equiv_3 \mathbf{t}\\ G\Theta_2^4\Pi &\equiv_{3E(\Sigma)} \neg(\mathrm{x}=太郎\vee \mathrm{x}=一郎)\wedge \mathrm{x}=花子\\ &\qquad\wedge 女(\mathrm{x})\Pi\\ &\not\equiv_3 \mathbf{t}\\ G\Theta_2^5\Pi &\equiv_{3E(\Sigma)} \neg(\mathrm{x}=太郎\vee \mathrm{x}=一郎)\wedge \mathrm{x}=花子\\ &\qquad\wedge\neg 男(\mathrm{x})\Pi\\ &\equiv_{3E(\Sigma)} G\Theta_2^3\Pi \not\equiv_3 \mathbf{t}\\ G\Theta_2^6\Pi &\equiv_{3E(\Sigma)} G\Theta_2^4\Pi \not\equiv_3 \mathbf{t}\\ &\vdots\end{aligned}$$

となる．つまり，x にどんな項を代入しても

$$\exists n\ s.t.\ E(\Sigma) \models_3 G\Theta^n\Pi$$

は成り立たないので，この手続きでは

$$E_p(\Sigma), \Gamma_2 \models G$$

の解を求めることはできない．

7 Kunen の定理の拡張

前章の定理 9 とその系 10 から，$\boldsymbol{P}^+$ と $\boldsymbol{P}^-$ が特別な形の場合には

$$E(\Sigma), \Gamma^* \models_3 G$$

と

$$\exists n\ s.t.\ E(\Sigma) \models_3 \{\boldsymbol{P}^+/\boldsymbol{p};\ \neg\boldsymbol{P}^-/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$$

が同値であり，かつ，これらが成り立つならば

$$E_p(\Sigma), \forall\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^+), \forall\boldsymbol{x}(\neg\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^-) \models G$$

が成り立つような，述語定義 Γ^* が存在することが分かる．

そこで，一般の $\boldsymbol{P}^+$，$\boldsymbol{P}^-$ に対しても同様な Γ^* が存在しないかという疑問が生じるが，前章までの考察から Γ^* として述語定義をとることはできないと我々は判断した．

本章では，新しい結合記号 $\Leftarrow$ を用いて Γ^* をつくり，Kunen の定理を拡張する．

定理 11 G を任意の閉論理式とする．

$$E(\Sigma) \cup \{\,\forall\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftarrow \boldsymbol{P}^+), \forall\boldsymbol{x}(\neg\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftarrow \boldsymbol{P}^-)\,\}$$

のモデルが存在するならば，次の 2 つは同値である．

$$E(\Sigma), \forall\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftarrow \boldsymbol{P}^+), \forall\boldsymbol{x}(\neg\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftarrow \boldsymbol{P}^-) \models_3 G$$

$$\exists n\ s.t.\ E(\Sigma) \models_3 G\{\boldsymbol{P}^+/\boldsymbol{p};\ \neg\boldsymbol{P}^-/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$$

また，この 2 つが成り立つならば次の式が成り立つ．

$$E_p(\Sigma), \forall\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^+), \forall\boldsymbol{x}(\neg\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leftarrow \boldsymbol{P}^-) \models G$$

証明：

前半を幾つかの補題と定理に分けて証明する．

後半は，2 値の意味と 3 値の意味の関係より成り立つ．

以下では，

$$\Theta = \{\boldsymbol{P}^+/\boldsymbol{p};\ \neg\boldsymbol{P}^-/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}$$
$$\overline{\Theta} = \{\neg\boldsymbol{P}^-/\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{P}^+/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}$$

とおく．

補題 12 G を任意の閉論理式とする．

$$\exists n\ s.t.\ E(\Sigma) \models_3 G\{\boldsymbol{P}^+/\boldsymbol{p};\ \neg\boldsymbol{P}^-/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$$

ならば

$$E(\Sigma), \forall\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftarrow \boldsymbol{P}^+), \forall\boldsymbol{x}(\neg\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftarrow \boldsymbol{P}^-) \models_3 G$$

が成り立つ．

証明：

補題 1 より成り立つ． □□

系 13 $\Theta = \{\boldsymbol{P}^+/\boldsymbol{p};\ \neg\boldsymbol{P}^-/\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{x}\}$ とおく．

$$E(\Sigma) \cup \{\,\forall\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftarrow \boldsymbol{P}^+), \forall\boldsymbol{x}(\neg\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftarrow \boldsymbol{P}^-)\,\}$$

のモデルが存在するならば，任意の n に対して

$$E(\Sigma) \not\models_3 \exists\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \wedge \neg\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\Theta^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$$

が成り立つ．

定理 14 M を 3 値の解釈とする．任意の $p_i(\boldsymbol{x})$ と n に対して

$$M[\![\exists\boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \wedge \neg p_i(\boldsymbol{x}))\Theta^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}]\!] \neq \mathbf{t}$$

が成り立つならば，ある解釈 M_Γ^* が存在して，任意の閉論理式 ϕ に対して次の 2 つが成り立つ．

$$M_\Gamma^*[\![\phi]\!] = \mathbf{t} \iff \exists n\ s.t.\ M[\![\phi\Theta^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}]\!] = \mathbf{t}$$
$$M_\Gamma^*[\![\phi]\!] = \mathbf{f} \iff \exists n\ s.t.\ M[\![\phi\overline{\Theta}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}]\!] = \mathbf{f}$$

証明：

M に対して定理 5 の M^* をとる．

$p_i(\boldsymbol{x})$ を任意にとる．本定理の仮定と定理 5 の 1 つ目の性質より，任意の n に対して

$$M^*[\![\exists\boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \wedge \neg p_i(\boldsymbol{x}))\Theta^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}]\!] \neq \mathbf{t}$$

が成り立つ．このことと，$p_i(\boldsymbol{x})\Theta^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$ および $p_i(\boldsymbol{x})\overline{\Theta}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$ は increasing chain であることから，任意の変数割り当て V^* に対して

$$\exists n\ s.t.\ M^*[\![p_i(\boldsymbol{x})\Theta^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}]\!]_{V^*} = \mathbf{t}$$
$$\exists n\ s.t.\ M^*[\![p_i(\boldsymbol{x})\overline{\Theta}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}]\!]_{V^*} = \mathbf{f}$$

の少なくとも一方は成り立たない．

また，P_j^+ と P_j^- の自由変数は $p_j(\boldsymbol{x})$ の自由変数だけなので，$p_i(\boldsymbol{x})\Theta^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$ と $p_i(\boldsymbol{x})\overline{\Theta}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$ の自由変数は $\boldsymbol{x}$ だけである．従って，これらの真理値は $\boldsymbol{x}$ に割り当てられる元にだけ依存する．

ゆえに，解釈 M_Γ^* を次のように定義できる．

- 領域は M^* と同じ
- $\boldsymbol{p}$ 以外の記号 s に対して
$$M_\Gamma^*\langle s\rangle = M^*\langle s\rangle$$
- 各 p_i には次の述語 $M^*\langle p_i\rangle$ を割り当てる
$$M_\Gamma^*\langle p_i\rangle(\boldsymbol{d}^*) = \mathbf{t} \iff \exists n\ s.t.\ M^*[\![p_i(\boldsymbol{x})\Theta^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}]\!]_{[\boldsymbol{d}^*/\boldsymbol{x}]} = \mathbf{t}$$
$$M_\Gamma^*\langle p_i\rangle(\boldsymbol{d}^*) = \mathbf{f} \iff \exists n\ s.t.\ M^*[\![p_i(\boldsymbol{x})\overline{\Theta}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}]\!]_{[\boldsymbol{d}^*/\boldsymbol{x}]} = \mathbf{f}$$
$$M_\Gamma^*\langle p_i\rangle(\boldsymbol{d}^*) = \mathbf{u} \iff \text{その他の場合}$$

ϕ を論理式とすると $\phi\Theta^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$ と $\phi\overline{\Theta}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$ は increasing chain になることと，M^* に関する定理 5 の 2 つ目の性質から，任意の変数割り当て V^* と任意の論理式 ϕ に対して次の 2 つが成り立つ．

$$M_\Gamma^*[\![\phi]\!]_{V^*} = \mathbf{t} \iff \exists n\ s.t.\ M^*[\![\phi\Theta^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}]\!]_{V^*} = \mathbf{t}$$

$$M_\Gamma^*[\![\phi]\!]_{V^*} = \mathbf{f} \iff \exists n\ s.t.\ M^*[\![\phi\overline{\Theta}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}]\!]_{V^*} = \mathbf{f}$$

特に ϕ が閉論理式の場合には

$$\begin{aligned} M_\Gamma^*[\![\phi]\!] = \mathbf{t} &\iff \exists n\ s.t.\ M^*[\![\phi\Theta^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}]\!] = \mathbf{t} \\ &\iff \exists n\ s.t.\ M[\![\phi\Theta^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}]\!] = \mathbf{t} \\ M_\Gamma^*[\![\phi]\!] = \mathbf{f} &\iff \exists n\ s.t.\ M^*[\![\phi\overline{\Theta}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}]\!] = \mathbf{f} \\ &\iff \exists n\ s.t.\ M[\![\phi\overline{\Theta}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}]\!] = \mathbf{f} \end{aligned}$$

となり，定理は成り立つ． □□

系 15 M_Γ^* は

$$\{\,\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftarrow \boldsymbol{P}^+), \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftarrow \boldsymbol{P}^-)\,\}$$

のモデル．

補題 16 M が $E(\Sigma)$ のモデルならば，M_Γ^* は

$$E(\Sigma) \cup \{\,\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftarrow \boldsymbol{P}^+), \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftarrow \boldsymbol{P}^-)\,\}$$

のモデル．

証明：

$E(\Sigma)$ の論理式は $\boldsymbol{p}$ を含まない閉論理式だから． □

定理 17

$$E(\Sigma) \cup \{\,\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftarrow \boldsymbol{P}^+), \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftarrow \boldsymbol{P}^-)\,\}$$

のモデルが存在すると仮定し，G を任意の閉論理式とする．

$$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftarrow \boldsymbol{P}^+), \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftarrow \boldsymbol{P}^-) \models_3 G$$

ならば

$$\exists n\ s.t.\ E(\Sigma) \models_3 G\{\boldsymbol{P}^+/\boldsymbol{p};\ \neg\boldsymbol{P}^-/\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{x}\}^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$$

が成り立つ．

証明：

$E(\Sigma)$ のモデル M を任意にとる．系 13 と $E(\Sigma)$ の完全性より，任意の $p_i(\boldsymbol{x})$ と n に対して

$$M[\![\exists \boldsymbol{x}(p_i(\boldsymbol{x}) \wedge \neg p_i(\boldsymbol{x}))\Theta^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}]\!] \neq \mathbf{t}$$

が成り立つ．従って，定理 14 の M_Γ^* をとることができ，系 16 より M_Γ^* は

$$E(\Sigma) \cup \{\,\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftarrow \boldsymbol{P}^+), \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftarrow \boldsymbol{P}^-)\,\}$$

のモデルである．

従って，定理 14 より

$$E(\Sigma), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftarrow \boldsymbol{P}^+), \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \Leftarrow \boldsymbol{P}^-) \models_3 G$$

が成り立つ任意の閉論理式 G に対して，

$$\exists n\ s.t.\ M[\![G\Theta^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}]\!] = \mathbf{t}$$

が成り立つが，$E(\Sigma)$ は完全だから，

$$\exists n\ s.t.\ E(\Sigma) \models_3 G\Theta^n\{\boldsymbol{u}/\boldsymbol{p}\}$$

が成り立つ． □□

定理 11 の証明の続き：

補題 12 と定理 17 より，定理 11 の前半が証明された． □

なお，定理 11 の証明で用いられた $E(\Sigma)$ の性質は，完全性と $\boldsymbol{p}$ を含まない閉論理式の集合であることだけである．つまり，定理 11 の $E(\Sigma)$ を，完全な $\boldsymbol{p}$ を含まない閉論理式の集合 Δ に置き換えることができる．

また，$E(\Sigma)$ には $\boldsymbol{p}$ が現れないという性質は，補題 16 の証明でのみ用いた．この補題は $E(\Sigma)$ を $E_p(\Sigma)$ に置き換えても成り立つので，定理 11 の $E(\Sigma)$ を $E_p(\Sigma)$ に置き換えることができる．

7.1 例

述語の条件として，次の 4 つの論理式

∀x(男(x) ← x=太郎 ∨ x=一郎 ∨ 未知の男(x))
∀x(¬男(x) ← 女(x) ∨ 男ではない(x)))
∀x(女(x) ← x=花子)
∀x(¬女(x) ← 男(x))

が与えられている場合を考える．

述語「未知の男(x)」と「男ではない(x)」に関する条件が与えられていないので，この場合には

∀x(未知の男(x) ← $\mathbf{f}$)
∀x(¬未知の男(x) ← $\mathbf{f}$)
∀x(男ではない(x) ← $\mathbf{f}$)
∀x(¬男ではない(x) ← $\mathbf{f}$)

が与えられているものとして扱う．以上の 8 つの論理式からなる集合を Γ_3 とおく．G として 男(太郎) ∧ ¬男(花子) をとる．

本章の証明手続きで用いる述語の置換は

{ (x=太郎 ∨ x=一郎 ∨ 未知の男(x))/男,
x=花子/女,
$\mathbf{f}$/未知の男,
$\mathbf{f}$/男ではない；
¬(女(x) ∨ 男ではない(x))/男,
¬男(x)/女,
$\mathbf{t}$/未知の男,
$\mathbf{t}$/男ではない | x, y}

である．これを Θ とおく．

G を $\Theta^n\Pi$ で展開すると

$G\Theta^0\Pi$ = (男(太郎) ∧ ¬男(花子))Π $\equiv_3 \mathbf{u}$

$G\Theta^1\Pi$ = ((太郎=太郎 ∨ 太郎=一郎 ∨ 未知の男(太郎)) ∧ ¬¬(女(花子) ∨ 男ではない(花子)))Π $\equiv_{3E(\Sigma)} \mathbf{u}$

$G\Theta^2\Pi$ = ((太郎=太郎 ∨ 太郎=一郎 ∨ $\mathbf{f}$) ∧ ¬¬(花子=花子 ∨ $\mathbf{f}$))Π $\equiv_{3E(\Sigma)} \mathbf{t}$

となる．

以上のように，G は $E(\Sigma)\cup\Gamma_3$ の論理的帰結であることを本章の手続きを用いて証明できる．

しかし，前章の証明手続きでは G を証明できない．

例えば，各述語に対する Q_i^+ と Q_i^- を (A) の方法で定義すると，前章の証明手続きで用いる述語の置換は

$$
\{\begin{array}{l}
\mathrm{x}=太郎\vee\mathrm{x}=一郎\vee未知の男(\mathrm{x})/男,\\
\mathrm{x}=花子/女,\\
\mathbf{f}/未知の男,\\
\mathbf{f}/男ではない;\\
(\mathrm{x}=太郎\vee\mathrm{x}=一郎\vee未知の男(\mathrm{x}))\\
\quad\vee\neg(女(\mathrm{x})\vee男ではない(\mathrm{x}))/男,\\
\mathrm{x}=花子\vee\neg男(\mathrm{x})/女,\\
\mathbf{t}/未知の男,\\
\mathbf{t}/男ではない \quad |\ \mathrm{x},\mathrm{y}\}
\end{array}
$$

となる．これを Θ_1 とおき，G を展開すると

$$
\begin{aligned}
G\Theta_1^0\Pi &= 男(太郎)\wedge\neg男(花子)\Pi \equiv_3 \mathbf{u}\\
G\Theta_1^1\Pi &= ((太郎=太郎\vee太郎=一郎\\
&\qquad\vee未知の男(太郎))\\
&\qquad\wedge\neg((花子=太郎\vee花子=一郎\\
&\qquad\qquad\vee未知の男(花子))\\
&\qquad\quad\vee\neg(女(花子)\\
&\qquad\qquad\vee男ではない(花子))))\Pi\\
&\equiv_{3E(\Sigma)} \mathbf{t}\wedge\neg(\mathbf{u}\vee\neg\mathbf{u}) \equiv_3 \mathbf{u}\\
G\Theta_1^2\Pi &= ((太郎=太郎\vee太郎=一郎\vee\mathbf{f})\\
&\qquad\wedge\neg((花子=太郎\vee花子=一郎\vee\mathbf{t}\\
&\qquad\qquad\vee\neg(花子=花子\vee\mathbf{f}))))\Pi\\
&\equiv_{3E(\Sigma)} \mathbf{t}\wedge\neg(\mathbf{t}\vee\neg\mathbf{t}) \equiv_3 \mathbf{f}\\
G\Theta_1^3\Pi &= G\Theta_1^2\Pi \equiv_{3E(\Sigma)} \mathbf{f}\\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

となるので，

$$\exists n\ s.t.\ E(\Sigma) \models_3 G\Theta_1^n\Pi$$

は成り立たない．

Q_i^+ と Q_i^- の定義の方法を変えても同様である．

8 おわりに

本稿では，述語の置換による証明手続きについて考察し，完備化されていない論理式の論理的帰結を証明できるように3つの述語の置換をとった．また，これらによる証明手続きが 3 値の意味で健全かつ完全になる論理プログラムを明らかにし，それらの証明能力の強さを比較した．

1つ目の述語の置換は，元の論理プログラムと 2 値の意味で同値な完備プログラムから導かれ，これによる証明手続きの能力は3つの中では最も低い．2つ目の述語の置換は，1つ目を改良したものであり，元の論理プログラムを一旦変形してから，1つ目と同じ方法を用いて導かれる．この述語の置換による証明手続きの能力は1つ目のものよりも高い．以上の2つは，述語の置換を導く途中で現れる完備プログラムの 3 値の意味の論理的帰結を健全かつ完全に証明できる．

3つ目の述語の置換は，完備プログラムを経由せずに Kunen の定理の拡張から導かれ，証明能力は3つの中で最も高い．この手続きは，元のプログラムを新しい結合記号で書き直したプログラムの論理的帰結を健全かつ完全に証明できる．

参考文献

[1] Clark, K. L.: Negation as Failure, *Logic and Databases* (Gallaire, H. and Minker, J.(eds.)), Plenum Press, New York, pp. 293–322 (1978).

[2] Kunen, K.: Negation in Logic Programming, *J. Logic Programming*, Vol. 4, No. 4, pp. 289–308 (1987).

[3] Sato, T.: Quantifier Elimination for Finite and Infinite Trees, Technical Report TR-89-25, Electrotechnical Laboratory, Tsukuba (1989).

[4] 元吉文男, 佐藤泰介: 拡張述語言語 ALL インタプリタの実現, コンピュータソフトウェア, Vol. 8, No. 5, pp. 79–90 (1991).

[5] Motoyoshi, F. and Sato, T.: Implementation of Augmented Logic Language (ALL), *Advances in Software Science and Technology*, Vol. 5, pp. 91–106 (1993).

[6] Shepherdson, J. C.: Negation in Logic Programming, *Foundations of Deductive Databases and Logic Programming* (Minker, J.(ed.)), Morgan Kaufmann, Los Altos, pp. 19–88 (1988).

[7] LLoyd, J. W.: *Foundations of Logic Programming*, Springer-Verlag, 2nd, extended edition (1987).

[8] Chang, C. C. and Keisler, H. J.: *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam, 3rd ed. (1990).

[9] 数学辞典 第3版, 岩波, (1985).