数理解析研究所講究録
1128 巻 2000 年 136-142

ある曲面収縮問題に現れる放物型方程式について

穴田 浩一
早稲田大学高等学院

Abstract

ある曲面の主曲率 κ_1, κ_2 に対して $H_{-1} := ((1/\kappa_1 + 1/\kappa_2)/2)^{-1}$ の指数乗の速度で内向き法線方向に収縮する曲面運動について考える. 本論では, この収縮速度が満たしている発展方程式の解の安定性を調べる. このことは, 収縮する際の曲面の挙動を理論的に知るために重要なことである.

1 Introduction

次の発展方程式の初期値問題を考える:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{1}{2\beta} k^{1+\beta}(\bar{\Delta} k + 2k) \quad \text{in } \mathbf{S}^2 \times (0,T), \tag{1.1}$$

$$k(\cdot, 0) = k_0 \qquad \text{in } \mathbf{S}^2. \tag{1.2}$$

ここで, $T > 0$, $\beta > 0$, $\mathbf{S}^2 := \{z \in \mathbf{R}^3;\ |z| = 1\}$, $\bar{\Delta}$ は $\mathbf{S}^2$ 上の Laplacian, k_0 は $\mathbf{S}^2$ 上の滑らかな正値関数. (1.1)–(1.2) は滑らか, 正値でかつ, ある有限時刻 $T > 0$ で爆発する解をもつことが容易に分かる. 本論文では, この問題の安定性について考える.

この発展方程式 (1.1) は, ある曲面の主曲率 κ_1, κ_2 に対して

$$(H_{-1}) := \left(\frac{1}{2}(1/\kappa_1 + 1/\kappa_2)\right)^{-1}, \tag{1.3}$$

の $1/\beta$ $(:= \alpha)$ 乗の速度で内向き法線方向に収縮する曲面の運動を考える問題の中で, 収縮速度 $k = \left(H_{-1}\right)^{\alpha}$ が満たす方程式である. (この H_{-1} を調和平均曲率と呼ぶことがある.) これまで, 曲面などの収縮問題を収縮速度が満たす方程式を使って解析する方法は curve shortening problem に関する研究などで用いられている. (see [4], [6] etc.)

いま, F: $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^3$ を smooth embedding で $M = \{F(z);\ z \in \mathbf{S}^2\} \subset \mathbf{R}^3$ が境界のない狭義凸な曲面かつ M 上の点 $F(z)$ における外向き法線が ν が parameter “z” と一致しているものとする. このとき, M の support function $s(z) = F(z) \cdot z$ $(z \in \mathbf{S}^2)$ は方程式

$$\bar{\Delta} s + 2s = \frac{2}{H_{-1}},$$

を満たしている. (see [1], [2], [3]) ここで, $\cdot$ は $\mathbf{R}^3$ 上の内積, H_{-1} は (1.3) で定義されたもの. 逆に, $H_{-1}=k^{-\beta}$ が与えられたとき, この s に関する方程式を解くことにより収縮する曲面を得ることが出来る. ここで, $X_1:=\{v;\ \bar{\Delta}v+2v=0 \text{ in } \mathbf{S}^2\}$ とおくと, この s に関する微分方程式が解けるための必要十分条件は $1/H_{-1}\in(X_1)^{\perp}$ であるから, (1.1)–(1.2) の解から t の変化にしたがって収縮する曲面を得るためには $1/H_{-1}=k(\cdot,t)^{-\beta}\in(X_1)^{\perp}$ を満たしていなければならない. このことについては, 方程式 (1.1) を

$$\frac{\partial}{\partial t}(k^{-\beta})=-\frac{1}{2}\bar{\Delta}k-k,$$

と変形すると任意の $\psi\in X_1$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle k^{-\beta},\psi\rangle_{\mathbf{S}^2}=0,$$

となるから, 初期関数 k_0 に対して

$$(k_0)^{-\beta}\in(X_1)^{\perp} \tag{1.4}$$

を仮定すれば十分である. ここで, $\langle f,g\rangle_{\mathbf{S}^2}=\int_{\mathbf{S}^2}fg$.

次に, 解が爆発する方程式で安定性を議論するためには, 適当な相似変換を行った方程式を考える必要がある. ここでは, 次の相似変換を導入する:

$$\varphi(t) = \int_{\mathbf{S}^2}(k_0)^{-\beta}\cdot\left(\int_{\mathbf{S}^2}k^{-\beta}\right)^{-1}, \tag{1.5}$$

$$\tau(t) = \int_0^t\varphi^{1+1/\beta}, \tag{1.6}$$

$$\tilde{k}(\cdot,\tau) = \varphi(t)^{-1/\beta}k(\cdot,t). \tag{1.7}$$

このとき, $\int_{\mathbf{S}^2}\tilde{k}(\cdot,\tau)^{-\beta}$ は τ について一定でかつ $\tilde{k}$ は非局所的な微分方程式

$$\frac{\partial\tilde{k}}{\partial\tau}=\frac{1}{2\beta}\tilde{k}^{1+\beta}(\bar{\Delta}\tilde{k}+2\tilde{k})-\frac{C(\tau)}{\beta}\tilde{k}. \tag{1.8}$$

を満たしている. ここで, $C(\tau)=\left(\int_{\mathbf{S}^2}(k_0)^{-\beta}\right)^{-1}\int_{\mathbf{S}^2}\tilde{k}(\cdot,\tau)$. 本論では特に初期関数が

$$\int_{\mathbf{S}^2}\left((k_0)^{-\beta}-1\right)=0, \tag{1.9}$$

を満たしているときの (1.1)–(1.2) の解を考える. 実際には相似変換された方程式 (1.8) は任意の定数が解になるが, (1.9) を仮定しても一般性を失うことはない. これと (1.4) の仮定の下で (1.8) の解の安定性を証明することが本論の目的である. 以下, k_0 に対する仮定 (1.4) と (1.9) を合わせて "(初期関数に対する) 自然な仮定" と呼ぶことにする.

本論文の構成は次の通り. Section 2 では, (1.8) の定常解, すなわち (1.1) の自己相似解について考える. 自明でない自己相似解の存在がすでに [1] で示されている. ここでは, 軸対称になっている自己相似解について具体的な性質を調べる.

Section 3 では, 相似変換された方程式 (1.8) の自明解 $K\equiv1$ の安定性を示すとともに, 安定になるための必要条件を与える.

2 Self Similar Solutions

(1.1) の非自明な自己相似解の存在について, [1] は次の定理を証明した.

定理 2.1 $\bar{\beta}_i = \dfrac{(i+2)(i-1)}{2}$ $(i = 2,3,\cdots)$, $D := \left\{u; \int_{\mathbf{S}^2} u = 0\right\}$ とおく. このとき, $K-1 \in D$ を満たす

$$\bar{\Delta}K + 2K = 2K^{-\beta}, \tag{2.1}$$

の正値解は, $\beta = \bar{\beta}_i$ となるとき自明解の集合 $\{(1,\beta);\ \beta \geq 0\}$ から分岐する. ここで, (K,β) が (2.1) の解であるとは, K, β が (2.1) を満たすことである.

注意 2.2 定理 2.1 の分岐解 K は自然な仮定 (1.4) と (1.9) を満たしている.

この定理は分岐理論 (see [5]) を用いて証明されている. この section では, (2.1) の解のうち軸対称なものについてさらに詳しい分岐解の性質を調べる.

$$z = (\cos\theta\cos\eta, \cos\theta\sin\eta, \sin\theta) \quad (\in \mathbf{S}^2)$$

とし, (2.1) の解 K が第三の座標軸について軸対称であるとする. このとき, $z \neq (0,0,\pm 1)$ $(\theta \neq \pm\pi/2)$ ならば (2.1) は

$$\frac{1}{\cos\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\cos\theta\frac{dK}{d\theta}\right) + 2K = 2K^{-\beta}, \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.2}$$

となる. ここで, 次の方程式

$$\frac{1}{\cos\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\cos\theta\frac{dv}{d\theta}\right) + i(i+1)v = 0, \quad (i \in \mathbf{N})$$

の解は i 次ルジャンドル多項式 P_i を用いて $v(\theta) = P_i(\sin\theta)$ となっていることがよく知られている. このことから, (2.2) について次の系が得られる.

系 2.3 $i = 2,3,\cdots$ を *fix* し, $\bar{\beta}_i$ を定理 2.1 のものとする. このとき, ある $\varepsilon_i > 0$ が存在して, $\beta_i(0) = \bar{\beta}_i$ となる $I_i = (-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ 上の連続関数 $\beta_i(\cdot)$ を適当にとれば, $(1,\bar{\beta}_i)$ からの (2.2) の分岐解の集合は

$$\left\{(1 + rP_i(\sin\theta) + rz_i(\theta,r), \beta_i(r));\ r \in I_i\right\},$$

と書ける. ここで, $z_i(\theta,r)$ は I_i 上で定義され $z_i \perp P_i$ かつ $z_i(\theta,0) = 0$ を満たすもの.

ルジャンドル多項式は陽的に計算することが可能であることから, この系の $\beta_i(r)$ に対してさらに次の性質を示すことが出来る.

定理 2.4 系 2.3 の $\beta_i(r)$ に対して次が成立する.

(i) i が偶数 ならば $(\beta_i)'(0) > 0$.

(ii) i が奇数 ならば $(\beta_i)'(0)=0$ かつ

$$(\beta_i)''(0)\ \begin{cases} <0 & (i=3) \\ >0 & (i>3) \end{cases}$$

(証明) $\beta(r)$ は 0 の適当な近傍で定義された滑らかな関数, $u(\cdot,r)\in D$ は r について滑らかとし, $j\in\mathbf{N}$ に対して A_j を次のように定義する:

$$A_j u = 2(u+1)^{-\beta} - 2(u+1) + j(j+1)u.$$

この両辺を r で微分すると

$$(A_j u)_r = -2\beta'(u+1)^{-\beta}\log(u+1) - 2\beta(u+1)^{-(\beta+1)}u_r + (j+2)(j-1)u_r, \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}(A_j u)_{rr} \ &= \ -2\beta''(u+1)^{-\beta}\log(u+1) + 2(\beta')^2(u+1)^{-\beta}(\log(u+1))^2 \\ &\quad + 4\beta'\beta(u+1)^{-(\beta+1)}u_r\log(u+1) - 4\beta'(u+1)^{-(\beta+1)}u_r \\ &\quad + 2\beta(\beta+1)(u+1)^{-(\beta+1)}(u_r)^2 - 2\beta(u+1)^{-(\beta+1)}u_{rr} + (j+2)(j-1)u_{rr},\end{aligned} \tag{2.4}$$

となる. いま, $i=2,3,\cdots$ を fix し, $j=i$, $\beta(r)=\beta_i(r)$, $u(\theta,r)=rP_i(\sin\theta)+rz_i(\theta,r)$ $(r\in I_i)$ とすると

$$A_j u = \frac{1}{\cos\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\cos\theta\frac{du}{d\theta}\right) + j(j+1)u \qquad (j\in\mathbf{N}),$$

であり, かつ $\beta(0)=\bar\beta_i$, $u_r(\theta,0)=P_i$ となっていることから.

$$0=\langle (A_i u)_{rr}(0), P_i\rangle = -4\beta'(0)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(P_i)^2 + 2\bar\beta_i(\bar\beta_i+1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(P_i)^3$$

となる. ただし, $P_i=P_i(\sin\theta)$, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\cdot\cos\theta\,d\theta$, $\langle f,g\rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} fg$.

i が偶数ならば, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(P_i)^3>0$ であるから $\beta'(0)>0$ となり (i) を得る. また, i が奇数ならば $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(P_i)^3=0$ より $\beta'(0)=0$ となる. この場合, $(A_i u)_{rr}$ をさらに r で微分して同様に考えると

$$\begin{aligned} 0 \ &= \ \langle (A_i u)_{rrr}(0), P_i\rangle \\ &= \ -6\beta''(0)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(P_i)^2 + 2\bar\beta_i(\bar\beta_i+1)\left(3\langle u_{rr}(0),(P_i)^2\rangle - (\bar\beta_i+2)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(P_i)^4\right),\end{aligned} \tag{2.5}$$

を得る. ここで, u_{rr} について次の補題が成立する.

補題 2.5 i を奇数とし, $u(\theta,r)=rP_i(\sin\theta)+rz_i(\theta,r)$ $(r\in I_i)$ とおく. このとき, $i\neq j$ ならば

$$\langle u_{rr}(0), P_j\rangle = C_{ij}\langle (P_i)^2, P_j\rangle. \tag{2.6}$$

ここで, $C_{ij}=\bar\beta_i(\bar\beta_i+1)/(\bar\beta_i-\bar\beta_j)$.

この補題を用いると, 定理 2.4 を証明することが出来る. 実際, $\{P_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ は関数空間 $\left\{f;\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^2<\infty\right\}$ の一つの基底であることから

$$\langle u_{rr}(0),(P_i)^2\rangle=\sum_{j\neq i}C_{ij}\langle(P_i)^2,P_j\rangle^2,$$

を得る. ここで i が奇数ならば $\langle(P_i)^2,P_i\rangle=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(P_i)^3=0$ であることに注意する. さらに, ルジャンドル多項式の性質より $j>2i$ ならば $\langle(P_i)^2,P_j\rangle=0$ だから, この和は有限和. よって, (2.5) より

$$\beta''(0)=\frac{\bar{\beta}_i(\bar{\beta}_i+1)}{3}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(P_i)^2\right)^{-1}\left(3\sum_{j\neq i}C_{ij}\langle(P_i)^2,P_j\rangle^2-(\bar{\beta}_i+2)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(P_i)^4\right),$$

となる. この式を計算することにより (ii) を得ることができる. □

(補題 2.5 の証明) i が奇数の場合 $(\beta_i)'(0)=0$ に注意すると, (2.4) において $i\neq j$ ならば

$$0=\langle(A_ju)_{rr}(0),P_j\rangle=2\bar{\beta}_i(\bar{\beta}_i+1)\langle(P_i)^2,P_j\rangle-2(\bar{\beta}_i-\bar{\beta}_j)\langle u_{rr}(0),P_j\rangle,$$

となる. よって, (2.6) を得る. □

3 Stability of Trivial Solutions

この section では, (1.8) の自明解の安定性に対する次の定理を証明する.

定理 3.1 $0<\beta<2$ とし, k_0 は自然な仮定 (1.4) と (1.9) を満たすと仮定する. このとき, $\|(k_0)^{-\beta}-1\|\leq\delta_0$ ならば, 初期値を $\tilde{k}(\cdot,0)=k_0$ とする (1.8) の解 $\tilde{k}$ に対して

$$\|\tilde{k}(\cdot,\tau)^{-\beta}-1\|\leq e^{-\mu\tau}\|(k_0)^{-\beta}-1\|\quad(\tau>0),\tag{3.1}$$

となるような δ_0, $\mu>0$ が存在する. ただし, $\|f\|=\left(\int_{\mathbf{S}^2}f^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

この定理は $0<\beta<2$ ならば (1.8) の自明解 $K\equiv 1$ は局所的に漸近安定であることを示している. 実際, この定理より $\|k_0-1\|$ が十分小ならば $\|\tilde{k}-1\|\to 0$ $(\tau\to\infty)$ となることが容易に分かる.

(定理 3.1 の証明) 相似変換された方程式 (1.8) を次のように変形する.

$$\frac{\partial(\tilde{k}^{-\beta})}{\partial\tau}=-\frac{1}{2}\bar{\Delta}\tilde{k}-\tilde{k}+C(\tau)(\tilde{k}^{-\beta}).\tag{3.2}$$

このとき, $\delta(\tau)=\|\tilde{k}^{-\beta}-1\|^2$ とおくと

$$\begin{aligned}\delta_\tau &= 2\langle(\tilde{k}^{-\beta}-1)_\tau,\tilde{k}^{-\beta}-1\rangle_{\mathbf{S}^2}\\ &= \langle-\bar{\Delta}\tilde{k}-2\tilde{k}+2C(\tau)\tilde{k}^{-\beta},\tilde{k}^{-\beta}-1\rangle_{\mathbf{S}^2}\\ &= -\langle\bar{\Delta}\tilde{k}+2\tilde{k},\tilde{k}^{-\beta}-1\rangle_{\mathbf{S}^2}+2C(\tau)\delta\\ &= -\langle\tilde{k},\bar{\Delta}(\tilde{k}^{-\beta}-1)+2(\tilde{k}^{-\beta}-1)\rangle_{\mathbf{S}^2}+2C(\tau)\delta,\end{aligned}$$

となる. ここで, $\int_{\mathbf{S}^2}(\tilde{k}^{-\beta}-1)=0$ に注意する. また, 1 の近傍で $u^{-1/\beta}\le 1-\frac{1}{\beta}(u-1)+\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)(u-1)^2$ となっているから, δ_0 と τ が十分小ならば

$$\begin{aligned}C(\tau) &= \left(\int_{\mathbf{S}^2}(k_0)^{-\beta}\right)^{-1}\int_{\mathbf{S}^2}\tilde{k}(\cdot,\tau)\\ &\le \left(\int_{\mathbf{S}^2}(k_0)^{-\beta}\right)^{-1}\int_{\mathbf{S}^2}\left(1-\frac{1}{\beta}(\tilde{k}^{-\beta}-1)+\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)(\tilde{k}^{-\beta}-1)^2\right)\\ &= 1+C_\beta\|(\tilde{k})^{-\beta}-1\|^2.\end{aligned}$$

ただし, $C_\beta=\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\left(\int_{\mathbf{S}^2}(k_0)^{-\beta}\right)^{-1}$. よって, このとき

$$(\delta)_\tau\le-\langle\tilde{k},\bar{\Delta}(\tilde{k}^{-\beta}-1)+2(\tilde{k}^{-\beta}-1)\rangle_{\mathbf{S}^2}+2\delta+2C_\beta\delta^2, \tag{3.3}$$

となる.

ここで, 自然な仮定より $\int_{\mathbf{S}^2}(\tilde{k}^{-\beta}-1)=0$, $\tilde{k}(\cdot,\tau)^{-\beta}\in(X_1)^\perp$ $(\tau>0)$ である. また, Taylor の定理より, δ_0 と τ が十分小ならば

$$\tilde{k}=1-\frac{1}{\beta}(\tilde{k}^{-\beta}-1)+o(\|\tilde{k}^{-\beta}-1\|),$$

となる. に注意して (3.3) を変形すると, このとき

$$(\delta)_\tau\le-\frac{1}{\beta}\Big(2(2+1)-2(1+\beta)\Big)\delta+o(\delta)=-\frac{1}{\beta}(4-2\beta)\delta+o(\delta), \tag{3.4}$$

を得る. したがって, $0<\beta<2$ のとき δ_0 と τ が十分小ならば $(\delta)_\tau\le-\bar{\mu}\delta$, すなわち

$$\delta(\tau)\le e^{-\bar{\mu}\tau}\delta(0).$$

となる $\bar{\mu}>0$ が存在する. 以下, Bootstrap method により全ての $\tau>0$ に対して評価式 (3.1) を得ることができる. □

注意 3.2 次の固有値問題

$$\bar{\Delta}v+2(1+\beta)v=\lambda v \quad \text{in } \mathbf{S}^2, \tag{3.5}$$

を考えると, 固有値は

$$\lambda_n = -n(n+1) + 2(1+\beta) \quad (n \in \mathbf{N}),$$

で, その固有空間は X_n である. これから, $0 < \beta < 2$ のとき,

$$\lambda_0 = 2(1+\beta) > \lambda_1 = 2\beta > 0,$$
$$0 > \lambda_2 = -(4-2\beta) > \lambda_3 > \cdots.$$

これは, 安定性を証明するためには初期条件に対する自然な仮定が必要である, ということを意味する.

$\beta > 2$ の場合は $\lambda_2 = -(4-2\beta) > 0$ となっているから, 自然な仮定 (1.4) と (1.9) のみで自明解 $K \equiv 1$ の安定性を証明することは出来ないことが分かる.

参考文献

[1] K. Anada, *Contraction of surfaces by harmonic mean curvature flows and nonuniqueness of their self similar solutions*, preprint.

[2] B. Andrews, *Contraction of convex hypersurfaces in Euclidean space*, Calc. Var. P.D.E **2** (1994) 151–171.

[3] B. Andrews, *Harnack inequalities for evolving hypersurfaces*, Math. Z. **217** (1994) 179–197.

[4] M. Gage and R. Hamilton, *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Diff. Geo., **23** (1986), 69–96.

[5] P. H. Rabinowitz, *Some Aspects of Nonlinear Eigenvalue Problems*, Rocky Mountain J. Math., **3** (1973) 161–202.

[6] G. Sapiro and A. Tannenbaum, *On affine plane curve evolution*, J. Func. Anal. **119** (1994) 79–120.