数理解析研究所講究録
1126巻 2000年 14-18

Orientable 3-manifolds fibering over closed surfaces and codimension 2 fibrators

筑波大学 数学系　知念 直紹（Naotsugu Chinen）

1. これまでの経過と結果

$p: M \to B$ をlocally compact ANR 空間の間のproperな写像とする。写像 p が空間 X に対して*approximate homotopy lifting property*（AHLP)を持つとは、任意の B の open cover ε と、$H_0 = p \circ h$ を満たす２つの写像 $h: X \to M$ と $H: X \times [0, 1] \to B$ に対して、写像 $\tilde{H}: X \times [0, 1] \to M$ が存在して $\tilde{H}_0 = h$ を満たし、$p \circ \tilde{H}$ と Hはε-close となるときにいう。properな写像 $p: M \to B$ がすべての空間に対してAHLP を持つとき、写像 pは *approximate fibration*という。[CD1]から、写像$p: M \to B$ が approximate fibration で Bが path-connectedならば、すべてのファイバーはshape 同値になることが知られている。

Mを$(n+k)$-manifold、properな写像 $p: M \to B$ で各 $p^{-1}(x)$ はある closed n-manifold N_xのshape typeをもつとする。[D1]と[D4]から、もし$k \leq 2$ならば、空間Bはk-manifold with (possibly empty) boundaryになることが知られている。$k \leq 2$とき、つぎの問題が考えられる。

Question. いつproperな写像 $p: M \to B$ が approximate fibration になるか?

Daverman は次のような定義を導入した。closed connected n-manifold N が *codimension k fibrator*(あるいは*codimension k orientable fibrator*) であるとは、かってな$(n+k)$-manifold(あるいはorientable)から有限次元な空間 B へのproperな写像 $p: M \to B$で、もし各ファイバーは N とshape 同値ならば、写像 p がapproximate fibrationになるときにいう。この１０年間色々な人々のよって codimension 2 fibratorsは研究されてきた。

１次元球面S^1はcodimension 2 fibratorでないことが知られている。そこで、orientable S^1-bundle over closed surface を調べてみることとした。[D2, Example 6.1]の中で、Daverman はすべての orientable S^1-bundle over the torus T は

codimension 2 fibratorでないことを証明した。もちろん、すべての twisted S^1-bundle over the Klein bottle K はcodimension 2 fibratorでないことは知られている。最初につぎのことを示した。

Propostion 1.1. N をS^1-bundle over the torus T with obstruction bとする。このとき、
ある素数pが存在して、p^2 は b を割る⇔ *cyclic covering* $N \to N$ が存在する。

これは[D2, Corollary 6.3]が間違っていることを示している。またすぐにつぎのことがわかる。

Corollary 1.2. N をS^1-bundle over the torus T with obstruction bとする。もしある素数pが存在してp^2 は b を割れるならば、N はcodimension 2 orientable fibrator でない。

同様な方法から、つぎのことがわかる。

Propostion 1.3. N をS^1-bundle over the Klein bottle K with obstruction b とする。もしbが奇数ならば、*cyclic covering* $N \to N$ が存在する。よって、N は codimension 2 orientable fibratorでない。

郡G が hyperhopfian であるとは、かってな準同型写像 $f: G \to G$ に対して、もし$f(G)$ が正規群で$G/f(G)$ が巡回群ならば、準同型写像 fは同型になるときにいう。

R.Daverman は次の定理を示した。

[D2,Theorem 6.4]. N をNil structure を持つ向き付け可能な 3 次元閉多様体で、S^1-bundle over the torus Tでないとする。このとき、N は hyperhopfian fundamental group をもつ。よってN はcodimension 2 orientable fibrator になる。

P.Scott の結果から、N をS^1-bundle over the Klein bottle K with nonzero obstruction bとすると、N はNil structure を持つことが知られている。よって、このDaverman の結果はまちがっていることを示している。よって、以前示したつぎの結果は重要になる。

Theorem 1.3. N をS^1-bundle over the Klein bottle K with obstruction bと

する。もし$b \neq 0$が偶数ならば、Nは codimension 2 orientable fibratorである。

[D2,Theorem 6.4]が間違っていることにより、もし$b \neq 0$が偶数ならば、Nは hyperhopfian fundamental group をもつことはわからない。よって、つぎの問題が考えられる：NをS^1-bundle over the Klein bottle K with obstruction bとする。もし$b \neq 0$が偶数ならば、Nは codimension 2 fibratorか？

まず最初に次のことを示した。

Theorem 1.4. NをS^1-bundle over the Klein bottle K with obstruction bとする。もし$b=2^r$ならば、Nは codimension 2 fibratorである。

Propostion 1.1 から次の予想が考えられる。

Conjecture 1.5. Nを orientable S^1-bundle over the Klein bottle K with obstruction bとする。
(1) もしすべての素数$p \geq 3$に対してp^2はbを割れないならば、Nは codimension 2 fibratorである。
(2) もしある素数$p \geq 3$に対してp^2はbを割るならば、Nは codimension 2 fibratorでない。

2. 証明の方針

Propostion 1.1の略証明. (⇨) NをS^1-bundle over T with positive obstruction bとし、ある素数pが存在してp^2はbを割るとする。すると$H_1(N)$は$Z \times Z \times Z_b$と同型になることが知られている。まず、2つの全射な準同型$d_1 : Z \to Z_{p^2}$と$d_3 : Z_b \to Z_p$、単射な準同型$k: Z_p \to Z_{p^2}$、trivial な準同型$t: Z \to Z_{p^2}$が存在する。この準同型の合成を$r = d_1 \times t \times (k \circ d_3) : Z \times Z \times Z_b \to Z_{p^2}$とする。この全射を使って、$Ker(r \circ h)$から導かれる$p^2$-1 cyclic covering $\theta : N(1) \to N$が得られる。ここで$h : \pi_1(N) \to H_1(N)$は Hurewicz 準同型とする。あとは、$N(1)$がS^1-bundle over T with obstraction bであることを示せば良い。
(⇦) 省略 □

Propostion 1.2の略証明. Nを orientable S^1-bundle over K with odd obstruction bとする。すると$H_1(N)$は$Z \times Z_4$と同型になることが知られている。

よって、$((p_N)_* \circ h)^{-1}(Z \times 0)$ から導かれる4-1 cyclic covering $\theta : N(1) \to N$が存在する。ここで$h: \pi_1(N) \to H_1(N)$ は Hurewicz 準同型で、$p_N: N \to K$は射影とする。あとは $N(1)$ が orientable S^1-bundle over K with obstraction bであることを示せば良い。 □

Nをclosed orientable manifold とする。proper 写像 $p: M \to B$ が*N-Like*であるとは、各ファイバーがNとshape同値のときにいう。proper 写像 $p: M \to B$ の *mod 2 continuity set* C_p' とは

$C_p' = \{ x \in B : x$の近傍 Uと shape retraction $R: p^{-1}(U) \to p^{-1}(x)$が存在して、すべての$x' \in U$に対して $\deg\{ R| p^{-1}(x') : p^{-1}(x') \to p^{-1}(x)\} = 1 \in Z_2\}$

と定義する。

つぎのLemma がTheorem 1.4の本質的な所である。

Lemma 2.1. N'を orientable S^1-bundle over T with obstruction $4b$、Nを orientable S^1-bundle over the Klein bottle K with obstruction bとする。さらに、すべての素数$p \geq 3$ に対してp^2 は b を割れないとする。もし次の条件を満たすならば、Nは codimension 2 fibratorである。

(☆) もしすべてのorientable 5-manifold からのN'-like 写像$p: M \to B$ で pの mod 2 contiunity set がB と一致するならば、pがapproximate fibration である。

Theorem 1.4の略証明. $b = 2^r$のとき、orientable S^1-bundle N' over T with obstruction $4b$ が Lemma 2.1 の条件(☆)を満たすことを示せば良い。 □

REFERENCES

[C1] N. Chinen, *Finite groups and codimension-2 fibrators*, Topology Appl. To appear.

[C2] N. Chinen, *Manifolds with finite cyclic fundamental groups and codimension 2 fibrators*, Topology Appl. To appear.

[C3] N. Chinen, *Products of manifolds with nonzero Euler characteristic and codimension-2 fibrators*, preprint.

[CD1] D. Coram and P. Duvall, *Approximate fibrations*, Rocky Mountain J. Math. 7 (1977), 275- 288.

[CD2] D. Coram and P. Duvall, *Approximate fibrations and a movability condition for maps*, Pacific J. Math. **72** (1977), 41-56.

[D1] R.J. Daverman, *Submanifold decompositions that induce approximate fibrations*, Topology Appl. **33** (1989), 173-184.

[D2] R.J. Daverman, *3-manifolds with geometric structure and approximate fibrations*, Indiana University Math. J. **40** (1991), 1451-1469.

[D3] R.J. Daverman, *Hyperhopfian and approximate fibrations*, Compositio Math. **86** (1993), 159-176.

[E] D.B.A. Epstein, *The degree of a map*, Proc. London Math. Soc. (3) **16** (1966), 369-383.

[H] J. Hempel, *3-manifolds*, Ann. of Math. Stud., No.86, Princeton Uni. Press, Princeton, NJ, 1976.

[J] W. Jaco, *Lectures on Three Manifolds Topology*, Conference boars of Math., No.43, 1980.

[M] J.R.Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Addison Wesley Publ. Co., New York, 1984.

[MS] S. Mardesic and J. Segal, *Shape theory*, North-Holland Publishers, Amsterdam, 1982.

[S] E.H. Spanier, *Algebraic topology*, (McGraw Hill, New York, 1966).

[Sc] P. Scott, *The geometries of 3-manifolds,* Bull. London Math. Soc. **15** (1983), 147-238.

E-mail : naotsugu@mail.wics.ne.jp