数理解析研究所講究録
1129 巻 2000 年 54-59

定常波動問題にたいする領域分割法とその応用
(Domain decomposition method for stationary wave problem and its application)

電気通信大学情報工学科　加古　孝 (KAKO, Takashi)
電気通信大学大学院M 2　加納知聡 (KANO, Tomotoshi)

1　はじめに

3次元の非有界領域 Ω_0 において，次のヘルムホルツ方程式：

$$-\Delta u-\omega^2 u=0 \text{ in } \Omega_0 \tag{1}$$

を考察する．その結果を声道中の音波の伝播に対して適用し，様々な時間振動数に対して方程式を解くことにより音声伝播における共鳴現象を調べ，個々の母音や子音の特徴付けを行うことを目指す．人間の発声についての音声学的な研究に関しては，参考文献の [1]，[2]，[10]，[11] などを見られたい．次に，それらの文献でも取り上げられている一次元的音声伝播モデルである，Webster's horn equation を用いた計算を行い，対称性を仮定した3次元問題から導かれる2次元モデルとの比較を行った．その結果，時間周波数が低い場合は両者は良い一致を見たが，ウェブスターのモデルの前提にある単一モードの近似が崩れ，高次の伝播モードが発生する高い周波数領域では両者は全く一致しなくなることが分かった．

本研究では，外部の非有界領域の形は x 方向について柱状であるとする．さらに，もともとの3次元音場領域全体は2次元的であり，z 方向には厚さが y_0 で一定であるとする．この仮定の下では，問題を z 方向に Fourier モード分解して2次元問題に帰着する事ができる．以下では，簡単のために，一般性を失うこと無く，z 方向には定数である第零モードの波のみについて考察する．

次に，無限遠方における境界条件として外向きの放射条件を課す．すると，$x=x_0$ に置いた人工的な放射境界上の境界条件が，いわゆる，ディリクレ・ノイマン写像を用いて与えられる．

また二次元問題について，有限要素法を用いた近似解法を採用して数値計算を行ったが，それについて誤差解析を行った．さらに，一次元問題に対して，ヘルムホルツ方程式に対する領域分割法とそれを用いた反復解法の収束性について予備的な考察を行ったが，その結果の報告は今回は割愛する．

2　音声伝播の数理モデル

我々は，以下のような領域において問題を考える：

$$\Omega_0=\Omega\times(0,z_0) \text{ with } \Omega=\Omega_i\cup\Omega_e.$$

ここで，$\Omega_{0,i} \equiv \Omega_i \times (0, z_0)$ は声道部分を含む有界な内部領域，$\Omega_{0,e}$は非有界な柱状外部領域であり，

$$\Omega_{0,e} = \{(x,y,z) \mid x_0 < x < +\infty,\ (y,z) \in S_{0,e} = (0,y_0) \times (0,z_0)\} = \Omega_e \times (0,z_0)$$

と書けるとする．さて，Ω_0 における音波の伝播現象は，音速を 1 に規格化して，次の波動方程式に従う：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)u(t,x,y,z) = f(t,x,y,z) \text{ in } (-\infty,\infty) \times \Omega_0,\quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{2}$$

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial n} + \beta\right)u(t,x,y,z) = g(t,x,y,z) \text{ on } (-\infty,\infty) \times \partial\Omega_0. \tag{3}$$

ここで $\frac{\partial}{\partial n}$ は領域の境界 $\partial\Omega_0$ 上での外向き法線方向微分である．以下では，時間周期的な境界条件：$f(t,x,y,z) = e^{i\omega t}f(x,y,z)$, $g(t,x,y,z) = e^{i\omega t}g(x,y,z)$ の下で時間周期的な解：$u(t,x,y,z) = e^{i\omega t}u(x,y,z)$ を考える．すると u は，以下のヘルムホルツ方程式：

$$(-\Delta - \omega^2)u(x,y,z) = f(x,y,z) \text{ in } \Omega_0, \tag{4}$$

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial n} + \beta\right)u(x,y,z) = g(x,y,z) \text{ on } \partial\Omega_0 \tag{5}$$

及び，無限遠方 ($x \to +\infty$) での放射条件を満足する．以下では f, g及び u は z方向には定数と仮定する：$f(x,y,z) = f(x,y)$, $g(x,y,z) = g(x,y)$, $u(x,y,z) = u(x,y)$．すると問題は，2次元領域：$\Omega \equiv \Omega_i \cup \Omega_e$ の問題に帰着される (Fig. 1)：

$$(-\Delta - \omega^2)u(x,y) = f(x,y) \text{ in } \Omega \tag{6}$$

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial n} + \beta\right)u(x,y) = g(x,y) \text{ on } \partial\Omega. \tag{7}$$

さらに，Fig. 1 において示されているように，境界 $\partial\Omega$ は二つの部分からなるとする：$\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_S$．そして$\partial\Omega$上で$\alpha \equiv 1$，$\beta \equiv 0$ とし，さらに，Γ 上では斉次ノイマン条件：$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$，声帯 Γ_S 上では $g = g_S$ という非斉次入力境界条件を与える．

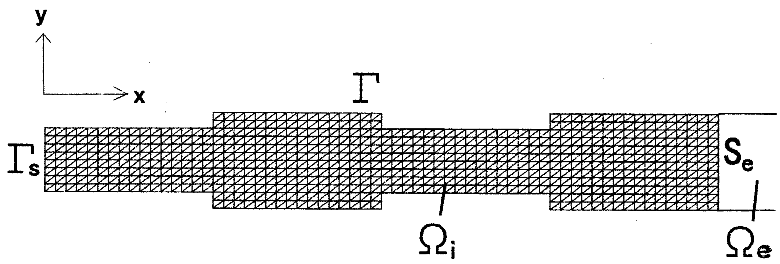

Figure 1: 音場領域の形状と三角形分割

3 内部領域と外部領域への領域分割

人工境界 $S_e = \{x_0\} \times (0, y_0)$ を導入する．すると，この上での，外部問題に付随するディリクレ・ノイマン写像 Λ は，

$$(\Lambda\gamma_{S_e}u)(y) \equiv (\frac{\partial}{\partial x}u)(x_0, y)(= (\frac{\partial u}{\partial n})(y))$$

で与えられる．ここで，u は Ω_e における外向きの放射条件を満たすヘルムホルツ方程式の解である．また，$\gamma_{S_e}u \equiv u|_{S_e}$ は，u の S_e への制限（トレース）を表し，$\gamma \equiv \gamma_{S_e}$ を S_e 上へのトレース作用素と呼ぶ．ディリクレ・ノイマン写像 Λ の具体的な形は以下のようになる：

$$\Lambda\gamma u(= \Lambda u) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n C_n(\gamma u) c_n(y).$$

ここで

$$C_n(\gamma u) = \int_{S_e} u(x_0, y) c_n(y)\, dy \quad (n \geq 0), \quad c_n(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{y_0}} & (n = 0) \\ \sqrt{\frac{2}{y_0}} \cos(\frac{n\pi}{y_0}y) & (n \geq 1), \end{cases}$$

$$\zeta_n = \begin{cases} i\xi_n, & \xi_n = \{\omega^2 - (\frac{n\pi}{y_0})^2\}^{1/2}, \quad 0 \leq n < \frac{y_0}{\pi}\omega \\ -\eta_n, & \eta_n = \{(\frac{n\pi}{y_0})^2 - \omega^2\}^{1/2}, \quad \frac{y_0}{\pi}\omega \leq n. \end{cases}$$

すると，最終的に考える問題は内部領域 Ω_i における次の問題に帰着される：

$$(-\Delta - \omega^2)u = 0 \ \text{ in } \Omega_i \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ \text{ on } \Gamma \ , \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = g_S \ \text{ on } \Gamma_S \ , \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \Lambda u \ \text{ on } \Gamma_R \equiv S_e. \tag{9}$$

4 ウェブスターのホルン方程式

ここでは，ウェブスターのホルン方程式 (Webster's horn equation) を導入する．一次元的な保存則：

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{A(x)}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\rho c^2}{A(x)}\frac{\partial v}{\partial x},$$

を整理して，次の時間につき二階のウェブスターのホルン方程式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{A(x)}c^2\frac{\partial}{\partial x}(A(x)\frac{\partial p}{\partial x}) = 0$$

が導かれる．ここで $A(x)$ は，声道の断面積である．対応する時間周期的な解が満たす方程式は次のようになる：

$$-A(x)\frac{d}{dx}\{\frac{1}{A(x)}\frac{d}{dx}u(x)\} - \omega^2 u(x) = 0. \tag{10}$$

5 幾つかの数値例

ここでは，Fig. 1 のような形状の 2 次元領域の場合の計算結果を報告する．まず，Fig. 2 は幾つかの異なる波数 ω にたいする計算結果である． 次に，Fig. 3 は，波数 ω を変化させた場合の人工境界 $\Gamma_R = S_e$ 上の点 $(x_0, y_0/2)$ における解の絶対値と，対応する 1 次元のウェブスターのモデルによる計算の $x = x_0$ におけるものの比較である．波数が 30 以下の場合は両者の間に良い一致が見られるが，それを越えると突然一致しなくなる．このときの 2 次元的な計算結果 (Fig. 2, $\omega = 40$) では，y 方向の高次モードが励起されているのが観察される．これらの結果は，ウェブスターのモデルは低い周波数の時に限って用いることができることを示唆している．

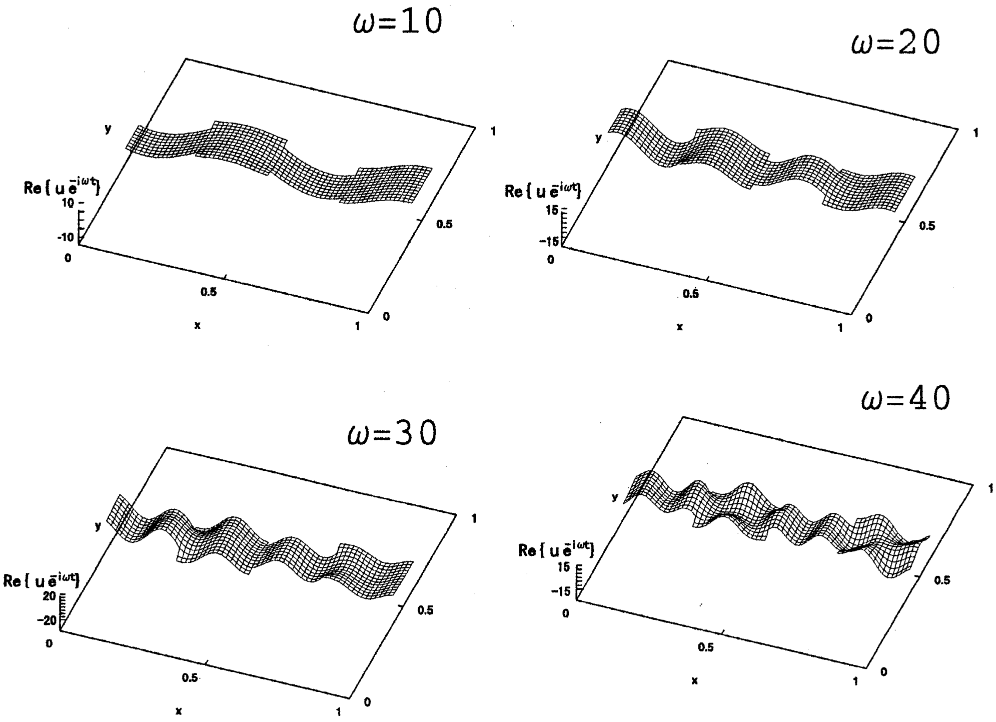

Figure 2: 異なる波数 ω についての数値計算結果

6 有限要素法の誤差解析

2 次元ヘルムホルツ方程式 (8)-(9) の弱形式定式化は， 関数空間： $\mathcal{V} \equiv H^1(\Omega_i)$ を一階のソボレフ空間として導入し，次のようになる：

与えられた $g_S \in L^2(\Gamma_S)$ にたいし，次を満足する $u \in \mathcal{V} \equiv H^1(\Omega_i)$ を求めよ：

$$a(u,v) + b(u,v) = (g_S, v)_{L^2(\Gamma_S)} (\equiv \int_{\Gamma_S} g_S \overline{v}\, dy) \qquad \forall v \in \mathcal{V}. \tag{11}$$

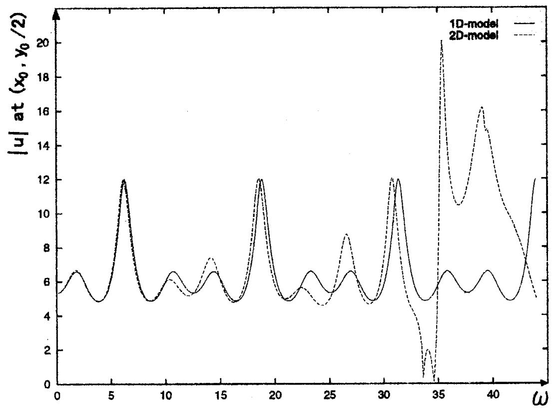

Figure 3: 周波数応答についての一次元計算と二次元計算の比較

ここで

$$a(u,v) = a_0(u,v) + b_2^\infty(u,v), \quad b(u,v) = b_1(u,v) + b_2^0(u,v)$$

であり，さらに上式の右辺の各項は以下のように定める：

$$\begin{aligned}
a_0(u,v) &= \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} + u\overline{v}\, dxdy, & (12)\\
b_1(u,v) &= -(\omega^2+1)\int_{\Omega_i} u\overline{v}\, dxdy, & (13)\\
b_2(u,v) &= (-\Lambda u(x_R,\cdot), v(x_R,\cdot))_{L^2(\Gamma_R)} = b_2^0(u,v) + b_2^\infty(u,v), & (14)\\
b_2^0(u,v) &= -\sum_{0\le n<\frac{y_0}{\pi}\omega} i\xi_n C_n(\gamma u)\overline{C_n(\gamma v)}, & (15)\\
b_2^\infty(u,v) &= \sum_{\frac{y_0}{\pi}\omega\le n} \eta_n C_n(\gamma u)\overline{C_n(\gamma v)}. & (16)
\end{aligned}$$

すると，対応する有限要素法は，$\mathcal{V}$ の有限次元部分空間 $\mathcal{V}_h$ に対して次のようになる：

与えられた $g_S \in L^2(\Gamma_S)$ にたいし，次を満足する $u_h \in \mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ を求めよ：

$$a(u_h,v_h) + b(u_h,v_h) = (g_S, v_h)_{L^2(\Gamma_S)} \qquad \forall v_h \in \mathcal{V}_h. \tag{17}$$

このとき，次の結果が成立する：

定理 内部領域 Ω_i におけるヘルムホルツ方程式が一意可解であるとする．このとき有限要素解 u_h が十分小さい h にたいして一意に存在し，u_h は，h が零に収束するとき真の解 u に収束する．さらに真の解の正則性の仮定： $u \in H^2(\Omega_i)$ の下では次の誤差評価式：

$$\| u - u_h \|_a \le Ch \| u \|_{H^2(\Omega_i)}$$

が成立する．

最後に，有限要素法近似方程式 (17) で，$a(u_h, v_h) = a_0(u_h, v_h) + b_2^\infty(u_h, v_h)$ の中の 無限和：$b_2^\infty(u_h, v_h)$ を有限和：$b_2^N(u_h^N, v_h)$ で置き換えた方程式の解を u_h^N とすると，N が無限大に近づくとき，これはもとの有限要素解 u_h に収束することが分かる．この際の収束の N 及び h に関する次数は今後の研究課題である．

References

[1] Fant, G. : *Acoustic theory of speech production*, Mouton, Hague - Paris, 1970.

[2] Flanagan J.L. : *Speech analysis, synthesis, and perception*, Springer, Berlin-New York, 1972.

[3] Grote, M. and Keller, J.B. : On nonreflecting boundary conditions, J. Comp. Phys., bf 122 (1995) 231-243.

[4] 伊福部 達：音の福祉工学, コロナ社, 1997.

[5] Kako, T. : Approximation of the scattering state by means of the radiation boundary condition, Math. Meth. in the Appl. Sci., **3** (1981) 506-515.

[6] Liu X.-J. and Kako, T. : Higher order radiation boundary condition and finite element method for scattering problem, Adv. Math. Sci. Appl., **8** (1998) 801-819.

[7] Masmoudi, M. : Numerical solution for exterior problems, Numer. Math., **51** (1987) 87-101.

[8] Mikhlin, S.G. : *Variational Methods in Mathematical Physics*, Pergamon, Oxford, 1964.

[9] 宮本健作：声を作る・音を見る　九官鳥からヒトへ, 森北出版, 1995.

[10] 中田和男：音声（改訂版）, コロナ社, 1995.

[11] 新美康永：音声認識, 共立出版, 1979.