数理解析研究所講究録
1128巻 2000年 186-192

線形半群の滑らかさについて
- 逆一意性と準解析性 -

早稲田大学理工学研究科 榎本裕子 (Yuko Enomoto)

概要. 本論文では, 準解析性に関する Y.Kōmura[1] の手法を線形半群の理論に適用して, 可分かつ回帰的な Banach 空間上の (C_0) 半群についてその逆一意性と準解析性が同値であることを示した (定理 2.6).

まず第1節では, 本論分に必要な定義および既に知られている定理を挙げた. 次に第2節では, まず (C_0) 半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$が逆一意性をもつとき $\{T(t)\}_{t<0}$が定義されることを述べ, (C_0) 半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$の共役半群 $\{T(t)^*\}_{t\geq 0}$を考えることによって (C_0) 半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ の逆一意性と準解析性が同値であることを示すことを目的としている.

1. 定義および既知の定理

本論文を通して特に断らない限り, Eを実係数体上の Banach 空間, E'を Eの共役空間とする.

定義 1.1.
Eから Eへの有界線形作用素の族 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$が次の三つの性質をもつとき, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$を E上の (C_0) 半群という:

(i) $T(0) = I$ (Iは E上の恒等作用素).
(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ $(t, s \geq 0)$.
(iii) 各 $x \in E, t \geq 0$ に対して, $\lim_{s\to t} T(s)x = T(t)x$.

定義 1.2.
(a, b) を $\mathbb{R}$ における開区間とし, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$を区間 (a, b) 上で定義された実数値連続関数の族とする. 族 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$の任意の2元 f_αと f_β が区間 (a, b) に含まれるある開区間 (c, d) 上で等しいならば区間 (a, b) 全体で恒等的に等しいとき, 族 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ は 一意接続性をもつという.

定義 1.3.
$\{b_q\}_{q\in\mathbb{N}}$を正数の列とする. このとき, $\mathbb{R}$ 上の C^∞級の実数値関数 fで

$$\sup_{t\in K} |D^q f(t)| \leq B^q b_q$$

(ただし,Kは $\mathbb{R}$ の任意の有界閉区間, Bは fと Kに依存する正定数.)
を満たすものの全体を $C\{b_q\}$ で表す.

このように定義された関数の族 $C\{b_q\}$ は線形空間である.

定義 1.4.
族 $C\{b_q\}$ が一意接続性をもつとき, $C\{b_q\}$ は準解析的であるという.

次のことが知られている ([1]).

定理 A.

$\{a_k\}$ を $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}=\infty$ であるような正数の増加列とする. $b_q=a_1a_2\cdots a_q$ ならば族 $C\{b_q\}$ は準解析的である. □

Y.Kōmura[1] が次のことを示した.

定理 B.

任意の正値連続関数 $H\in C(\mathbb{R})$ に対して, $b_q=a_1a_2\cdots a_q$ $\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}=\infty,\ 0<a_1\le a_2\le\cdots\Big)$ を満たすような数列 $\{b_q\}$ と $\{f_k\mid k=1,2,\cdots\}\subset C\{b_q\}$ が存在して, 次の 3 条件を満たす:

(i) $f_k(t)\ge 0,\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f_k(t)dt=1.$

(ii) $|h(t)|\le H(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ を満たす任意の連続関数 $h\in C(\mathbb{R})$ に対して,

$$h*f_k\in C\{b_q\},$$

かつ, 任意の有界閉区間上で一様に,

$$\Big(h*f_k\Big)(t)\to h(t)\quad (k\to\infty).$$

□

2. (C_0) 半群 $\{T(t)\}_{t\ge0}$ の逆一意性

定義 2.1.

$\{T(t)\}_{t\ge0}$ を E 上の (C_0) 半群とする. E の 2 元 x,y に対して,

$$T(t_0)x=T(t_0)y \text{ となる } t_0>0 \text{ が存在するならば } x=y$$

が成立するとき, $\{T(t)\}_{t\ge0}$ は逆一意性をもつという.

E 上の (C_0) 半群 $\{T(t)\}_{t\ge0}$ が逆一意性をもつとき, $x\in E,\ t>0$ に対して, $T(t)y=x$ となる $y\in E$ が存在すれば, この y は一意に決まる. このとき, $y=T(-t)x$ とおくことにより, $T(-t)$ $(t>0)$ が次のように定義される:

定義 2.2.

E 上の (C_0) 半群 $\{T(t)\}_{t\ge0}$ が逆一意性をもつとき, 各 $t>0$ について

$$D(T(-t))=\Big\{x\in E\ \Big|\ {}^{\exists}y\in E\ ;\ T(t)y=x\Big\}$$

とし, 各 $x\in D(T(-t))$ に対して,

$$T(-t)x=y\quad (\text{ただし}, T(t)y=x)$$

と定義する.

補題 2.3. ([2])

$\{T(t)\}_{t\ge0}$ を E 上の (C_0) 半群で逆一意性をもつものとする. ある $t<0$ について $D(T(t))$ が E で稠密ならば, $\displaystyle\bigcap_{t<0}D(T(t))$ は E で稠密である.

証明.

仮定より, ある $t_1 > 0$ について $D(T(-t_1))$ は Eで稠密である. このとき, 任意の $x \in E$, $\varepsilon > 0$ に対して,

$$^{\exists}y \in \bigcap_{t<0} D(T(t)) \ ; \ \|x-y\| < \varepsilon$$

となることを示す. 任意の$\varepsilon > 0$ を固定し, $\{\varepsilon_n\}$ を正数列で

$$\varepsilon_n < \frac{1}{Me^{\omega t_1}} \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon$$

を満たすものとする. ここで, M,ωは正定数である. 任意の $x \in E$を固定する. $D(T(-t_1))$ が Eで稠密であることから,

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1 > 0 \text{ に対して}, {}^{\exists}x_1 \in E \ ; \ \|T(t_1)x_1 - x\| < \varepsilon_1, \\
&\varepsilon_2 > 0 \text{ に対して}, {}^{\exists}x_2 \in E \ ; \ \|T(t_1)x_2 - x_1\| < \frac{\varepsilon_2}{Me^{\omega t_1}}, \\
&\qquad\qquad\vdots \\
&\varepsilon_n > 0 \text{ に対して}, {}^{\exists}x_n \in E \ ; \ \|T(t_1)x_n - x_{n-1}\| < \frac{\varepsilon_n}{Me^{(n-1)\omega t_1}}.
\end{aligned}$$

よって,

$$\|T(nt_1)x_n - T((n-1)t_1)x_{n-1}\| \le \|T((n-1)t_1)\| \, \|T(t_1)x_n - x_{n-1}\| < \varepsilon_n.$$

従って, $\{T(nt_1)x_n\}$ は Cauchy 列であるから, $y \equiv \lim_{n\to\infty} T(nt_1)x_n$ が存在する. 任意の $t_0 > 0$ に対して $0 < t_0 < (n-1)t_1$となる n を考える.

$$\|T(nt_1 - t_0)x_n - T((n-1)t_1 - t_0)x_{n-1}\| \le \|T((n-1)t_1 - t_0)\| \, \|T(t_1)x_n - x_{n-1}\| < \varepsilon_n.$$

従って $\{T(nt_1 - t_0)x_n\}$ は Cauchy 列であるから, $z \equiv \lim_{n\to\infty} T(nt_1 - t_0)x_n$ が存在する. このとき,

$$T(t_0)z = \lim_{n\to\infty} T(t_0)T(nt_1 - t_0)x_n = \lim_{n\to\infty} T(nt_1)x_n = y.$$

$t_0 > 0$ は任意であるから, $y \in \bigcap_{t<0} D(T(t))$.

$$\begin{aligned}
\|T(nt_1)x_n - x\| &\le \|T(nt_1)x_n - T((n-1)t_1)x_{n-1}\| + \cdots + \|T(t_1)x_1 - x\| \\
&< \varepsilon_n + \cdots + \varepsilon_1 \\
&< \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n.
\end{aligned}$$

ここで $n \to \infty$ とすると,

$$\|y - x\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon.$$

よって, $\bigcap_{t<0} D(T(t))$ は Eで稠密である. ■

注意 1. 補題 2.3 より, ある $t_1 < 0$ について $D(T(t_1))$ が Eで稠密ならば, 任意の $t < 0$ について $D(T(t))$ が Eで稠密であることがわかる.

補題 2.4.
$\{T(t)\}_{t\geq 0}$を E上の (C_0) 半群とし, $\{T(t)^*\}_{t\geq 0}$を $\{T(t)\}_{t\geq 0}$の共役半群とする. $\{T(t)\}_{t\geq 0}$が逆一意性をもつならば, 任意の $t \geq 0$ を固定するごとに $R(T(t)^*) = \{T(t)^*x' |\ x' \in E'\}$ は E'で$\sigma(E', E)$-稠密である.

証明.
任意の $t \geq 0$ を固定する. $R(T(t)^*)$ が E'で$\sigma(E', E)$-稠密でないとすると,

$$^{\exists}x \in E\ ;\ x \neq 0,\ \langle x, T(t)^*x' \rangle = 0 \quad (x' \in E').$$

$$\langle T(t)x, x' \rangle = \langle x, T(t)^*x' \rangle = 0 \quad (x' \in E')$$

であるから, $T(t)x = 0$. $\{T(t)\}_{t\geq 0}$は逆一意性をもつので, $x = 0$. これは $x \neq 0$ に矛盾する. よって, $R(T(t)^*)$ は E'で$\sigma(E', E)$-稠密である. ■

補題 2.5.
$\{T(t)\}_{t\geq 0}$を E上の (C_0) 半群とする. 任意の $t > 0$ に対して $R(T(t))$ が Eで稠密ならば, $\{T(t)^*\}_{t\geq 0}$も逆一意性をもつ.

証明.
E'の 2 元 x', y'に対して $T(t_0)^*x' = T(t_0)^*y'$となる $t_0 > 0$ が存在したとする.
このとき, 任意の $x \in E$に対して

$$\langle x, T(t_0)^*x' \rangle = \langle x, T(t_0)^*y' \rangle.$$

よって,

$$\langle T(t_0)x, x' - y' \rangle = 0.$$

仮定より $R(T(t_0))$ は Eで稠密であるから $x' = y'$. ■

注意 2.E上の (C_0) 半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$に対し, ある $t > 0$ について $D(T(-t)) = R(T(t))$ が Eで稠密ならば, 注意 1 から補題 2.5 の仮定が満たされるので, $\{T(t)\}_{t<0}$と同様にして $\{T(t)^*\}_{t<0}$が定義される. 特に Eが回帰的な Banach 空間で $\{T(t)\}_{t\geq 0}$が E上の (C_0) 半群のとき, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$が逆一意性をもつならば, 補題 2.4 より, 任意の $t \geq 0$ を固定するごとに $D(T(-t)^*)(= R(T(t)^*))$ は E'で稠密である. (ここで Eが回帰的な Banach 空間ならば,E'の線形部分空間が E'でノルムの意味で稠密であることと$\sigma(E', E)$ の意味で稠密であることは同値であることに注意.) よって補題 2.3 と同様に, $\bigcap_{t<0} D(T(t)^*)$ は E'で稠密である.

次に本論文の主定理を述べる.

定理 2.6.
Eを可分かつ回帰的な Banach 空間とする. $\{T(t)\}_{t\geq 0}$を E上の (C_0) 半群で, ある $t_1 > 0$ に対して $R(T(t_1))$ が Eで稠密であるとする.
このとき $\{T(t)\}_{t\geq 0}$が逆一意性をもつための必要十分条件は, 分離的な局所凸線形位相空間 Fと$-\infty < t < \infty$ 上の準解析的な関数の族 $C\{b_q\}$ が存在して次の 2 条件を満たすことである:

(I) $E \subset F$で Fの位相は Eの位相より弱く, Eは Fで稠密である.
(II) $\{T(t)\}_{t\geq 0}$は Eから Fへの$\sigma(E, E')$ と$\sigma(F, F')$ に関して連続な線形作用素の群 $\{T(t)\}_{-\infty<t<\infty}$に拡張され, $-\infty < t < \infty$ 上の関数の族 $\{\langle T(t)x, x' \rangle\}_{x\in E,\ x'\in F'}$ は $C\{b_q\}$ に含まれる (ここで F'は Fの共役空間を表す).

ただし, 拡張された$\{T(t)\}_{-\infty<t<\infty}$が$E$から$F$への線形作用素の群であるとは, 次の2条件を満たすことである:

(i) $T(0)=I \quad$ (ただし $Ix=x$ $(x\in E)$),
$$T(t+s)x=T(t)T(s)x \quad \Big(-\infty<t,s<\infty,\ x\in\bigcap_{t<0}D(T(t))\Big).$$

(ii) $\sigma(F,F')\text{-}\lim_{s\to t}T(s)x=T(t)x \quad (x\in E)$.

証明.

(必要性) 注意 2 から, E上の (C_0) 半群 $\{T(t)\}_{t\geq}$の共役半群 $\{T(t)^*\}_{t\geq 0}$に対しても $\{T(t)^*\}_{t<0}$ が定義される. そこで $\{T(t)^*\}_{-\infty<t<\infty}$ を考えることによって, 定理の条件を満たすような分離的な局所凸線形位相空間Fを構成する.

まず$\{T(t)^*\}_{-\infty<t<\infty}$が$\bigcap_{t<0}D(T(t)^*)$ で群であること, すなわち

$$T(t+s)^*x'=T(t)^*T(s)^*x' \quad \Big(-\infty<t,s<\infty,\ x'\in\bigcap_{t<0}D(T(t)^*)\Big),$$

$$T(t)^*x'\ \Big(x'\in\bigcap_{t<0}D(T(t)^*)\Big)\ \text{が}-\infty<t<\infty\ \text{で連続}$$

が成立することに注意する.

Eが可分であることから,E'の閉単位球 $B'\equiv\{x'\in E'\,|\,\|x'\|\leq 1\}$ は$\sigma(E',E)$ に関して距離付け可能なコンパクト集合である ([3] 定理 6.7). よって,B'は$\sigma(E',E)$-可分であるから, $B'\cap\bigcap_{t<0}D(T(t)^*)$ も$\sigma(E',E)$-可分である. 従って, $B'\cap\bigcap_{t<0}D(T(t)^*)$ で$\sigma(E',E)$-稠密な可算集合 $B'_0=\{x'_m|\ m=1,2,\cdots\}$ が存在する. 任意の $x\in E$ $(\|x\|\leq 1)$, $x'_m\in B'_0$ を固定すると, $\langle x,T(t)^*x'_m\rangle$ は t に関して$-\infty<t<\infty$ で連続である. $t\geq 0$ のとき, $\|T(t)^*\|=\|T(t)\|\leq Me^{\omega t}$より,

$$|\langle x,T(t)^*x'_m\rangle|\leq\|x\|\,\|T(t)^*\|\,\|x'_m\|\leq Me^{\omega t}.$$

$t\leq 0$のとき, $\|T(t)^*x'_m\|$ はtについて連続だから, 有界閉区間上では有界となる. そこで

$$\max_{-n\leq t\leq -n+1}\|T(t)^*x'_m\|=M_{m,n} \quad (m=1,2,\cdots,n=1,2,\cdots)$$

とおき,

$$\begin{aligned}&M_1=\max\{M,M_{1,1}\},\\&M_2=\max\{M_{1,2},M_{2,2},M_1\},\cdots\\&M_n=\max\{M_{1,n},M_{2,n},\cdots,M_{n,n},M_{n-1}\},\cdots\end{aligned}$$

とする.
ここで,

$$H(t)=\begin{cases}M_1e^{\omega t} & (t\geq 0).\\(M_n-M_{n+1})t+nM_n-(n-1)M_{n+1} & (t\in[-n,-n+1))\ (n=1,2,\cdots).\end{cases}$$

と定義すれば, $H(t)$ は正の連続関数である.

よって定理Bにより, この $H(t)$ に対して数列 $\{b_q\}$ と$-\infty<t<\infty$ 上の準解析的な族 $C\{b_q\}$ に含まれる関数列 $\{f_k\,|\,k=1,2,\cdots\}$ が存在して定理Bに述べられた3条件を満足する.

このとき各 $m\in\mathbb{N}$ について,

$$^\exists\alpha_m>0\ ;\ |\langle x,T(t)^*x'_m\rangle|\le\alpha_m H(t)\quad(\|x\|\le 1,\ -\infty<t<\infty).$$

ここで,

$$x'_{m,k}=\int_{-\infty}^{\infty}f_k(s)T(-s)^*x'_m\,ds$$

とおく. $T(t)^*$ $(-\infty<t<\infty)$ は $\sigma(E',E)$ に関する閉作用素だから

$$T(t)^*x'_{m,k}=\int_{-\infty}^{\infty}f_k(s)T(t-s)^*x'_m\,ds.$$

任意の $x\in E$ に対して,

$$\langle x,T(t)^*x'_{m,k}\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f_k(s)\langle x,T(t-s)^*x'_m\rangle\,ds\quad(-\infty<t<\infty)$$

であるから, 定理 B(ii) よりこの関数は $C\{b_q\}$ の元となる. よって, $x'_{m,k}$ $(m=1,2,\cdots,k=1,2,\cdots)$ の全体から生成される線形空間を F^* とすると, $\{\langle x,T(t)^*x'\rangle\}_{x\in E,\ x'\in F^*}$ は $C\{b_q\}$ に含まれる. F^* が E' で $\sigma(E',E)$-稠密であることは容易に示される.

いま,

$$F=\Big\{F^*\text{上の線形汎関数の全体}\Big\}$$

とすると, F, F^* は双対をなすので F に分離的な位相 $\sigma(F,F^*)$ が導入される. このとき, F の共役空間 F' は F^* と一致する. この F が求める F となることを示す. 任意の $x\in E$ は E' で $\sigma(E',E)$-連続で, F^* は E' で $\sigma(E',E)$-稠密であるから, x は x を F^* に制限した $x|_{F^*}$ と同一視される. $x|_{F^*}\in F$ であるから, $x\in F$. よって, $E\subset F$. さらに $F^*\subset E'$ より F の位相は E の位相より弱い. また, E は F で稠密である.

$T(t)^*:F^*\to E'$ $(-\infty<t<\infty)$ に対し, 各 $x\in E$ について $\langle x,T(t)^*x'\rangle$ $(x'\in F^*)$ は F の元を決めるから,

$$\langle T(t)^{**}x,x'\rangle=\langle x,T(t)^*x'\rangle\ (x'\in F^*)$$

によって $T(t)^{**}x\in F$ が決まる.

このとき, $T(t)^{**}:E\to F$ は $\sigma(E,E')$ と $\sigma(F,F^*)$ に関して連続である.

この $\{T(t)^{**}\}_{-\infty<t<\infty}$ から $\{T(t)\}_{-\infty<t<\infty}$ を定義する. $t\ge 0$ のときは, $x\in E,\ x'\in F^*$ に対して

$$\langle T(t)^{**}x,x'\rangle=\langle x,T(t)^*x'\rangle=\langle T(t)x,x'\rangle.$$

ゆえに,

$$T(t)x=T(t)^{**}x\quad(x\in E).$$

一般に有界線形作用素 $T:E\to E$ が 1 対 1 で $R(T)$ が E で稠密ならば, $(T^{-1})^*=(T^*)^{-1}$ が成立することを考慮すると, $t<0$ のときは $T(t)$ の共役作用素は $T(t)^*$ に等しいことがわかるから, $t<0$ のとき, $x\in\bigcap_{t<0}D(T(t)),\ x'\in F^*$ に対しては

$$\langle T(t)^{**}x,x'\rangle=\langle x,T(t)^*x'\rangle=\langle T(t)x,x'\rangle.$$

ゆえに,

$$T(t)x=T(t)^{**}x\quad\Big(x\in\bigcap_{t<0}D(T(t))\Big).$$

ところで, $\bigcap_{t<0} D(T(t))$ はEで稠密であるから, 任意の$x \in E$に対して

$$^{\exists}\{x_n\} \subset \bigcap_{t<0} D(T(t))\ ;\ \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

よって,

$$\sigma(E, E')\text{-} \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

$T(t)^{**}$は$\sigma(E, E')$ と$\sigma(F, F^*)$ に関して連続であるから,

$$\begin{aligned} T(t)^{**}x &= \sigma(F, F^*) - \lim_{n\to\infty} T(t)^{**}x_n \\ &= \sigma(F, F^*) - \lim_{n\to\infty} T(t)x_n. \end{aligned}$$

$t < 0$ のときはこのような性質をもった$T(t)^{**}$によって任意の$x \in E$に対して, $T(t)x = T(t)^{**}x$ と定義する. $\{T(t)\}_{-\infty<t<\infty}$は, 定義から$E$から$F$への$\sigma(E, E')$ と$\sigma(F, F^*)$ に関して連続な線形作用素の族であり, $\{\langle T(t)x, x'\rangle\}_{x\in E,\ x'\in F^*}$は$C\{b_q\}$ に含まれる.$\{T(t)\}_{-\infty<t<\infty}$が (i),(ii) をみたす群であることは容易に確かめられる.

(十分性) $x, y \in E$を固定すると, (II) より, 任意の$x' \in F'$に対して

$$\langle T(t)x, x'\rangle,\ \langle T(t)y, x'\rangle \in C\{b_q\}.$$

$t_0 > 0$ に対して$T(t_0)x = T(t_0)y$とすると, 任意の$t \geq t_0$に対して$T(t)x = T(t)y$. よって, 任意の$t \geq t_0$に対して $\langle T(t)x, x'\rangle = \langle T(t)y, x'\rangle$ であるから,$C\{b_q\}$ の一意接続性より

$$\langle T(t)x, x'\rangle = \langle T(t)y, x'\rangle \quad (-\infty < t < \infty)$$

特に$t = 0$ とすると, $\langle x, x'\rangle = \langle y, x'\rangle$ $(x' \in F')$ となるから $x = y$. よって, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$は逆一意性をもつ. ■

最後に, 高村多賀子先生には懇切なご指導と数多くの御助言をいただきました. ここに記して感謝の意を表させていただきます.

参考文献

[1] Y.Kōmura,
Vector-valuded quasi-analytic functions and their applications to partial differential equations,
J. Math. Soc. Japan, **21** (1969), 141–163.

[2] 有澤真理子,
半群が群になる空間の拡張, (1989, 修士論文).

[3] 高村多賀子,
関数解析入門, 朝倉書店.

[4] 宮寺功,
関数解析, 理工学社.

[5] A.Pazy,
Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations,
Springer-verlag.