数理解析研究所講究録
1128 巻 2000 年 101-111

ある高階差分方程式の漸近定数問題について

大阪府立大学工学部 松永 秀章 (Hideaki Matsunaga)
大阪府立成城工業高校 荻田 竜三 (Ryuzou Ogita)
徳島大学総合科学部 村上 公一 (Kouichi Murakami)

1. イントロダクション

2 次元の $(k+1)$ 階線形差分方程式

(1) $$x_{n+1}-x_n+A(x_n-x_{n-k})=0, \quad n=0,1,2,\ldots$$

を考える。ここで, $A: 2\times 2-$定数行列, $k\in\mathbf{N}$ で, 初期値を $x_{-k},\ldots,x_0\in\mathbf{R}^2$ とする。今, $\mathbf{R}^2$ 上の各点が (1) の定数解になっていることに注意しておく。

最近, (1) を含むような高階差分方程式の解の漸近挙動が研究されているが, 完全に解決されたとは言い難い ([1], [2])。一方, (1) に対応する時間遅れをもつ微分方程式

(E) $$x'(t)+A(x(t)-x(t-\tau))=0, \qquad (\tau>0)$$

の解の漸近挙動は, Murakami ([3]) によって解決済みである。本研究では, (1) の解の漸近挙動を [3] のように完全に分類することを目標とする。特に, (1) の解がある定点や周期点に漸近する場合, その具体的表現を求める。

さて, 正則行列 P により $x_n=Pu_n$ とおくと (1) は

$$u_{n+1}-u_n+P^{-1}AP(u_n-u_{n-k})=0$$

となるので, 行列 A として以下の場合を考えれば十分である：

$$\text{(I) } A=a\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, \qquad \text{(II) } A=\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}, \qquad \text{(III) } A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}.$$

ただし, $a,\ a_1,\ a_2,\in\mathbf{R},\ 0<|\theta|\le\pi/2$ である。

2. 準備 (拡大系とその一般解)

$y_n \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix}x_{n-k}\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^m$ (ただし, $m=2(k+1)$) と定義すると, (1) は m 次元の拡大系

(2) $$y_{n+1}=\hat{A}y_n, \qquad \hat{A}=\begin{pmatrix}0 & I & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & I\\ A & 0 & \cdots & 0 & I-A\end{pmatrix}$$

に変換される。この拡大系の初期値 y_0 に対する解は,

$$y_n = \hat{A}^n y_0$$

となる。従って, 解 y_n の漸近挙動は, 線形写像 $y \to \hat{A}y$ の固有値問題を考えればよい。

以下, 簡単のため, $\hat{A}$ の固有値 λ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ はすべて単根とする。このとき, $\mathbf{R}^m$ は固有空間 V_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ により

$$\mathbf{R}^m = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$$

と直和分解される。(正確には, 複素化した空間 $\mathbf{C}^m$ を分解して, それを実数化する。)

さて, $y_0 \in \mathbf{R}^m$ は各 λ_i に属する固有ベクトル ϕ_i を用いて

(3) $$y_0 = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \cdots + c_m\phi_m$$

と一意的に表せる。よって

$$\begin{aligned} y_n = \hat{A}^n y_0 &= c_1\hat{A}^n\phi_1 + c_2\hat{A}^n\phi_2 + \cdots + c_m\hat{A}^n\phi_m \\ &= c_1\lambda_1^n\phi_1 + c_2\lambda_2^n\phi_2 + \cdots + c_m\lambda_m^n\phi_m \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで, $|\lambda_i| < 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} c_i\lambda_i^n\phi_i = 0$ となるので, $n \to \infty$ での解の漸近挙動を考える場合は, $|\lambda_i| < 1$ の成分は考えなくてもよい。ゆえに, $\hat{A}$ の固有値が

$$|\lambda_i| = 1 \ (\text{一部}), \quad |\lambda_j| < 1 \ (\text{残りすべて})$$

のとき, y_0 の ϕ_i 成分 c_i が得られると, y_n の漸近する軌道 $c_i\lambda_i^n\phi_i$ が求まる。

そこで, (3) で与えられた y_0 の ϕ_i 成分 c_i を求めよう。今, 転置行列 $\hat{A}^T$ の固有値 λ_i に属する固有ベクトルを ψ_i とすると

$$\hat{A}^T\psi_i^T = \lambda_i\psi_i^T \quad \text{i.e.} \quad \psi_i\hat{A} = \lambda_i\psi_i$$

である。このとき, $\lambda_i\psi_i\phi_j = \psi_i\hat{A}\phi_j = \psi_i\lambda_j\phi_j = \lambda_j\psi_i\phi_j$ から

$$(\lambda_i - \lambda_j)\psi_i\phi_j = 0$$

なので, $i \neq j$ ならば $\psi_i\phi_j = 0$ となる。よって, (3) の両辺に左から ψ_i をかけると

$$\psi_i y_0 = c_1\underbrace{\psi_i\phi_1}_{0} + \cdots + c_i\psi_i\phi_i + \cdots + c_m\underbrace{\psi_i\phi_m}_{0} = c_i\psi_i\phi_i$$

となる。従って

(4) $$c_i = (\psi_i\phi_i)^{-1}\psi_i y_0$$

と決定できる。

Remark 1. $\hat{A}$ に重複する固有値がある場合でも,

$$\dim\ker(\lambda I - \hat{A}) = \text{固有値の重複度}$$

となる成分については, これまでに述べたことと同様の議論が成立する。また,

$$\dim\ker(\lambda I - \hat{A}) < \text{固有値の重複度}$$

となる成分は, 一般化固有空間を考えることになるが, $|\lambda| < 1$ ならば $n \to \infty$ で 0 となる。

3. 特性方程式

この節では, 拡大系 (2) の特性方程式（固有方程式）

$$\det(\lambda I - \hat{A}) = 0 \tag{5}$$

を考えよう。最初に, A が (I) の場合を考える。以後, 簡単のため

$$a_0 = -\frac{\sin\dfrac{\omega_0}{2}}{\sin\dfrac{k\omega_0}{2}}, \qquad a_{-1} = \frac{\sin\dfrac{\omega_{-1}}{2}}{\sin\dfrac{k\omega_{-1}}{2}}, \qquad \omega_0 = \frac{2\theta}{k+1}, \qquad \omega_{-1} = -\operatorname{sgn}\theta\,\frac{2(\pi-|\theta|)}{k+1}$$

とおく。

Lemma 1. A が (I) の場合を考える。

(i) $a_0 < a < a_{-1}$ ならば, (5) の根は $\lambda = 1$ (2 重), その他は $|\lambda| < 1$ である。

(ii) $a = a_0$ ならば, (5) の根は $\lambda = 1$ (2 重), $\lambda = e^{\pm i\omega_0}$ (単根), その他は $|\lambda| < 1$ である。

(iii) $a = a_{-1}$ ならば, (5) の根は $\lambda = 1$ (2 重), $\lambda = e^{\pm i\omega_{-1}}$ (単根), その他は $|\lambda| < 1$ である。

(iv) $a < a_0$ または $a > a_{-1}$ ならば, $|\lambda| > 1$ となる (5) の根がある。

まず

$$\det(\lambda I - \hat{A}) = \det(\lambda^{k+1} I - \lambda^k I + (\lambda^k - 1)A)$$

に注意しよう。ここで, $F(\lambda) = \lambda^{k+1} - \lambda^k + ae^{i\theta}(\lambda^k - 1)$ とおくと

$$\begin{aligned}
\det(\lambda^{k+1} I - \lambda^k I + (\lambda^k - 1)A) &= \begin{vmatrix} \lambda^{k+1} - \lambda^k + a(\lambda^k - 1)\cos\theta & -a(\lambda^k - 1)\sin\theta \\ a(\lambda^k - 1)\sin\theta & \lambda^{k+1} - \lambda^k + a(\lambda^k - 1)\cos\theta \end{vmatrix} \\
&= \{\lambda^{k+1} - \lambda^k + a(\lambda^k - 1)\cos\theta\}^2 + \{a(\lambda^k - 1)\sin\theta\}^2 \\
&= \{\lambda^{k+1} - \lambda^k + a(\lambda^k - 1)\cos\theta\}^2 - \{ia(\lambda^k - 1)\sin\theta\}^2 \\
&= \{\lambda^{k+1} - \lambda^k + ae^{i\theta}(\lambda^k - 1)\}\{\lambda^{k+1} - \lambda^k + ae^{-i\theta}(\lambda^k - 1)\} \\
&= F(\lambda)\overline{F(\bar{\lambda})}
\end{aligned}$$

である。よって $F(\lambda) = 0$ の根を調べれば十分である。また $0 < \theta \leq \pi/2$ の下で考えればよい。

Remark 2. $F(1) = 0$ かつ $F'(1) = 1 + kae^{i\theta} \neq 0$ なので, $\lambda = 1$ は常に $F(\lambda) = 0$ の単根である。

実際

$$F(\lambda) = (\lambda - 1)\{\lambda^k + ae^{i\theta}(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} + \cdots + 1)\}$$

である。ゆえに, 以下では

$$f(a, \lambda) \equiv \lambda^k + ae^{i\theta}(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} + \cdots + 1) = 0 \tag{6}$$

の根を調べる。

Proposition 1. λ を単位円周上にある (6) の根とすると λ と a の値はそれぞれ

$$\lambda = e^{i\omega_m}, \quad where\ \omega_m = \frac{2(\theta + m\pi)}{k+1}, \tag{7}$$

$$a_m = \frac{\sin(\omega_m/2)}{\sin(\omega_m/2 - \theta)} \tag{8}$$

for some $m = -[\frac{k+1}{2}], \dots, -1, 0, 1, \dots, [\frac{k}{2}]$ と表せる (ただし $[\cdot]$ はガウス記号)。

逆に, a が (8) で与えられると $\lambda = e^{i\omega_m}$ は (6) の根である。

Proof. λ を単位円周上にある (6) の根とすると, $\lambda \neq 1$ より

$$\lambda^k + ae^{i\theta}\frac{\lambda^k - 1}{\lambda - 1} = 0$$

である。$\lambda^k \neq 1$ なので

$$-a = \frac{\lambda^k(\lambda - 1)}{e^{i\theta}(\lambda^k - 1)} \tag{9}$$

とできる。両辺の共役をとると, $\bar{\lambda} = 1/\lambda$ より

$$-a = \frac{\bar{\lambda}^k(\bar{\lambda} - 1)}{e^{-i\theta}(\bar{\lambda}^k - 1)} = \frac{e^{i\theta}(1/\lambda^k)(1/\lambda - 1)}{1/\lambda^k - 1} = \frac{e^{i\theta}(1/\lambda - 1)}{1 - \lambda^k} = \frac{e^{i\theta}(\lambda - 1)}{\lambda(\lambda^k - 1)} \tag{10}$$

が成り立つ。(9) と (10) より a を消去すると

$$\frac{\lambda^k(\lambda - 1)}{e^{i\theta}(\lambda^k - 1)} = \frac{e^{i\theta}(\lambda - 1)}{\lambda(\lambda^k - 1)}$$

これより $\lambda^{k+1} = e^{2i\theta}$, 即ち

$$\lambda = e^{i\omega_m} \quad \text{where } \omega_m = \frac{2\theta + 2m\pi}{k+1}, \ m = -[\tfrac{k+1}{2}], \dots, -1, 0, 1, \dots, [\tfrac{k}{2}]$$

と表せる。このとき

$$\begin{aligned} a &= -\frac{e^{i\theta}(\lambda - 1)}{\lambda(\lambda^k - 1)} = -\frac{e^{i\theta}(\lambda - 1)}{e^{2i\theta} - \lambda} = \frac{\lambda^{1/2} - \lambda^{-1/2}}{e^{-i\theta}\lambda^{1/2} - e^{i\theta}\lambda^{-1/2}} \\ &= \frac{e^{i(\omega_m/2)} - e^{-i(\omega_m/2)}}{e^{i(\omega_m/2 - \theta)} - e^{-i(\omega_m/2 - \theta)}} = \frac{\sin(\omega_m/2)}{\sin(\omega_m/2 - \theta)} \equiv a_m \end{aligned}$$

を得る。

逆に, a が (8) で与えられるとき, $\lambda = e^{i\omega_m}$ は (6) の根であることは明らか。 □

Proposition 2. (8) で定まる a_m について $a_m > 0$ の中での最小値と $a_m < 0$ の中での最大値はそれぞれ次の通り：

$$\frac{\sin\dfrac{\pi - \theta}{k+1}}{\sin\dfrac{k(\pi - \theta)}{k+1}} > 0, \quad -\frac{\sin\dfrac{\theta}{k+1}}{\sin\dfrac{k\theta}{k+1}} < 0$$

Proof.

$$h(x) = \frac{\sin(x/2)}{\sin(x/2-\theta)} \quad (-\pi < x \leq \pi,\ x \neq 2\theta)$$

とおくと $h(0)=0$, h : 周期 2π, かつ

$$h'(x) = -\frac{\sin\theta}{2\sin^2(x/2-\theta)} < 0$$

より h は単調減少である。ここで,

$$\omega_{-[\frac{k+1}{2}]} < \cdots < \omega_{-1} < 0 < \omega_0 < \cdots < \omega_{[\frac{k}{2}]}$$

に注意すると, $a_m > 0$ の中で a_{-1} が最小値であり, $a_m < 0$ の中で a_0 が最大値である。それぞれの値は

$$a_{-1} = \frac{\sin\dfrac{\theta-\pi}{k+1}}{\sin\left(\dfrac{\theta-\pi}{k+1}-\theta\right)} = \frac{\sin\dfrac{\pi-\theta}{k+1}}{\sin\left(\theta-\dfrac{\theta-\pi}{k+1}\right)} = \frac{\sin\dfrac{\pi-\theta}{k+1}}{\sin\dfrac{k\theta+\pi}{k+1}} = \frac{\sin\dfrac{\pi-\theta}{k+1}}{\sin\dfrac{k(\pi-\theta)}{k+1}}$$

$$a_0 = \frac{\sin\dfrac{\theta}{k+1}}{\sin\left(\dfrac{\theta}{k+1}-\theta\right)} = \frac{\sin\dfrac{\theta}{k+1}}{\sin\dfrac{-k\theta}{k+1}} = -\frac{\sin\dfrac{\theta}{k+1}}{\sin\dfrac{k\theta}{k+1}}$$

となる。 □

Proposition 3. 単位円周上にある (6) の全ての根は単根である。

Proof. λ を単位円周上にある (6) の根とすると $\lambda \neq 1$ かつ $\lambda^k \neq 1$ である。(9) を用いると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(a,\lambda)}{\partial\lambda} &= k\lambda^{k-1} + ae^{i\theta}\frac{k\lambda^{k-1}(\lambda-1)-(\lambda^k-1)}{(\lambda-1)^2} \\
&= k\lambda^{k-1} - \frac{\lambda^k(\lambda-1)}{\lambda^k-1}\cdot\frac{k\lambda^{k-1}(\lambda-1)-(\lambda^k-1)}{(\lambda-1)^2} \\
&= \frac{\lambda^{k-1}\{\lambda^{k+1}-(k+1)\lambda+k\}}{(\lambda^k-1)(\lambda-1)}
\end{aligned} \tag{11}$$

が成り立つ。もし $\frac{\partial f(a,\lambda)}{\partial\lambda} = 0$ とすると

$$\lambda^{k+1} - (k+1)\lambda + k = 0$$

である。ここで, $\bar{\lambda} = 1/\lambda$ より $1/\lambda^{k+1} - (k+1)/\lambda + k = 0$, 即ち

$$k\lambda^{k+1} - (k+1)\lambda^k + 1 = 0$$

も成立している。このとき, 上の 2 式を辺々加えると

$$\begin{aligned}
&(k+1)\lambda^{k+1} - (k+1)\lambda^k - (k+1)\lambda + k + 1 = 0 \\
\therefore\quad &(k+1)(\lambda-1)(\lambda^k-1) = 0
\end{aligned}$$

となる。$\lambda \neq 1$ かつ $\lambda^k \neq 1$ なので, これは矛盾。以上より

$$\left.\frac{\partial f(a,\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=e^{i\omega_m}} \neq 0$$

を得る。 □

Proposition 4. $|a|$ を増加させると, 単位円周上にある (6) の全ての根の絶対値は増加する。

Proof. まず, (6) の根 $\lambda = \lambda(a)$ を $a \in \mathbf{C}$ の正則関数とみなすと, Proposition 3 と陰関数定理より, 各 $a = a_m$ の近傍で

$$\frac{d\lambda}{da} = -\frac{\dfrac{\partial f(a,\lambda)}{\partial a}}{\dfrac{\partial f(a,\lambda)}{\partial \lambda}} \tag{12}$$

が存在している。今 $\lambda = re^{i\omega}$ と極表示すると

$$\frac{d\lambda}{da} = \frac{\lambda}{r}\left(\frac{dr}{da} + ir\frac{d\omega}{da}\right) \tag{13}$$

である。よって, a が実数の範囲を動くとき, (12) と (13) より

$$\frac{dr}{da} = \mathrm{Re}\left\{\frac{r}{\lambda}\frac{d\lambda}{da}\right\} = \frac{r}{\left|\frac{\partial f(a,\lambda)}{\partial \lambda}\right|^2}\mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial f(a,\lambda)}{\partial a}\cdot\overline{\frac{\partial f(a,\lambda)}{\partial \lambda}}\right\}$$

と表せる。ここで,

$$\frac{\partial f(a,\lambda)}{\partial a} = e^{i\theta}\frac{\lambda^k - 1}{\lambda - 1} = -\frac{\lambda^k}{a}$$

なので, これと (11) を用いると

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial f(a,\lambda)}{\partial a}\cdot\overline{\frac{\partial f(a,\lambda)}{\partial \lambda}}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial f(a,\lambda)}{\partial a}\cdot\overline{\frac{\partial f(a,\lambda)}{\partial \lambda}} - \lambda\cdot\overline{\frac{\partial f(a,\lambda)}{\partial a}}\cdot\frac{\partial f(a,\lambda)}{\partial \lambda}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{a}\cdot\frac{\bar{\lambda}^{k-1}\{\bar{\lambda}^{k+1} - (k+1)\bar{\lambda} + k\}}{(\bar{\lambda}^k - 1)(\bar{\lambda} - 1)} + \lambda\cdot\frac{\bar{\lambda}^k}{a}\cdot\frac{\lambda^{k-1}\{\lambda^{k+1} - (k+1)\lambda + k}{(\lambda^k - 1)(\lambda - 1)}\right\}\\
&= \frac{1}{2a}\left\{\frac{k\lambda^{k+1} - (k+1)\lambda^k + 1}{(\lambda^k - 1)(\lambda - 1)} + \frac{\lambda^{k+1} - (k+1)\lambda + k}{(\lambda^k - 1)(\lambda - 1)}\right\}\\
&= \frac{k+1}{2a}
\end{aligned}$$

が成り立つ。従って

$$\left.\frac{d\lambda}{da}\right|_{a=a_m} = \frac{(k+1)r}{2a_m\left|\frac{\partial f(a,\lambda)}{\partial \lambda}\right|^2}$$

となり, Proposition 4 の主張が成り立つ。 □

Proof of Lemma 1. Remark 2 より $f(\lambda)\overline{f(\bar{\lambda})}=0$ の根 λ の分類をすればよい。

(i) $a_0 < a < a_{-1}$ の場合。$a=0$ のとき $\lambda=0$ ($2k$ 重根) である。よって Proposition 2 と根 λ の a に関する連続性より $a_0 < a < a_{-1}$ ならば $|\lambda|<1$ for all λ である。

(ii) $a=a_0$ の場合。Propositions 1 and 2 より $\lambda=e^{i\omega_0}$ だけが $|\lambda|\geq 1$ を満たす $f(\lambda)=0$ の根である。Proposition 3 より $\lambda=e^{i\omega_0}$ は単根である。また $\lambda=e^{-i\omega_0}$ だけが $|\lambda|\geq 1$ を満たす $\overline{f(\lambda)}=0$ の根であり, 単根になっている。

(iii) $a=a_{-1}$ の場合。(ii) と同様にして $\lambda=e^{\pm i\omega_{-1}}$ だけが $|\lambda|\geq 1$ を満たしており, それぞれ単根である。

(iv) $a<a_0$ または $a>a_{-1}$ の場合。Proposition 4 より $|\lambda|>1$ for some λ である。 □

行列 A が (II) または (III) の場合, Lemma 1 と同様にして次の結果が成り立つ。

Lemma 2. A が (II) の場合を考える。

(i) $-\dfrac{1}{k}<a_1<1$ かつ $-\dfrac{1}{k}<a_2<1$ ならば, (5) の根は $\lambda=1$ (2 重), その他は $|\lambda|<1$ である。

(ii) $a_1=1$ かつ $a_2=1$ ならば, (5) の根は $\lambda=e^{i\frac{2l\pi}{k+1}}$ (2 重) ($l=0,\dots,k$) となる。($|^\forall\lambda|=1$)

(iii) $a_1=-\dfrac{1}{k}$ かつ $a_2=-\dfrac{1}{k}$ ならば, (5) の根は $\lambda=1$ (4 重), その他は $|\lambda|<1$ である。

(iv) $^\exists j: a_j<-\dfrac{1}{k}$ または $a_j>1$ ならば, $|\lambda|>1$ となる (5) の根がある。

Lemma 3. A が (III) の場合を考える。

(i) $-\dfrac{1}{k}<a<1$ ならば, (5) の根は $\lambda=1$ (2 重), その他は $|\lambda|<1$ である。

(ii) $a=1$ ならば, (5) の根は $\lambda=e^{i\frac{2l\pi}{k+1}}$ (2 重) ($l=0,1,\dots,k$) となる。($|^\forall\lambda|=1$)

(iii) $a=-\dfrac{1}{k}$ ならば, (5) の根は $\lambda=1$ (4 重), その他は $|\lambda|<1$ である。

(iv) $a<-\dfrac{1}{k}$ または $a>1$ ならば, $|\lambda|>1$ となる (5) の根がある。

4. 主結果

この節では, (1) の解がある定点や周期点に漸近する際の具体的表現を与える。

Theorem 1. A が (I) の場合を考える。

(i) $a_0<a<a_{-1}$ ならば, (1) の解 x_n はある定点 b に近づく。

ただし, $b=(I+kA)^{-1}(x_0+A\sum_{j=1}^{k}x_{-j})$ である。

(ii) $a=a_0$ または $a=a_{-1}$ ならば, (1) の解 x_n はある周期点 x_n^* に近づく。

ただし，$x_n^* = b + \begin{pmatrix} \cos n\omega & -\sin n\omega \\ \sin n\omega & \cos n\omega \end{pmatrix} c, \qquad \omega = \begin{cases} \omega_0 & (a = a_0) \\ \omega_{-1} & (a = a_{-1}) \end{cases}$

$$b = (I + kA)^{-1}(x_0 + A\sum_{j=1}^{k} x_{-j}),$$

$$c = (I + kA^T)^{-1}\left(x_0 + A^T \sum_{j=1}^{k} \begin{pmatrix} \cos j\omega & -\sin j\omega \\ \sin j\omega & \cos j\omega \end{pmatrix} x_{-j}\right)$$

である。

(iii) $a < a_0$ または $a > a_{-1}$ ならば，(1) は発散する解をもつ。

Proof. $\lambda = 1$ は常に $\hat{A}$ の固有値である。$\lambda = 1$ のとき，$\mathrm{rank}(\lambda I - \hat{A}) = m - 2$ なので，固有空間の次元は 2 となる。ここで，$\hat{A}\phi = \lambda\phi$ を満たす固有ベクトル ϕ は

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。また，$\psi\hat{A} = \lambda\psi$ を満たす固有ベクトル ψ は

$$\psi_1 = (a_{11},\, a_{12},\, \cdots,\, a_{11},\, a_{12},\, 1,\, 0), \quad \psi_2 = (a_{21},\, a_{22},\, \cdots,\, a_{21},\, a_{22},\, 0,\, 1)$$

である（ただし a_{jl} は A の (j, l) 成分)。

(i) $a_0 < a < a_{-1}$ の場合。Lemma 1 (i) より $\lambda = 1$ の重複度は 2 である。このとき

$$y_n = b_1 1^n \phi_1 + b_2 1^n \phi_2 + \underbrace{\cdots}_{|\lambda_j|<1}$$

と表せるので，(1) の解 x_n は（n : 十分大のとき）

$$b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

に漸近する。よって $b = (b_1, b_2)^T$ を求めよう。$\Phi = (\phi_1, \phi_2)$, $\Psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ とおくと (3) より

$$y_0 = b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + \underbrace{\cdots}_{\lambda \neq 1\ \text{なる固有空間の基底}} = \Phi b + \cdots$$

である。この両辺に左から $(\Psi\Phi)^{-1}\Psi$ をかけると

(14) $$b = (\Psi\Phi)^{-1}\Psi y_0 = (I + kA)^{-1}(x_0 + \sum_{j=1}^{k} Ax_{-j})$$

となる。

(ii) $a = a_0$ の場合を考える（$a = a_{-1}$ の場合も同様にしてできる)。(1) の解 x_n の $\lambda = 1$ に関する成分は (14) で与えられる。よって $\lambda = e^{\pm i\omega_0}$ に関する固有ベクトルと成分を求めよう。

$\lambda = e^{i\omega_0}$ に属する固有ベクトルは

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} \lambda^{-k}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} \\ \vdots \\ \lambda^0\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}\end{pmatrix} \quad \text{および} \quad \psi_1 = \left(\lambda^k ae^{-i\theta}(1,\, i),\, \cdots,\, \lambda^1 ae^{-i\theta}(1,\, i),\, (1,\, i)\right)$$

である。また，$\lambda = e^{-i\omega_0} = \overline{e^{i\omega_0}}$ に属する固有ベクトルは $\phi_2 = \overline{\phi_1}$ および $\psi_2 = \overline{\psi_1}$ である。

よって，$\tilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b\end{pmatrix}$ とおくと

$$y_n = \tilde{b} + c_1 e^{in\omega_0}\phi_1 + c_2 e^{-in\omega_0}\phi_2 + \underbrace{\cdots}_{|\lambda_j|<1} = \tilde{b} + 2\,\mathrm{Re}\,(c_1 e^{in\omega_0}\phi_1) + \cdots$$

と表せる。従って (1) の解 x_n は（n : 十分大のとき）

$$x_n^* = b + 2\,\mathrm{Re}\left\{c_1 e^{in\omega_0}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}\right\} \tag{15}$$

$$= b + 2\mathrm{Re}\,c_1 \mathrm{Re}\left\{e^{in\omega_0}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}\right\} - 2\mathrm{Im}\,c_1 \mathrm{Im}\left\{e^{in\omega_0}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}\right\}$$

$$= b + 2\mathrm{Re}\,c_1\begin{pmatrix}\cos n\omega_0\\ \sin n\omega_0\end{pmatrix} - 2\mathrm{Im}\,c_1\begin{pmatrix}\sin n\omega_0\\ -\cos n\omega_0\end{pmatrix}$$

$$= b + \begin{pmatrix}\cos n\omega_0 & -\sin n\omega_0\\ \sin n\omega_0 & \cos n\omega_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\mathrm{Re}\,c_1\\ 2\mathrm{Im}\,c_1\end{pmatrix}$$

に漸近する。そこで $c = (2\mathrm{Re}\,c_1, 2\mathrm{Im}\,c_1)^T$ を求めよう。(4) より

$$c = \begin{pmatrix} c_1 + \overline{c_1} \\ (c_1 - \overline{c_1})/i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\psi_1\phi_1)^{-1}\psi_1 y_0 + \left(\overline{\psi_1\phi_1}\right)^{-1}\overline{\psi_1}y_0 \\ (\psi_1\phi_1)^{-1}\psi_1 y_0/i + \left(\overline{\psi_1\phi_1}\right)^{-1}(-\overline{\psi_1}y_0/i)\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|\psi_1\phi_1|^2}\begin{pmatrix}\overline{\psi_1\phi_1}\psi_1 y_0 + \psi_1\phi_1\overline{\psi_1}y_0 \\ \overline{\psi_1\phi_1}\psi_1 y_0/i + \psi_1\phi_1(-\overline{\psi_1}y_0/i)\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(\mathrm{Re}\,\psi_1\phi_1)^2 + (\mathrm{Im}\,\psi_1\phi_1)^2}\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,\psi_1\phi_1 & \mathrm{Im}\,\psi_1\phi_1\\ -\mathrm{Im}\,\psi_1\phi_1 & \mathrm{Re}\,\psi_1\phi_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1 y_0 + \overline{\psi_1}y_0 \\ \psi_1 y_0/i - \overline{\psi_1}y_0/i\end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,\psi_1\phi_1 & -\mathrm{Im}\,\psi_1\phi_1\\ \mathrm{Im}\,\psi_1\phi_1 & \mathrm{Re}\,\psi_1\phi_1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,\psi_1 y_0\\ \mathrm{Im}\,\psi_1 y_0\end{pmatrix}$$

ここで，ϕ_1, ψ_1 の定め方より $\psi_1\phi_1 = 2(1 + kae^{-i\theta})$ なので

$$\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,\psi_1\phi_1 & -\mathrm{Im}\,\psi_1\phi_1\\ \mathrm{Im}\,\psi_1\phi_1 & \mathrm{Re}\,\psi_1\phi_1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}2(1 + ka\cos(-\theta)) & -2ka\sin(-\theta)\\ 2ka\sin(-\theta) & 2(1 + ka\cos(-\theta))\end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}(I + kA^T)^{-1}$$

である。また，$\psi_1 y_0 = (1,i)x_0 + a\sum_{j=1}^{k}(e^{i(j\omega_0-\theta)}, ie^{i(j\omega_0-\theta)})x_{-j}$ より

$$\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,\psi_1 y_0\\ \mathrm{Im}\,\psi_1 y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1,0)x_0 + a\sum_{j=1}^{k}(\cos(j\omega_0-\theta), -\sin(j\omega_0-\theta))x_{-j}\\ (0,1)x_0 + a\sum_{j=1}^{k}(\sin(j\omega_0-\theta), \cos(j\omega_0-\theta))x_{-j}\end{pmatrix}$$

$$= \left(x_0 + a\sum_{j=1}^{k}\begin{pmatrix}\cos(j\omega_0-\theta) & -\sin(j\omega_0-\theta)\\ \sin(j\omega_0-\theta) & \cos(j\omega_0-\theta)\end{pmatrix}x_{-j}\right)$$

$$= \left(x_0 + A^T\sum_{j=1}^{k}\begin{pmatrix}\cos j\omega_0 & -\sin j\omega_0\\ \sin j\omega_0 & \cos j\omega_0\end{pmatrix}x_{-j}\right)$$

が成り立つ。ゆえに

$$c = (I+kA^T)^{-1}\left(x_0 + A^T\sum_{j=1}^{k}\begin{pmatrix}\cos j\omega_0 & -\sin j\omega_0\\ \sin j\omega_0 & \cos j\omega_0\end{pmatrix}x_{-j}\right) \tag{16}$$

を得る。

(iii) $a < a_0$ または $a > a_{-1}$ の場合。Lemma 1 (iv) より $|\lambda| > 1$ となる特性根があるので，(1) は発散する解をもつ。 □

Theorem 1 と同様にして，A が対角行列または三角行列の場合, 次の結果が得られる。

Theorem 2. A が (II) の場合を考える。

(i) $-\dfrac{1}{k} < a_1 < 1$ かつ $-\dfrac{1}{k} < a_2 < 1$ ならば，(1) の解 x_n はある定点 b に近づく。
ただし，$b = (I+kA)^{-1}(x_0 + A\sum_{j=1}^{k}x_{-j})$ である。

(ii) $a_1 = 1$ かつ $a_2 = 1$ ならば，(1) の解 x_n は $(k+1)$-周期解 x_n^* となる。
ただし，$x_n^* = \dfrac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\cos\left(\dfrac{2l(n+j)\pi}{k+1}\right)x_{-j}$ である。

(iii) $\exists j : a_j \leq -\dfrac{1}{k}$ または $a_j > 1$ ならば，(1) は発散する解をもつ。

Theorem 3. A が (III) の場合を考える。

(i) $-\dfrac{1}{k} < a < 1$ ならば，(1) の解 x_n はある定点 b に近づく。
ただし，$b = (I+kA)^{-1}(x_0 + A\sum_{j=1}^{k}x_{-j})$ である。

(ii) $a \leq -\dfrac{1}{k}$ または $a \geq 1$ ならば，(1) は発散する解をもつ。

5. 付録（一様分布）

最後に, 行列 A が (I) の場合, 方程式 (1) の解 x_n の漸近する様子を別の視点から考察しよう。以下では, 方程式 (1) を複素数値差分方程式

$$z_{n+1} - z_n + ae^{i\theta}(z_n - z_{n-k}) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{17}$$

として考える。ここで $a \in \mathbf{R}$, $0 < |\theta| \leq \pi/2$, $k \in \mathbf{N}$ で, 初期値を $z_{-k}, \ldots, z_0 \in \mathbf{C}$ とする。また, (17) の特性方程式は $F(\lambda) = 0$ である。このとき, 次の結果が成り立つ。

Theorem 4. a_0, a_{-1} はそれぞれ 3 節で与えられた値とし, β を次のように定める：

$$\beta = (1 + kae^{i\theta})^{-1}(z_0 + ae^{i\theta}\sum_{j=1}^{k} z_{-j})$$

(i) $a_0 < a < a_{-1}$ ならば, (17) の解 z_n は定点 β に近づく。

(ii) $a = a_0$ または $a = a_{-1}$ の場合。

(a) θ/π が有理数ならば, (17) の解 z_n は定点 β を中心とする円の等分点に近づく。

(b) θ/π が無理数ならば, 数列 $\{\arg(z_n - \beta)\}$ は区間 $[0, 2\pi)$ 上で一様分布する。

ここで, $0 \leq p_n < 2\pi$ を満たす数列 $\{p_n\}$ が区間 $[0, 2\pi)$ 上で一様分布するとは, 任意の実数 p, q $(0 \leq p \leq q < 2\pi)$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \operatorname{card}\{n \,|\, p \leq p_n \leq q,\ 1 \leq n \leq N\} = \frac{q-p}{2\pi}$$

が成り立つときに言う。

Theorem 4 の証明は, 紙面の関係上省略するが, (ii)-(b) の一様分布を証明する際, 次の Weyl の判定法を用いる： $0 \leq p_n < 2\pi$ を満たす数列 $\{p_n\}$ が任意の整数 $m\,(\neq 0)$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{imp_n} = 0$$

ならば, 数列 $\{p_n\}$ が区間 $[0, 2\pi)$ 上で一様分布する。

参考文献

[1] R. P. Agarwal, M. Pituk, Convergence to equilibria in recurrence equations, Advances in difference equations II, *Comput. Math. Appl.* **36** (1998), no. 10-12, 357-368.

[2] R. D. Driver, G. Ladas and P. N. Vlahos, Asymptotic behavior of a linear delay difference equation, *Proc. Amer. Math. Soc.* **115** (1992), 105–112.

[3] K. Murakami, Asymptotic constancy and periodic solutions for linear autonomous delay differential equations, *Funkcial. Ekvac.* **39** (1996), 519–540.