数理解析研究所講究録
1128巻 2000年 59-67

2階準線形常微分方程式の正値解の漸近形の決定とその応用

広島大・理　加茂憲一
(Kamo, Ken-ichi)
広島大・総合科　宇佐美広介
(Usami, Hiroyuki)

§0. 序

$\alpha, \lambda > 0$, $p \in C([t_0,\infty);(0,\infty))$, $t_0 \geq 0$, として2階準線形常微分方程式(ODE)

$$(|u'|^{\alpha-1}u')' = p(t)|u|^{\lambda-1}u \tag{E}$$

を考えよう. $\alpha=1$の場合(E)はEmden-Fowler方程式とよばれ天体力学や原子物理学のある種の現象に現れることが知られている. 本研究では更に条件

$$p(t) \sim t^{\sigma} \text{ as } t \to \infty, \ \sigma \in \mathbb{R}, \tag{H}$$

を仮定して(E)の全ての正値解の漸近形を導くことを目指す. またその結果の準線形楕円型外部Dirichlet問題への応用も紹介する.

なお本稿では"$f(t) \sim g(t)$ as $t \to \infty$"とは$\lim_{t\to\infty} f(t)/g(t) = 1$の意味とする. また単に"(E)の正値解"といったときには$+\infty$のある近傍で定義される古典解のこととする.

(E)の正値解uに対してu'は増加関数なので(E)の正

値解uは大ざっぱには先験的に次の4つのうちどれかの漸近挙動を持つ：

$$\text{(i)} \quad \lim_{t\to\infty} u'(t) = \lim_{t\to\infty} u(t) = 0;$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{t\to\infty} u'(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} u(t) = \text{定数} \in (0,\infty);$$

$$\text{(iii)} \quad \lim_{t\to\infty} u'(t) = \lim_{t\to\infty} u(t)/t = \text{定数} \in (0,\infty);$$

$$\text{(iv)} \quad \lim_{t\to\infty} u'(t) = \lim_{t\to\infty} u(t)/t = +\infty.$$

(E)が(i)～(iv)の各タイプの正値解を持つための必要 and/or 十分条件は知られている[3]．特に(H)を仮定したときには必要十分条件をα, λ, σを用いて書き表すことができる[3]．

(ii)型と(iii)型の正値解は漸近表現の top term が分かっているのである意味で解析しやすい．一方 (i)型と(iv)型は top term すら不明確なので扱いにくそうである．しかし(H)の仮定のもとでは以下に見るように漸近公式を見つけることができる．

その解決の糸口をつかむために(E)で$p(t)\equiv t^\sigma$のときを考えてみよう：

$$(|u'|^{\alpha-1}u')' = t^\sigma |u|^{\lambda-1}u.$$

この方程式の形からして ct^ℓ $(c>0,\ \ell\in\mathbb{R})$ の形の正値解を探そうとするのは自然であろう．実際

$$k = \frac{\sigma+\alpha+1}{\alpha-\lambda}, \qquad \hat{c}^{\lambda-\alpha} = \alpha k(k-1)|k|^{\alpha-1}$$

として $k(k-1)>0$ のとき，すなわち $k<0$ または $k>1$ のとき

$$u_0(t) \equiv \hat{c}\, t^{k}$$

という形の厳密解 u_0 が存在する.

$k<0$ のとき u_0 は (i) 型であり $k>1$ のときは (iv) 型になっている. よって条件 (H) のもとでも (E) の (i) 型, (iv) 型の正値解はこの u_0 と同様な振舞いをすると予想できる. この予想は正しいことを以下で見ることができよう.

§1. 主結果

<u>定理 1</u>　$\alpha<\lambda$ かつ (H) とする.

(i) $\sigma+\alpha+1>0$ ($\Leftrightarrow k<0$) のとき (E) の正値解 u の挙動は全て

$$u(t) \sim u_0(t) \qquad \text{as} \quad t\to\infty.$$

(ii) $\sigma+\alpha+1=0$ ($\Leftrightarrow k=0$) のとき (E) の正値解 u の挙動は全て

$$u(t) \sim \alpha^{\frac{1}{\lambda-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\lambda-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\lambda-\alpha}}(\log t)^{-\frac{\alpha}{\lambda-\alpha}} \qquad \text{as} \quad t\to\infty.$$

(iii) $\sigma+\alpha+1<0\leqq\sigma+\lambda+1$ ($\Leftrightarrow 0<k\leqq 1$) のとき (E) の正値解 u の挙動は全て

$$u(t)\sim c_1 \quad \text{as } t\to\infty \quad (c_1>0 : u \text{に依存する定数}).$$

(iv) $\sigma+\lambda+1<0$ ($\Leftrightarrow k>1$) のとき (E) の正値解 u の挙動は次のいずれかである:

$$u(t)\sim u_0(t), \quad u(t)\sim c_1, \quad u(t)\sim c_2\, t, \quad \text{as } t\to\infty$$

($c_1, c_2 > 0$: uに依存した定数).

定理2　$\alpha > \lambda$ かつ (H) とする.

(i) $\sigma+\alpha+1<0$ ($\Leftrightarrow k<0$) のとき (E) の正値解 u の挙動は次のいずれかである:

$$u(t) \sim u_0(t),\quad u(t) \sim c_1,\quad u(t) \sim c_2 t,\quad \text{as } t \to \infty$$

($c_1, c_2 > 0$: uに依存した定数).

(ii) $\sigma+\lambda+1 < 0 \leqq \sigma+\alpha+1$ ($\Leftrightarrow 0 \leqq k < 1$) のとき (E) の正値解 u の挙動は全て

$$u(t) \sim c_1 t \quad \text{as } t \to \infty \quad (c_1 > 0:\ u\text{に依存する定数}).$$

(iii) $\sigma+\lambda+1 = 0$ ($\Leftrightarrow k=1$) のとき (E) の正値解 u の挙動は全て

$$u(t) \sim \left(\frac{\alpha-\lambda}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-\lambda}} t\,(\log t)^{\frac{1}{\alpha-\lambda}} \quad \text{as } t \to \infty.$$

(iv) $\sigma+\lambda+1 > 0$ ($\Leftrightarrow k>1$) のとき (E) の正値解 u の挙動は全て

$$u(t) \sim u_0(t) \quad \text{as } t \to \infty.$$

定理2(i)を用いて次のことも示せる:

系　定理2(i)の仮定のもとで (E) の $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ なる正値解は一意的である.

§2 証明の概略

主結果のうちいくつかの部分の証明のアウトラインを紹介する. 詳細は[1]等を参照せよ. 以下(H)を仮定するときには $p(t)=t^{\sigma}(1+\varepsilon(t))$, $\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=0$ という表示も用いる.

<u>定理1(iv)の証明</u>　uを(E)の正値解とする. (iv)型の正値解として考えれば十分であろう. まず $u(t)=O(u_0(t))$, $u'(t)=O(u_0'(t))$, as $t\to\infty$ がわかる. そして変数変換 $t=e^s$, $v(s)=u(t)/u_0(t)$ を施すと(E)は次に移る:

$$((\dot v+kv)^{\alpha *})^{\cdot}+\alpha(k-1)(\dot v+kv)^{\alpha *}$$

$$=\alpha(k-1)k^{\alpha *}(1+\varepsilon(e^s))\,v^{\lambda},$$

ただし $\cdot=d/ds$, $\xi\in\mathbb{R}$に対して $\xi^{\alpha *}=|\xi|^{\alpha-1}\xi$ とする. $u'>0$なることより $\dot v+kv>0$ がわかるので上式は

$$\ddot v+(2k-1)\dot v+k(k-1)v$$

$$=k^{\alpha}(k-1)(1+\varepsilon(e^s))\,v^{\lambda}(\dot v+kv)^{1-\alpha}$$

となる. これより有限な $\lim_{s\to\infty}v(s)$ の存在が示せる. 半線形ODEの比較定理等を援用して $\lim_{s\to\infty}v(s)=1$ が分る; つまり $u(t)\sim u_0(t)$ as $t\to\infty$ である. ■

実は定理1(i)(ii)よりもっと一般的な次の命題が成り立つ——. $a, b\in C([t_0,\infty);(0,\infty))$ として同じタイプのODE

$$(|x'|^{\alpha-1}x')'=a(t)|x|^{\lambda-1}x \tag{1}$$

$$(|y'|^{\alpha-1}y')' = b(t)|y|^{\lambda-1}y \tag{2}$$

を考える.

<u>命題</u>　$\alpha < \lambda$ かつ $a(t) \sim b(t)$ as $t \to \infty$, $\int^{\infty}\left(\int_t^{\infty} a(s)ds\right)^{1/\alpha} dt = \infty$ とする. x, y を各々方程式 (1), (2) の $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ となる正値解とすると $x(t) \sim y(t)$ as $t \to \infty$ である.

定理1 (i) は u_0 の定義とこの命題より直ぐわかる. 定理1 (ii) を示すには方程式

$$(|v'|^{\alpha-1}v')' = \frac{1}{t^{\alpha+1}}\left\{1 + \frac{\lambda}{(\lambda-\alpha)\log t}\right\}|v|^{\lambda-1}v$$

が $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$ となる正値解として

$$v(t) = \alpha^{\frac{1}{\lambda-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\lambda-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\lambda-\alpha}}(\log t)^{-\frac{\alpha}{\lambda-\alpha}}$$

を持つことに注意すればよい.

§3　応用

次のような2階準線形楕円型方程式に対する外部境界値問題を考えよう:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2}\nabla u) = q(x)|u|^{\lambda-1}u & \text{in } \Omega \\ \\ u = g(x) & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

ここにおいて常に次を仮定しよう:

$$\Omega:\ \mathbb{R}^N \text{の外部領域で } \partial\Omega \in C^1;$$
$$0 < m-1 < \lambda;\quad 2 \leqq N < m;$$
$$g \in C(\mathbb{R}^N;(0,\infty));\quad g \in C^1(\partial\Omega;(0,\infty));$$
$$g(x) \sim c_1|x|^{\sigma_1} \text{ as } |x|\to\infty \ (c_1>0,\ \sigma_1\in\mathbb{R} \text{は定数}).$$

ODEに対する先の結果と [2] の supersolution-subsolution 法を用いて(P)の種々の漸近挙動を持つ正値解の存在を示すことができる.

定理3 (i) $\sigma_1 > -m$ とすると境界値問題(P)は次のような正値解 $u \in W^{1,m}_{loc}(\Omega)$ を持つ:

$$u(x) \sim b|x|^{-\mu} \qquad \text{as } |x|\to\infty,$$

ただし

$$b^{\lambda-m+1} = \frac{|m+\sigma_1|^{m-1}\,|\sigma_1 m - \sigma_1 + m\lambda - N\lambda - N + mN|}{c_1(m-1)^{m-1}(\lambda+1-m)^m}, \tag{3}$$

$$\mu = \frac{m+\sigma_1}{\lambda+1-m}\ (>0).$$

(ii) $\sigma_1 = -m$ とすると境界値問題(P)は次のような正値解 $u \in W^{1,m}_{loc}(\Omega)$ を持つ:

$$u(x) \sim \left(\frac{m-N}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda-m+1}}\left(\frac{m-1}{\lambda-m+1}\right)^{\frac{m-1}{\lambda-m+1}}(\log|x|)^{-\frac{m-1}{\lambda-m+1}} \quad \text{as } |x|\to\infty.$$

(iii) $(m-1)(N+\sigma_1)+\lambda(m-N) < 0$ とすると境界値問題(P)は次のような正値解 $u \in W^{1,m}_{loc}(\Omega)$ を持つ:

$$0 < \liminf_{|x|\to\infty}\frac{u(x)}{|x|^{\nu}} \leqq \limsup_{|x|\to\infty}\frac{u(x)}{|x|^{\nu}} \leqq b,$$

ただし b は (3) で与えられる実数,

$$\nu = -\frac{m+\sigma_1}{\lambda+1-m} \ (>0).$$ ■

証明の概要を述べよう. $0 \notin \overline{\Omega}$ としても一般性を失わない. $r_* = \mathrm{dist}(0, \partial\Omega)$ とする. また

$$b_*(r) = \min_{|x|=r} b(x), \qquad b^*(r) = \max_{|x|=r} b(x)$$

と書こう. 仮定より

$$b_*(r) \sim b^*(r) \sim c_1 r^{\sigma_1} \quad \text{as} \quad r \to \infty \tag{4}$$

である.

次を満たす正値関数 $\overline{u}$, $\underline{u}$ は各々境界値問題 (P) の super-solution, subsolution になる:

$$\mathrm{div}(|\nabla \overline{u}|^{m-2} \nabla \overline{u}) \leq b_*(|x|)\, \overline{u}^{\lambda}, \quad |x| \geq r_*,$$

$$\mathrm{div}(|\nabla \underline{u}|^{m-2} \nabla \underline{u}) \geq b^*(|x|)\, \underline{u}^{\lambda}, \quad |x| \geq r_*,$$

$$\underline{u} \leq g(x) \leq \overline{u} \quad \text{on } \partial\Omega.$$

これらの微分不等式は球対称な係数関数を持つので、球対称な解を探すことにする. 適当な変数変換によりこれらの不等式は (E) のタイプの主要項を持つ常微分不等式に移る. 条件 (4) に注意して §1 の結果に [3] の結果を援用するとうまい $\underline{u}(r)$, $\overline{u}(r)$ が構成できて (もちろん $\underline{u} \leq \overline{u}$) 定理3を証明できる. 詳細は [1] を参照のこと.

参考文献

[1] K. Kamo & H. Usami, Asymptotic forms of positive solutions of second-order quasilinear ordinary differential equations, Adv. Math. Sci. Appl. (印刷中)

[2] T. Kura, The weak supersolution-subsolution method for second order quasilinear elliptic equations, Hiroshima Math. J. 19(1989), 1-36.

[3] M. Mizukami, M. Naito & H. Usami, Asymptotic behavior of solutions of a class of second order quasilinear ordinary differential equations. (投稿中)