数理解析研究所講究録
1128巻 2000年 193-201

Positive increasing solutions of systems of second order singular differential equations

谷川 智幸・福岡大学理学部

(Tomoyuki Tanigawa・Fukuoka University)

0. 序

本論文では, 特異な非線形項をもつ2階常微分方程式系

$$\text{(A)}\qquad \begin{cases} (p(t)|y'|^{\alpha-1}y')' = \varphi(t)z^{-\lambda} \\ (q(t)|z'|^{\beta-1}z')' = \psi(t)y^{-\mu}, \qquad t \geq a \end{cases}$$

を考察する. ここで, α, β, λ, μ は正定数, $p(t)$, $q(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ は無限区間 $[a,\infty)$ 上で定義された正の値をとる連続関数とする. また $p(t)$, $q(t)$ は条件

$$\text{(0.1)}\qquad \int_a^\infty (p(t))^{-\frac{1}{\alpha}}dt < \infty, \qquad \int_a^\infty (q(t))^{-\frac{1}{\beta}}dt < \infty$$

を満たすものと仮定する.

(A) の解とは, 区間 $J \subset [a,\infty)$ で定義された正値関数の組 (y,z) で, y, z, $p|y'|^{\alpha-1}y'$ と $q|z'|^{\beta-1}z'$ がともに J 上で連続微分可能かつ J 上の各点で (A) を満たすものをいう. (A) の正値解 (y,z) が区間 $[a,\infty)$ 上で存在するとき, それを正常解 (*proper solution*) と呼び, 最大存在区間が有限であるとき, 特異解 (*singular solution*) と呼ぶ. 正値解 (y,z) の成分 y, z がともに増加 (減少) であるとき増大解 (減少解) と呼ぶ.

我々の目的は, (A) の正値増大解の存在と漸近挙動を解析することである. 関数 $p(t)$, $q(t)$ が積分発散条件

$$\int_a^\infty (p(t))^{-\frac{1}{\alpha}}dt = \infty, \qquad \int_a^\infty (q(t))^{-\frac{1}{\beta}}dt = \infty$$

を満たす場合はすでに論文 [3] で研究されているので, 本論文では $p(t)$, $q(t)$ が積分収束条件 (0.1) を満たす場合に考察を限定する. もう少し詳しく言えば, (0.1) の下で (A) の正値増大解を $t \to \infty$ のときの漸近挙動に従って9つのクラスに分類し, 分類されたクラスの各々に属する解の存在性を調べる.

(A) の正値減少解の存在と漸近行動は草野-谷川 [2] によって考察されている. 2階非線形微分方程式系に関する関連ある文献として [1,4,5–7] を挙げておく.

(A) に対する初期値問題, すなわち (A) の解 (y,z) で初期条件

$$y(a) = y_0, \quad (p(a))^{\frac{1}{\alpha}}y'(a) = y_1, \quad z(a) = z_0, \quad (q(a))^{\frac{1}{\beta}}z'(a) = z_1$$

を満たすものを求める問題は, 任意の $y_0 > 0$, $z_0 > 0$, $y_1 \geq 0$, $z_1 \geq 0$ に対して, 区間 $[a,\infty)$ 全体で存在する一意解をもつことが示される. (A) の右辺の非線形項が負べきであるため

に, 正値増大解 (y,z) はすべて正常解になることに注意する.

(y,z) を区間 $[a,\infty)$ 上で定義された正値増大解とする. $y'(t)$ と $z'(t)$ が正であるから, 関数 $p(t)|y'(t)|^{\alpha-1}y'(t)$ と $q(t)|z'(t)|^{\beta-1}z'(t)$ は $[a,\infty)$ 上正値増加関数で, $t\to\infty$ のときの極限は,

$$\lim_{t\to\infty} p(t)(y'(t))^{\alpha} = \text{const} > 0 \quad \text{あるいは} \quad \lim_{t\to\infty} p(t)(y'(t))^{\alpha} = \infty, \tag{0.2}$$

$$\lim_{t\to\infty} q(t)(z'(t))^{\beta} = \text{const} > 0 \quad \text{あるいは} \quad \lim_{t\to\infty} q(t)(z'(t))^{\beta} = \infty. \tag{0.3}$$

の何れかになる. $p(t)(y'(t))^{\alpha}$ $\left[q(t)(z'(t))^{\beta}\right]$ の $t\to\infty$ のときの, 極限値が有限ならば, $y(t)$ $[z(t)]$ は $[a,\infty)$ 上有界であることに注意する. こうして, (A) の正値増大解は $t\to\infty$ のときの漸近挙動に従って次の 9 つのタイプに分類される.

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \lim_{t\to\infty} y(t) = \text{const} > 0, & \lim_{t\to\infty} (p(t))^{\frac{1}{\alpha}} y'(t) = \text{const} > 0 \\ \lim_{t\to\infty} z(t) = \text{const} > 0, & \lim_{t\to\infty} (q(t))^{\frac{1}{\beta}} z'(t) = \text{const} > 0, \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \lim_{t\to\infty} y(t) = \text{const} > 0, & \lim_{t\to\infty} (p(t))^{\frac{1}{\alpha}} y'(t) = \text{const} > 0 \\ \lim_{t\to\infty} z(t) = \text{const} > 0, & \lim_{t\to\infty} (q(t))^{\frac{1}{\beta}} z'(t) = \infty, \end{cases}$$

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \lim_{t\to\infty} y(t) = \text{const} > 0, & \lim_{t\to\infty} (p(t))^{\frac{1}{\alpha}} y'(t) = \infty \\ \lim_{t\to\infty} z(t) = \text{const} > 0, & \lim_{t\to\infty} (q(t))^{\frac{1}{\beta}} z'(t) = \text{const} > 0, \end{cases}$$

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} \lim_{t\to\infty} y(t) = \text{const} > 0, & \lim_{t\to\infty} (p(t))^{\frac{1}{\alpha}} y'(t) = \infty \\ \lim_{t\to\infty} z(t) = \text{const} > 0, & \lim_{t\to\infty} (q(t))^{\frac{1}{\beta}} z'(t) = \infty, \end{cases}$$

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} \lim_{t\to\infty} y(t) = \text{const} > 0, & \lim_{t\to\infty} (p(t))^{\frac{1}{\alpha}} y'(t) = \text{const} > 0 \\ \lim_{t\to\infty} z(t) = \infty, & \lim_{t\to\infty} (q(t))^{\frac{1}{\beta}} z'(t) = \infty, \end{cases}$$

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} \lim_{t\to\infty} y(t) = \infty, & \lim_{t\to\infty} (p(t))^{\frac{1}{\alpha}} y'(t) = \infty \\ \lim_{t\to\infty} z(t) = \text{const} > 0, & \lim_{t\to\infty} (q(t))^{\frac{1}{\beta}} z'(t) = \text{const} > 0, \end{cases}$$

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} \lim_{t\to\infty} y(t) = \text{const} > 0, & \lim_{t\to\infty} (p(t))^{\frac{1}{\alpha}} y'(t) = \infty \\ \lim_{t\to\infty} z(t) = \infty, & \lim_{t\to\infty} (q(t))^{\frac{1}{\beta}} z'(t) = \infty, \end{cases}$$

$$
\text{(VIII)} \qquad \begin{cases} \lim_{t\to\infty} y(t) = \infty, & \lim_{t\to\infty} (p(t))^{\frac{1}{\alpha}} y'(t) = \infty \\ \lim_{t\to\infty} z(t) = \text{const} > 0, & \lim_{t\to\infty} (q(t))^{\frac{1}{\beta}} z'(t) = \infty, \end{cases}
$$

$$
\text{(IX)} \qquad \begin{cases} \lim_{t\to\infty} y(t) = \infty, & \lim_{t\to\infty} (p(t))^{\frac{1}{\alpha}} y'(t) = \infty \\ \lim_{t\to\infty} z(t) = \infty, & \lim_{t\to\infty} (q(t))^{\frac{1}{\beta}} z'(t) = \infty. \end{cases}
$$

タイプ (I), (II), (III), (IV) の解を *weakly increasing solution*, タイプ (V), (VI), (VII), (VIII) の解を, *semi-strongly increasing solution*, タイプ (IX) の解を *strongly incrsupport solution* と呼ぶことがある.

1. Weakly increasing solutions

この節では, (A) の弱増大解タイプ (I), (II), (IV) について考察し, これらの解に対しては存在の特徴付けが可能であることを示す. (III) は (II) と本質的に同じである.

(y,z) を $[a,\infty)$ 上の (A) の弱増大解とする. (A) を 2 回積分すれば,

$$
y(t) = y(\infty) - \int_t^\infty \left[(p(s))^{-1} \left(y_1^\alpha + \int_a^s \varphi(r)(z(r))^{-\lambda} dr \right) \right]^{\frac{1}{\alpha}} ds, \tag{1.1}
$$

$$
z(t) = z(\infty) - \int_t^\infty \left[(q(s))^{-1} \left(z_1^\beta + \int_a^s \psi(r)(y(r))^{-\mu} dr \right) \right]^{\frac{1}{\beta}} ds, \quad t \ge a \tag{1.2}
$$

が得られる. $y_1 = y'(a)$, $z_1 = z'(a)$, $y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t)$, $z(\infty) = \lim_{t\to\infty} z(t)$ である.

定理 1.1. (0.1) を仮定する. (A) が弱増大解タイプ (I) をもつための必要十分条件は,

$$
\int_a^\infty \varphi(t)dt < \infty, \qquad \int_a^\infty \psi(t)dt < \infty \tag{1.3}
$$

が成立つことである.

証明: (必要性) (y,z) が (A) のタイプ (I) の弱増大解ならば, ある正定数 k, k', l, l' に対して, 不等式

$$
k \le y(t) \le k', \quad l \le z(t) \le l', \quad t \ge a
$$

が成立つ. これと (1.1), (1.2) から得られる関係

$$
\int_a^\infty \varphi(t)(z(t))^{-\lambda} dt < \infty, \qquad \int_a^\infty \psi(t)(y(t))^{-\mu} dt < \infty
$$

を組み合わせると (1.3) が容易に導かれる.

(十分性) (1.3) を仮定する.

$$
\Phi_1^{\frac{1}{\alpha}} \pi(a) \le d^{\frac{\lambda}{\alpha}} c, \qquad \Psi_1^{\frac{1}{\beta}} \rho(a) \le c^{\frac{\mu}{\beta}} d
$$

が成立つように定数 $c > 0$ と $d > 0$ を選ぶ. ただし,

$$
\Phi_1 = \int_a^\infty \varphi(t)dt, \quad \Psi_1 = \int_a^\infty \psi(t)dt, \quad \pi(a) = \int_a^\infty (p(t))^{-\frac{1}{\alpha}} dt, \quad \rho(a) = \int_a^\infty (q(t))^{-\frac{1}{\beta}} dt
$$

である. ベクトル関数 (y,z) の集合 $\mathcal{Y}$ と写像 $\mathcal{F}:\mathcal{Y}\to C[a,\infty)\times C[a,\infty)$ を

$$\mathcal{Y}=\{(y,z)\in C[a,\infty)\times C[a,\infty):\ \ c\le y(t)\le 2c,\ \ d\le z(t)\le 2d,\ \ t\ge a\},$$

$$\mathcal{F}(y,z)(t)=(\mathcal{G}z(t),\mathcal{H}y(t)),\qquad (y,z)\in\mathcal{Y}$$

によって定義する. ここで, $\mathcal{G}$ と $\mathcal{H}$ は積分作用素

$$\begin{cases}\mathcal{G}z(t)\ =2c-\displaystyle\int_t^\infty\left[(p(s))^{-1}\left(d^{-\lambda}\Phi_1-\int_s^\infty\varphi(r)(z(r))^{-\lambda}dr\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}}ds,\\ \mathcal{H}y(t)=2d-\displaystyle\int_t^\infty\left[(q(s))^{-1}\left(c^{-\mu}\Psi_1-\int_s^\infty\psi(r)(y(r))^{-\mu}dr\right)\right]^{\frac{1}{\beta}}ds,\qquad t\ge a\end{cases}$$

を表わす. 容易に,

(i) $\mathcal{F}(\mathcal{Y})\subset\mathcal{Y}$ であること,

(ii) $\mathcal{F}$ は連続であること,

(iii) $\mathcal{F}(\mathcal{Y})$ は $C[a,\infty)\times C[a,\infty)$ においての相対コンパクトであること,

が示されるから, Schauder-Tychonoff の不動点定理によって, $\mathcal{Y}$ の中に $\mathcal{F}$ の不動点 (y,z) が存在する:

$$\exists(y,z)\in\mathcal{Y}:\ \ (y,z)=\mathcal{F}(y,z).$$

この不動点 (y,z) は積分方程式系

$$(1.4)\qquad\begin{cases}y(t)=2c-\displaystyle\int_t^\infty\left[(p(s))^{-1}\left(d^{-\lambda}\Phi_1-\int_s^\infty\varphi(r)(z(r))^{-\lambda}dr\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}}ds\\ z(t)=2d-\displaystyle\int_t^\infty\left[(q(s))^{-1}\left(c^{-\mu}\Psi_1-\int_s^\infty\psi(r)(y(r))^{-\mu}dr\right)\right]^{\frac{1}{\beta}}ds,\qquad t\ge a\end{cases}$$

を満たす. (1.4) を 2 回微分することによって, (y,z) が (A) の正値解であることが分る. また明らかに

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=2c>0,\qquad \lim_{t\to\infty}z(t)=2d>0$$

が成立つ. これは (y,z) が区間 $[a,\infty)$ 上で定義される弱増大解タイプ (I) の解であることを示している. (証明終)

タイプ (II), (IV) の弱増大解については次の定理が成立つ.

定理 1.2. (0.1) を仮定する. (A) が弱増大解タイプ (II) をもつための必要十分条件は, (1.3) と

$$(1.5)\qquad \int_a^\infty\psi(t)dt=\infty,\qquad \int_a^\infty\left[(q(t))^{-1}\int_a^t\psi(s)ds\right]^{\frac{1}{\beta}}dt<\infty$$

が成立つことである.

定理 1.3. (0.1) を仮定する. (A) が弱増大解タイプ (IV) をもつための必要十分条件は, (1.5) と

$$\int_a^\infty \varphi(t)dt = \infty, \qquad \int_a^\infty \left[(p(t))^{-1}\int_a^t \varphi(s)ds\right]^{\frac{1}{\alpha}} dt < \infty \tag{1.6}$$

が成立つことである.

2. Strongly and semi-strongly increasing solutions

次にタイプ (V), (VII), (IX) の (A) の増大解の存在を考察する.

(y,z) を区間 $[a,\infty)$ 上の (A) の増大解とする. (A) を a から t まで 2 回積分すると

$$y(t) = y_0 + \int_a^t \left[(p(s))^{-1}\left(y_1^\alpha + \int_a^s \varphi(r)(z(r))^{-\lambda}dr\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}} ds, \tag{2.1}$$

$$z(t) = z_0 + \int_a^t \left[(q(s))^{-1}\left(z_1^\beta + \int_a^s \psi(r)(y(r))^{-\mu}dr\right)\right]^{\frac{1}{\beta}} ds, \quad t \ge a \tag{2.2}$$

が得られる.

(y,z) をタイプ (IX) の解とする. (2.1) と (2.2) において $t \to \infty$ とすれば,

$$\int_a^\infty \left[(p(t))^{-1}\int_a^t \varphi(s)(z(s))^{-\lambda}ds\right]^{\frac{1}{\alpha}} dt = \int_a^\infty \left[(q(t))^{-1}\int_a^t \psi(s)(y(s))^{-\mu}ds\right]^{\frac{1}{\beta}} dt = \infty \tag{2.3}$$

が成立つ. この (2.3) と不等式 $y(t) \ge k,\ z(t) \ge l,\ t \ge a$ ($k,\ l$ は正定数) を組み合わせると,

$$\int_a^\infty \left[(p(t))^{-1}\int_a^t \varphi(s)ds\right]^{\frac{1}{\alpha}} dt = \int_a^\infty \left[(q(t))^{-1}\int_a^t \psi(s)ds\right]^{\frac{1}{\beta}} dt = \infty \tag{2.4}$$

が得られる. これがタイプ (IX) の解の存在のための必要条件である.

次に (A) がタイプ (V) の解 (y,z) をもつための必要条件は

$$\int_a^\infty \left[(q(t))^{-1}\int_a^t \psi(s)ds\right]^{\frac{1}{\beta}} dt = \infty, \tag{2.5}$$

$$\int_b^\infty \varphi(t)(\Psi(t))^{-\lambda}dt < \infty, \quad b > a \tag{2.6}$$

が成立つことであることを示す. ここで, 関数 Ψ: $[a,\infty) \to \mathbb{R}$ は

$$\Psi(t) = \int_a^t \left[(q(s))^{-1}\int_a^s \psi(r)dr\right]^{\frac{1}{\beta}} ds, \quad t \ge a \tag{2.7}$$

で定義される. 実際, 不等式 $y(t) \ge k, t \ge a$ (k は正定数) と (2.2) を組み合わせると,

$$\begin{aligned} z(t) &\le z_0 + \int_a^t \left[(q(s))^{-1}\left(z_1^\beta + k^{-\mu}\int_a^s \psi(r)dr\right)\right]^{\frac{1}{\beta}} ds \\ &\le z_0 + (2z_1^\beta)^{\frac{1}{\beta}}\int_a^t (q(s))^{-\frac{1}{\beta}}ds + (2k^{-\mu})^{\frac{1}{\beta}}\int_a^t \left[(q(s))^{-1}\int_a^s \psi(r)dr\right]^{\frac{1}{\beta}} ds, \quad t \ge a \end{aligned} \tag{2.8}$$

が得られる．$t \to \infty$ のとき $z(t) \to \infty$ であるから，$\int_a^\infty (q(t))^{-\frac{1}{\beta}} dt < \infty$ に注意すると，上の不等式から (2.5) が得られる．次に不等式 (2.8) から，$z(t)$ に対して

$$z(t) \le m\Psi(t), \quad t > b \tag{2.9}$$

となる定数 $m > 0$ が存在することに注意する．これを，明らかに成立つ関係

$$\int_a^\infty \varphi(t)(z(t))^{-\lambda} dt < \infty$$

に代入すると，

$$m^{-\lambda} \int_b^\infty \varphi(t)(\Psi(t))^{-\lambda} dt < \infty, \quad b > a$$

が得られる．

同様の論法で，(A) がタイプ (VII) の解をもつための必要条件は (2.5), $\int_a^\infty \varphi(t)dt = \infty$,

$$\int_b^\infty \left[(p(t))^{-1} \int_b^t \varphi(s)(\Psi(s))^{-\lambda} ds\right]^{\frac{1}{\alpha}} dt < \infty, \quad b > a \tag{2.10}$$

が成立つことであることを証明することができる．

タイプ (V), (VII), (IX) の解の存在のための十分条件は下記の定理で与えられる．

定理 2.1. (0.1) を仮定する．(1.3) と (2.5) が成立つならば，(A) はタイプ (V) の増大解をもつ．しかも，このとき (A) の正値増大解はすべてタイプ (V) の解になる．

定理 2.2. (0.1) を仮定する．(2.5),

$$\int_a^\infty \left[(p(t))^{-1} \int_a^t \varphi(s) ds\right]^{\frac{1}{\alpha}} dt < \infty, \tag{2.11}$$

$$\int_b^\infty \varphi(t)(\Psi(t))^{-\lambda} dt = \infty, \quad b > a \tag{2.12}$$

が成立つならば，(A) はタイプ (VII) の増大解をもつ．しかも，このとき (A) の正値増大解はすべてタイプ (VII) の解になる．

定理 2.3. (0.1) を仮定する．条件 (2.4) に加え，

$$\int_b^\infty \left[(p(t))^{-1} \int_b^t \varphi(s)(\Psi(s))^{-\lambda} ds\right]^{\frac{1}{\alpha}} dt = \infty, \tag{2.13}$$

$$\int_b^\infty \left[(q(t))^{-1} \int_b^t \psi(s)(\Phi(s))^{-\mu} ds\right]^{\frac{1}{\beta}} dt = \infty, \quad b > a \tag{2.14}$$

が成立つならば，(A) はタイプ (IX) の増大解をもつ．しかも，このとき (A) の正値増大解はすべてタイプ (IX) の解になる．ここで，関数 Φ: $[a, \infty) \to \mathbb{R}$ は

$$\Phi(t) = \int_a^t \left[(p(s))^{-1} \int_a^s \varphi(r) dr\right]^{\frac{1}{\alpha}} ds, \quad t \ge a \tag{2.15}$$

で定義される.

注意: (A) のタイプ (IX) の増大解 (y,z) の $t\to\infty$ のときの増大度を調べる. z 成分に対して不等式 (2.9) を導いた論法を用いることによって, y 成分に対しても

$$y(t)\le n\Phi(t),\qquad t\ge b \tag{2.16}$$

となる正定数 n が存在することが分る. (2.1), (2.2) から得られる不等式

$$y(t)\ge\int_a^t\left[(p(s))^{-1}\int_a^s\varphi(r)(z(r))^{-\lambda}dr\right]^{\frac{1}{\alpha}}ds,$$

$$z(t)\ge\int_a^t\left[(q(s))^{-1}\int_a^s\psi(r)(y(r))^{-\mu}dr\right]^{\frac{1}{\beta}}ds,\qquad t\ge a$$

に (2.9) と (2.16) を代入すれば

$$\begin{cases} y(t)\ge m^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\displaystyle\int_b^t\left[(p(s))^{-1}\int_b^s\varphi(r)(\Psi(r))^{-\lambda}dr\right]^{\frac{1}{\alpha}}ds, \\ z(t)\ge n^{-\frac{\mu}{\beta}}\displaystyle\int_b^t\left[(q(s))^{-1}\int_b^s\psi(r)(\Phi(r))^{-\mu}dr\right]^{\frac{1}{\beta}}ds,\qquad t\ge b \end{cases}$$

を得る. これは (y,z) の増大度の下からの評価を与える.

3. Example

例 3.1.

$$\begin{cases} (e^{\alpha t}|y'|^{\alpha-1}y')'=ke^{\gamma t}z^{-\lambda} \\ (e^{\beta t}|z'|^{\beta-1}z')'=le^{\delta t}y^{-\mu},\qquad t\ge 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

を考える. ここで, α, β, λ, μ, k, l は正定数, γ, δ は定数とする. $p(t)=e^{\alpha t}$, $q(t)=e^{\beta t}$ は明らかに条件 (0.1) を満たす. また, $\varphi(t)=ke^{\gamma t}$, $\psi(t)=le^{\delta t}$ に対して以下の (3.2)–(3.9) が成立つことが示される.

$$\int_0^\infty\varphi(t)dt<\infty\iff\gamma<0; \tag{3.2}$$

$$\int_0^\infty\psi(t)dt<\infty\iff\delta<0; \tag{3.3}$$

$$\int_0^\infty\varphi(t)dt=\infty,\quad\int_0^\infty\left[(p(t))^{-1}\int_0^t\varphi(s)ds\right]^{\frac{1}{\alpha}}dt<\infty\iff 0\le\gamma<\alpha; \tag{3.4}$$

$$\int_0^\infty\psi(t)dt=\infty,\quad\int_0^\infty\left[(q(t))^{-1}\int_0^t\psi(s)ds\right]^{\frac{1}{\beta}}dt<\infty\iff 0\le\delta<\beta. \tag{3.5}$$

$$\Phi(t)=\int_0^t\left[(p(s))^{-1}\int_0^s\varphi(r)dr\right]^{\frac{1}{\alpha}}ds,\qquad \Phi(t)\approx\begin{cases} e^{\frac{\delta-\beta}{\beta}t} & (\gamma\ne 0) \\ t^{\frac{1}{\beta}}e^{-t} & (\gamma=0) \end{cases}$$

$$\Psi(t) = \int_0^t \left[(q(s))^{-1}\int_0^s \psi(r)dr\right]^{\frac{1}{\beta}} ds, \qquad \Psi(t) \approx \begin{cases} e^{\frac{\delta-\beta}{\beta}t} & (\gamma \neq 0) \\ t^{\frac{1}{\beta}} e^{-t} & (\gamma = 0) \end{cases}$$

$$(3.6) \qquad \int_b^\infty \varphi(t)(\Psi(t))^{-\lambda}dt < \infty \iff \gamma < \frac{\lambda(\delta-\beta)}{\beta};$$

$$(3.7) \qquad \int_b^\infty \psi(t)(\Phi(t))^{-\mu}dt < \infty, \iff \delta < \frac{\mu(\gamma-\alpha)}{\alpha};$$

$$(3.8) \qquad \int_b^\infty \left[(p(t))^{-1}\int_b^t \varphi(s)(\Psi(s))^{-\lambda}ds\right]^{\frac{1}{\alpha}} dt = \infty \iff \gamma \geq \alpha + \frac{\lambda(\delta-\beta)}{\beta};$$

$$(3.9) \qquad \int_b^\infty \left[(q(t))^{-1}\int_b^t \psi(s)(\Phi(s))^{-\mu}ds\right]^{\frac{1}{\beta}} dt = \infty \iff \delta \geq \beta + \frac{\mu(\gamma-\alpha)}{\alpha}, \quad b > 0.$$

(i) $\gamma < 0, \delta < 0$ ならば, (3.1) はタイプ (I) の解をもつ.

(ii) $\gamma < 0, 0 \leq \delta < \beta$ ならば, (3.1) はタイプ (II) の解をもつ.

(iii) $0 \leq \gamma < \alpha, 0 \leq \delta < \beta$ ならば, (3.1) はタイプ (IV) の解をもつ.

(iv) $\gamma < 0, \delta \geq \beta$ ならば, (3.1) はタイプ (V) の解をもつ.

(v) $\dfrac{\lambda(\delta-\beta)}{\beta} \leq \gamma < \alpha, \delta \geq \beta$ ならば, (3.1) はタイプ (VII) の解をもつ.

(vi) $\gamma \geq \alpha + \dfrac{\lambda(\delta-\beta)}{\beta}, \delta \geq \beta + \dfrac{\mu(\gamma-\alpha)}{\alpha}$ ならば, (3.1) はタイプ (IX) の解をもつ.

最後に (A) に対する結果から, 楕円型偏微分方程式系

$$(3.10) \qquad \begin{cases} \operatorname{div}(|Du|^{m-2}Du) = |x|^k v^{-\lambda} \\ \operatorname{div}(|Dv|^{n-2}Dv) = |x|^l u^{-\mu}, \quad x \in E_a \end{cases}$$

の外部領域における球面対称解の $|x| \to \infty$ のときの漸近挙動についての有益な情報が得られることに注意する.

参考文献

[1] P. Clement, R. Manasevich and E, Mitidieri, Positive solutions for a quasilinear systems via blow up, Comm. Partial Differential Equations, **18** (1993) 2071–2106.

[2] T. Kusano and T. Tanigawa, Positive decreasing solutions of systems of second order singular differential equations, J. Inequal. Appl. (to appear)

[3] T. Kusano and T. Tanigawa, Positive increasing solutions of singular differential systems of second order, Proc. Inst. Math., NAS of Belarus (to appear)

[4] M. Motai and H. Usami, On positive decaying solutions of singular quasilinear ordinary differential equations, preprint.

[5] Y. Qi, The existence and non-existence theorems for ground states of nonlinear elliptic systems, Comm. Partial Differential Equations, **23** (1998), 1749–1780.

[6] T. Teramoto, Existence and nonexistence of positive entire solutions of second order semilinear elliptic systems, Funkcial. Ekvac, **42** (1999), 241–260

[7] H. Usami, Positive solution of singular Emden-Fowler type systems, Hiroshima Math. J. **22** (1992), 421–431.