数理解析研究所講究録
1129 巻 2000 年 73-82

Domain-Dependence of Convergence Rate in Some Domain Decomposition Method for a Resolvent Stokes Equation

齊藤　宣一
(財) 国際高等研究所
京都大学数理解析研究所

NORIKAZU SAITO
International Institute for Advanced Studies and
Research Institute for Mathematical Sciences
Kyoto University

Abstract. Some domain decomposition algorithm for a resolvent Stokes equation is considered. Our attention is focused on the domain-dependence of convergence speed of such algorithm. Actually, under a certain geometric condition, we can derive explicit decay rates of the error on an artificial boundary in terms of some constants depending on subdomains.

1 序

この論文は, 領域分割法の数学的基礎理論に関するものであり, 特に反復的な領域分割アルゴリズムの収束の速さの領域依存性 (domain-dependence) に焦点を当てる. この種の問題については, 1995 年に H. Fujita が Poisson 方程式に対する結果を提出した ([4], [5]). H. Fujita は, Poisson 方程式に対する典型的な領域分割アルゴリズムを考え, 領域分割の仕方に関するある仮定 (例えば後で述べる Cond.(I) など) の下で, 誤差の陽的な減衰の速さを導出した. また, その系として, 緩和パラメータの最適な選択についての情報を得た. その後, この H. Fujita の結果のいろいろな方向への一般化や数値実験による理論の妥当性の確認等が報告された (Fujita-Saito [8], Fujita et al. [7], Fujita-Fukuhara-Saito

[6] など).

一方において, 1998 年に筆者は, Stokes 方程式に対して同様の問題を考え, 類似した結果を導出した (Saito [13], [14]). その結果は inf-sup 定数の新たな重要性を示唆するものであった.

この論文では, Navier-Stokes 方程式あるいはその発展問題に対する解析の第一歩として次の問題を扱う.

$$
\left\{
\begin{array}{rcll}
\lambda u - \nu \triangle u + \nabla p &=& f & \text{in } \Omega, \\
\operatorname{div} u &=& 0 & \text{in } \Omega, \\
u &=& b & \text{on } \Gamma.
\end{array}
\right. \tag{1.1}
$$

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は区分的に滑らかな境界 Γ をもつ有界領域であり, また通常のように, ベクトル値関数 u は流速を, スカラー値関数 p は圧力を表している. 正の定数 λ, ν とベクトル値関数 f, さらに Γ 上のベクトル値関数 b は既知とする. ただし f と b に関しては仮定

$$
f \in L^2(\Omega) \quad b \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \int_\Gamma b \cdot n \, d\Gamma = 0 \tag{1.2}
$$

を置く. n は Γ 上の外向き単位法線ベクトルである. 以後, (1.1) の厳密解を $\tilde{u}$, $\tilde{p}$ と表す.

注意 1.1. 仮定 (1.2) の下での $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ の一意存在は, 通常の変分法の議論により保証されている. また, $\tilde{u}$ に対応する圧力 $\tilde{p} \in L^2(\Omega)$ が付加定数の不定さを除けば一意に定まることも良く知られている.

注意 1.2. この論文では, 特に断らない限り, 関数空間, 内積およびノルムの表記は Lions-Magenes [11] のそれを踏襲する. また, 関数・関数空間についてはスカラー値のそれとベクトル値のそれとを区別しない.

論文の構成. §2 において, 全体領域 Ω の分割と, target 問題 (1.1) に対する領域分割アルゴリズム (DN 型反復法) を導入する. §3 では, 領域の形状に関する仮定や部分領域の形状等に依存した定数を導入し, 主定理を述べる. 紙面の制約の為, 証明の詳細を述べる事はできないが, その要点のみを §4 で述べる.

2 領域の分割と DN 型反復法

2.1 全体領域の分割

Ω を滑らかな曲線 γ によって横断的に 2 つの部分領域 Ω_1, Ω_2 に分割する;

$$
\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \gamma} \qquad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset.
$$

さらに, $\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \backslash \gamma$, $\Gamma_2 = \partial\Omega_2 \backslash \gamma$ と表す. n は相変わらず境界上の外向き単位法線ベクトルであるが, γ 上において Ω_1 から Ω_2 に向かうそれを, 特に, n_1 で表す. n_2 の意味も同様である. (図 1).

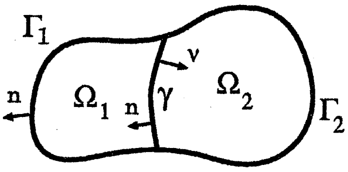

図 1.

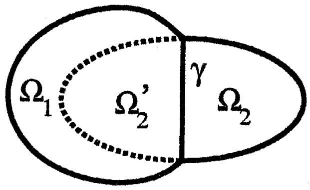

図 2.

2.2 領域分割アルゴリズム

この論文では以下に述べる典型的な領域分割アルゴリズムを考察する.

Dirichlet-Neumann (DN) 型反復法. θ $(0 < \theta \leq 1)$ は緩和パラメータである. γ 上のベクトル値関数 $\mu^{(0)}$ で

$$\int_\gamma \mu^{(0)} \cdot \nu \, d\gamma + \int_{\Gamma_1} b \cdot n \, d\Gamma = 0. \tag{2.1}$$

を満たすものを採り, 初期推定値とする. そして, Ω_1, Ω_2, γ 上の関数 $\{u_1^{(k)}, p_1^{(k)}\}$, $\{u_2^{(k)}, p_2^{(k)}\}$, $\{\mu^{(k+1)}\}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ を次で漸化的に生成する.

$$\left\{\begin{array}{rcll} \lambda u_1^{(k)} - \nu \triangle u_1^{(k)} + \nabla p_1^{(k)} &=& f & \text{in } \Omega_1, \\ \operatorname{div} u_1^{(k)} &=& 0 & \text{in } \Omega_1, \\ u_1^{(k)} &=& b & \text{on } \Gamma_1, \\ u_1^{(k)} &=& \mu^{(k)} & \text{on } \gamma, \end{array}\right. \tag{2.2}$$

$$\left\{\begin{array}{rcll} \lambda u_2^{(k)} - \nu \triangle u_2^{(k)} + \nabla p_2^{(k)} &=& f & \text{in } \Omega_2, \\ \operatorname{div} u_2^{(k)} &=& 0 & \text{in } \Omega_2, \\ u_2^{(k)} &=& b & \text{on } \Gamma_2, \\ \nu \dfrac{\partial u_2^{(k)}}{\partial n_2} - p_2^{(k)} n_2 &=& -\nu \dfrac{\partial u_1^{(k)}}{\partial n_1} + p_1^{(k)} n_1 & \text{on } \gamma, \end{array}\right. \tag{2.3}$$

$$\mu^{(k+1)} = (1-\theta)\mu^{(k)} + \theta u_2^{(k)}|_\gamma. \tag{2.4}$$

注意 2.1. 上の (2.3) において,

$$\nu \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial n_1} - p_1^{(k)} n_1 = \nu [\nabla u_1^{(k)}] n_1 - p_1^{(k)} n_1, \tag{2.5}$$

なる表記を使っている．ただし，$[\nabla u_1^{(k)}]$ は，$u_1^{(k)}=\{v^1,v^2\}$ のとき $[\partial v^i/\partial x_j]$ を表している．すなわち，(2.5) の右辺第一項目はテンソルとベクトルの積を，また第二項目はスカラーとベクトルの積を表している．

注意 2.2. 各 k に対して，Ω_1 上の流束条件

$$\int_\gamma \mu^{(k)}\cdot n_1\,d\gamma+\int_{\Gamma_1} b\cdot n\,d\Gamma=0,\qquad (k=0,1,2,\cdots).$$

の成立を確かめるのは易しい．

注意 2.3. 各 k に対して，$u_1^{(k)}$ に対応する圧力 $p_1^{(k)}$ は付加定数 C_k を除けば一意に定まる．それゆえ，通常の技巧を用いて C_k の値を定めれば，それに応じて $u_2^{(k)}$ に対応する圧力 $p_2^{(k)}$ が一意に定まる．

3 主結果

3.1 記号

DN 型反復法の誤差の減衰を考察するにあたって，特に，γ 上の誤差

$$\xi^{(k)}=\mu^{(k)}-\tilde{u}|_\gamma$$

に注目する．γ 上のベクトル値の関数空間 $V=V(\gamma)$ を $V=\{\xi\in H^{1/2}(\gamma);\|\xi\|_V<\infty\}$ で定義する．ただし，

$$\|\xi\|_V=\left\{\|\xi\|^2_{H^{1/2}(\gamma)}+\left\|\rho^{-1/2}\xi\right\|^2_{L^2(\gamma)}\right\}^{1/2},$$

であり，ρ は γ の端点からの距離を表す．一方において，次を満たす定数 β_i の存在は良く知られている[1]；

$$\inf_{q\in L_0^2(\Omega_i)}\ \sup_{v\in H_0^1(\Omega_i)}\frac{(q,\operatorname{div} v)_i}{\|q\|_i\,\|\nabla v\|_i}=\beta_i.$$

ここで次のような記号を用いた:

- $(u,v)_i=$ 通常の $L^2(\Omega_i)$ 内積，そして $\|u\|_i=(u,u)_i^{1/2}$;
- $\|\nabla v\|_i^2=\sum_{1\le m,n\le 2}\|\partial v^m/\partial x_n\|_i^2\quad$ for $v=\{v^1,v^2\}\in H^1(\Omega_i)$;
- $L_0^2(\Omega_i)=\{q\in L^2(\Omega_i);\ (q,1)_i=0\}$.

[1] 以下において特に断らなくとも，$i=1,2$ である．

このような定数 β_i は Ω_i に対応する inf-sup 定数と呼ばれる．(Babuška [2], Brezzi [3])．Poincaré の不等式

$$\|u\|_i \le \tau_i \|\nabla u\|_i, \quad \forall u \in K^1(\Omega_i) = \{u \in H^1(\Omega_i);\ u|_{\Gamma_i} = 0\} \tag{3.1}$$

に現れる定数 $\tau_i = \tau_i(\Omega_i)$ も重要である．

注意 3.1. 不等式 (3.1) を満たす定数 τ_i の値に関しては，u が $H_0^1(\Omega_i)$ に属する関数でないので注意を要する．しかしながら，次のような評価が可能である．γ が x_2 上の線分であり，$\Omega \subset \{x_1 > 0\}$ であると仮定する[2]．$\tilde{\Omega} = \Omega \cup \gamma \cup \Omega'$ とおく．ただし，Ω' は Ω の γ に関する鏡映の像である．そして，χ^{-1} を固有値問題

$$-\triangle v = \chi^{-1} v \text{ in } \tilde{\Omega}, \qquad v = 0 \text{ on } \partial\tilde{\Omega}$$

の最小固有値とする．このとき

$$\|v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \le \chi \|\nabla v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

が成り立ち，この χ は最適な値である．さて，$u \in K^1(\Omega)$ を採り，$\tilde{u}$ を u の $\tilde{\Omega}$ 上への偶関数拡張とする．明らかに，$\tilde{u} \in H_0^1(\tilde{\Omega})$ なので $\|\tilde{u}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \le \chi \|\nabla \tilde{u}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$，すなわち

$$\|u\|^2 \le \chi \|\nabla u\|^2$$

を得る．したがって $\tau^2 \le \chi$．特に，Ω が一辺の長さが d の正方形なら $\tau^2 \le \chi = d^2/(2\pi)^2$ である．(π は円周率)．

3.2 定理

(Ω, γ) の形状に関して次の仮定をおく：

Cond.(I) γ を線分とし，Ω_2 の γ に関する鏡映の像を Ω_2' とする．$\Omega_2' \subseteq \Omega_1$ が成り立つとき (Ω, γ) は Cond.(I) を満たすという (図 2)．

定理 3.1. 定数 α, δ を

$$\alpha = 1 + (1+\delta)^2, \quad \delta = \min(\delta_1, \delta_2), \quad \delta_i = \left(1 + \frac{1}{\beta_i}\right)\frac{\lambda \tau_i^2}{\nu} + \frac{1}{\beta_i} \tag{3.2}$$

で定義し，$0 < \theta < 2/\alpha$ に対して $\tilde{r} = \tilde{r}(\theta)$ を

$$\tilde{r}(\theta) = \begin{cases} 1 - \theta & \text{for } 0 < \theta \le 2/(\alpha+1), \\ \alpha\theta - 1 & \text{for } 2/(\alpha+1) \le \theta < 2/\alpha \end{cases}$$

[2]煩雑なので添え字の i は省略する．

で定める. (Ω,γ) が Cond.(I) を満たすとする. このとき, (Ω,γ) にのみ依存する正の定数 c_0 が存在して

$$\|\xi^{(k)}\|_V \le c_0\tilde{r}^k\|\xi^{(0)}\|_V, \qquad (k=1,2,3,\cdots). \tag{3.3}$$

が成り立つ.

注意 3.2. Saito [13], [14] で報告された結果は上の定理の系 ($\lambda=0$, $\nu=1$ の場合) に相当する.

注意 3.3. Ω_1, Ω_2 を一辺の長さがそれぞれ d_1, d_2 の正方形とする. このとき, Cond.(I) より $d_1 \ge d_2$ であり, また, $\beta_1=\beta_2\equiv\beta$ が成り立つ. したがって定理 3.1 における δ は

$$\delta \le \left(1+\frac{1}{\beta}\right)\frac{\lambda d_2^2}{4\pi^2\nu}+\frac{1}{\beta}$$

と採れる. またこのとき, $\beta^{-1}\le\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ である (Horgan-Payne [10], Velte [16]) ことも有益な情報となる.

4 証明の要点

関数空間 $V_\sigma=\{\xi\in V;\ (\xi,n_1)_{L^2(\gamma)}=0\}$ と $K^1(\Omega_i)$ 上の連続双線形形式

$$a_i(v,w)=\nu\int_{\Omega_i}\nabla v\nabla w\ dx=\nu\sum_{1\le m,n\le 2}\int_{\Omega_i}\frac{\partial v^m}{\partial x_n}\frac{\partial w^m}{\partial x_n}\ dx$$

を導入する. そして二次形式

$$J_i[v]=\lambda\|v\|_i^2+a_i(v,v), \qquad (v\in K^1(\Omega_i))$$

を定義する. また, $\xi\in V_\sigma$ に対して,

$$\begin{cases} \lambda w_i-\nu\triangle w_i+\nabla p_i=0 \text{ in } \Omega_i, \quad \operatorname{div} w_i=0 \text{ in } \Omega_i, \\ w_i=0 \text{ on } \Gamma_i, \quad w_i=\xi \text{ on } \gamma \end{cases} \tag{4.1}$$

を満たす $w_i\in K^1(\Omega_i)$ を ξ の Ω_i 上への r-Stokes 拡張[3]と呼ぶ.

注意 4.1. 角のある領域上におけるソレノイダルな H^1-関数のトレース理論 (例えば, Arnold-Scott-Vogelius [1], Saito-Fujita [15]) と変分法的議論により, 任意の $\xi\in V_\sigma$ に対して, その r-Stokes 拡張の一意存在は保証される.

[3] resolvent Stokes extension の意味を込めて.

Fujita 's method を応用して次の補題を導くのは Saito [14] (すなわち $\lambda=0$, $\nu=1$ のとき) と同じである.

補題 4.1. $0\le\eta_1<\eta_2$ を

$$\eta_1 J_2[w_2]\le J_1[w_1]\le\eta_2 J_2[w_2],\quad (\forall\xi\in V_\sigma) \tag{4.2}$$

を満たす定数とする. ただし, w_i は ξ の Ω_i 上への r-Stokes 拡張である. そして, $\tilde{R}=\tilde{R}(\theta)$ を

$$\tilde{R}(\theta)=\max_{\eta_1\le s\le\eta_2}|1-\theta-\theta s|$$

で定める. このとき, (Ω,γ) にのみ依存する正の定数 c_0 が存在して,

$$\|\xi^{(k)}\|_V\le c_0\tilde{R}^k\|\xi^{(0)}\|_V,\qquad (k=1,2,3,\cdots). \tag{4.3}$$

が成り立つ. (この c_0 は定理 3.1 と同じもの).

Cond.(I) を用いると, η_2 の値が具体的に求まる. すなわち,

補題 4.2. Cond.(I) の下では, $\eta_2=(1+\delta)^2$ と採れる. ただし, δ は (3.2) で定義したもの.

$\eta_1=0$ と採れることは自明なので, この補題により

$$\tilde{R}(\theta)=\max_{0\le s\le\alpha-1}|1-\theta-\theta s|=\max\{|1-\theta|,\ |1-\alpha\theta|\}=\tilde{r}(\theta)$$

が結論でき, 定理 3.1 の証明は完了する.

補題 4.2 の証明. $\xi\in V_\sigma$ とし w_i を ξ の Ω_i 上への r-Stokes 拡張とせよ. まず不等式

$$J_i[h_i]\le J_i[w_i]\le(1+\delta_i)^2 J_i[h_i] \tag{4.4}$$

の成立を示す. ただし, h_i は ξ の Ω_i 上への調和拡張, すなわち

$$\nu\triangle h_i=0 \text{ in } \Omega_i,\quad h_i=0 \text{ on } \Gamma_i,\quad h_i=\xi \text{ on } \gamma$$

の解 $h_i\in K^1(\Omega_i)$ である. 実際, はじめの不等式は調和関数の変分原理そのものである. 二番目の不等式を確かめよう. 以下しばらくの間, 混乱の恐れのな

いときには, 添え字の i は省略する. $p \in L_0^2(\Omega)$ を w に対応する圧力とする. このとき, inf-sup 定数の定義により,

$$
\begin{aligned}
\beta\|p\| &\leq \sup_{v\in H_0^1(\Omega)} \frac{(p, \mathrm{div}\, v)}{\|\nabla v\|} \\
&= \sup_{v\in H_0^1(\Omega)} \frac{\lambda(w,v)+a(w,v)}{\|\nabla v\|} \\
&\leq \sup_{v\in H_0^1(\Omega)} \frac{\lambda\|w\|\ \|v\| + \nu\|\nabla w\|\ \|\nabla v\|}{\|\nabla v\|} \\
&\leq (\lambda\tau^2+\nu)\|\nabla w\|
\end{aligned}
$$

が成り立つ. これを用いると

$$
\begin{aligned}
(4.5) \qquad J[w] &= \lambda(w,w-h)+\lambda(w,h)+a(w,w-h)+a(w,h) \\
&= (p, \mathrm{div}\,(w-h)) + \lambda(w,h)+a(w,h) \\
&\leq \|p\|\ \|\nabla h\| + \lambda\|w\|\ \|h\| + \nu\|\nabla w\|\ \|\nabla h\| \\
&\leq [(1+\beta^{-1})\lambda\tau^2 + \nu(\beta^{-1}+1)]\ \|\nabla w\|\|\nabla h\| \\
&= \nu(1+\delta)\|\nabla w\|\|\nabla h\|.
\end{aligned}
$$

これより, $\nu\|\nabla w\|^2 \leq \nu(1+\delta)\|\nabla w\|\|\nabla h\|$, すなわち, $\|\nabla w\| \leq (1+\delta)\|\nabla h\|$ を得る. これを (4.5) に代入すると

$$J[w] \leq (1+\delta)^2\nu\|\nabla h\|^2 \leq (1+\delta)^2 J[h].$$

正確には

$$J_i[w_i] \leq (1+\delta_i)^2 J_i[h_i]$$

を得る. これで (4.4) が示せた. Ω_i に対応したこの不等式と, r-Stokes 方程式および調和関数に対する変分原理を用いれば, 示すべき不等式

$$J_1[w_1] \leq (1+\delta)^2 J_2[w_2]$$

を導くのは易しい. ただしそのとき, $J_1[h_1] = J_2[h_2]$ に注意する必要がある. Q.E.D.

参考文献

[1] D.N. Arnold, L.R. Scott and M. Vogelius: *Regular inversion of the divergence operator with Dirichlet boundary conditions on a polygon*, Ann. della Scuo. Norm. Super. di Pisa, **XV**(2), 1998, 169-192.

[2] I. Babuška: *The finite element method with Lagrangian Multipliers*, Numer. Math. **20**, 1973, 179-192.

[3] F. Brezzi: *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers*, R.A.I.R.O., **8**(R-2), 1974, 129-151.

[4] H. Fujita: *Remarks on the domain-dependence of convergence rates of a certain DDM*, Lecture at International Conference on Parallel Algorithm for Scientific and Engineering Computations (PASEC), May 1995, Chiba, Japan.

[5] H. Fujita: *Remarks on the domain-dependence of convergence rate of iterations in a certain domain decomposition method – Analysis by the Steklov-Poincaré operator*, Collection of Papers on Geometry, Analysis and Mathematical Physics, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1997, 71-84.

[6] H. Fujita, M. Fukuhara and N. Saito: *On the rate of convergence of iterations in the domain decomposition methods*, Proceedings of third China-Japan seminar on numerical mathematics, Science Press, 1998, 30-43.

[7] H. Fujita, M. Katsurada, A. Kobari and Y. Nagasaka: *Analytical and numerical study of convergence of the domain decomposition method, I* (in Japanese), Mem. Inst. Sci. Tech. Meiji Univ., **35**(8), 1996, 103-135.

[8] H. Fujita and N. Saito: *An analytical study of optimal speed of convergence of iterations in DDM under certain shape assumptions of domains*, Computational Science for the 21st Century, John Willey & Sons, 1997, 139-148.

[9] C.O. Horgan: *Korn's inequalities and their applications in continuum mechanics*, SIAM Review, **37**(4), 491-511, 1995.

[10] C.O. Horgan and L.E. Payne: *On inequalities of Korn, Friedrichs and Babuška-Aziz*, Arch. Rational Mech. Anal., **82**(2), 1983, 165-179.

[11] J.L. Lions and E. Magenes: Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, I, Springer-Verlag, 1972.

[12] L.D. Marini and A. Quarteroni: *A relaxation procedure for domain decomposition methods using finite elements*, Numer. Math., **55**, 1989, 575-598.

[13] N. Saito: *On the shape of domains and the speed of convergence in a certain DDM for the Stokes equation*, to appear in GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications, Gakko-tosho Co., Ltd.

[14] N. Saito: *On the domain-dependence of convergence rate in some domain decomposition method for the Stokes equations*, to appear.

[15] N. Saito and H. Fujita: *On the set of traces of H^1-functions in domains with corner points and the fractional power of operators*, to appear.

[16] W. Velte: *On optimal constants in some inequalities*, Lecture Notes in Mathematics, **1431**, Springer-Verlag, 1988, 158-168.

財団法人　国際高等研究所
619-0225 京都府相楽郡木津町木津川台 9-3
Tel: 0774-73-4000 (代表), Fax: 0774-73-4005

京都大学 数理解析研究所
606-8502 京都市左京区北白川追分町
Tel: 075-753-7206 (共同利用掛), Fax: 075-753-7272,
E-mail: nsaito@kurims.kyoto-u.ac.jp