数理解析研究所講究録
1130巻 2000年 132-139

クレタ文化の中の倍積問題
(予備的考察)

吉沢 尚明

前書き 本稿は，1999年5月の研究会で筆者が行った講演「ギリシャ数学生成の階梯」の報告書にする予定でしたが，個人的原因から，報告全体を期日までに書き上げることが出来なくなりました．そこで勝手乍ら，既にほぼ出来ていた“$\sqrt[3]{2}$ の発見”(講演予稿の§1)だけを，本稿に詳しく書くことにしました．つづく"Dark Age"(同§2)と“ギリシャ数学の誕生”(同§3)は，講演でも概要を述べただけでしたので，別の機会に改めて報告することにさせて頂きたいと思っております．

また，本稿の内容について，講演の際に有益なご意見等を頂きましたので，本稿作成の際に参考させて頂きました．お礼申し上げます．

§0. 序言

ギリシャ数学の誕生まで の経緯は，§3に述べる様に，正統な“数学史”の課題にはなり難いと思うが，筆者自身としては興味があるので，敢えてその中から一つのテーマを選んで述べる．謂わば「ギリシャ数学以前の噺」である．

以下§1でクレタにおける倍積問題の形態について述べる．§2で，クレタで解決されたことの結果と考えられる現象(“必要条件”)を考察する．§3はコメントで，“数学史”の性格，クレタにおいて可能であったと思われる解決法(“充分条件”)の想像及び考古学に関したこと等について述べる．

§1. クレタにおける倍積問題

この噺は，あとで述べる理由によって，全くの予備的考察である．即ち，論理的考察をするための(不備な数値を用いた)“小手調べ”(予想)である．

立方根 $\sqrt[3]{2}$ の計算に相当する，次の趣旨の昔噺が伝わっているとされている:「クレタ島(Kriti)の王Minosが，息子Glaukosの立方体の殯室の容積を2倍にせよと命じたが，誰にも解けなかった．」[3]．筆者は報告[1]の中では，この噺をそのままの内容で引用したが，今回はMinosの命令に従う様な扱いをする．ところでこの“神話もどき”は，クレタで発明された問題とは考え難い．ギリシャ数学の中の問題で，例えばEratosthenes辺りの

謀略のようにも思えるのであったが，本稿を書くに当たって少し考えてみた所，クレタに生じて，クレタで“原始的に”解決された問題かも知れないという結果になってしまった．（と言っても，筆者は今でも，本稿の内容にはどこかに思考的または計算上の誤謬があるのではないかという懸念を持っていてる．）

さて，この問題は，倍積される対象に（殯室でなく）もっと適当な物を選べば，現実的な問題になるかもしれないと思い，時々美術書や発掘写真等を眺めていた．そのうちに，美術書[2]に，（今から3500年程前の）クレタのKnossos新宮殿とそのワイン倉庫の（勿論，発掘後の）写真が収められているのを見つけた(本稿自身のページでは，7ページ)．その写真にはワイン保存用の巨大な甕（かめ）（高さ1.5メートル前後という）が林立しているが，それらの大きさは均一でない．ここで次の2点を示すことが出来れば，「甕の倍積問題」を彼らクレタ人は何らかの方法で解いていたことになると考えてもよいであろう（§3参照）：

（α）全ての甕は(近似的には)相似である；

（β）大小の甕の適当な対をとれば，大甕の高さは近似的に $\sqrt[3]{2}\times$（小甕の高さ）になる．

（甕の主要部は回転対称だろうから，差し当たってこの論法を認めることにする．勿論，（β）には「胴回り$\times\sqrt[3]{2}$」を含めなければならないが，今回の考察では，それは実行し難いので別の機会にしたい．）

写真からは正確な結果は勿論得られない．しかし直接の物証を得るには，発掘記録や計測data等，考古学者の援けが必要であり，それには日数がかかりそうなので，今後のこととし，以下にとり敢えず要点の（β）について，怠け者の計算をお目にかける．

§2. クレタで倍積問題は解決されていたか

(1) 当面，唯一の資料として，文献[2]の(B4サイズの)写真1枚を用いる(本稿の7ページ)．そこに写っている甕に，右回りに①，②，…，⑨と番号をつけておく．そうして甕の倍積問題が，何らかの方法で解けていることを示す“必要条件”を，我々の数学的立場から以下に示すことにする．

(2) この写真には，画面の左端中程に∞遠点がある．これと，便宜上甕⑧を基準にして，各甕の高さの数値を補正する．

それには，近世の絵画，例えばLeonardo da Vinciの「最後の晩餐」等の方法を真似る．即ち写真左側に上下に通っている溝の様な凹地は，明らかに一定の幅のものであ

るが，“両岸”の線の延長(“経線”)は急速に“無限遠点”に収束する．“溝”と直交する平行線を“緯線”とし，甕⑧を基準とする各甕の位置における縮尺を，この座標で表す．

具体例を挙げると，甕⑧の緯度では“溝”の幅は145(mm)である(これを基準の長さとする)．⑧の隣に立っている甕⑦の位置(緯度)では，“溝”の幅は125，そして⑦の(“実測”の)高さは150である．従って，(多少の不安はあるけれども)

$$⑦の補正された高さ = \frac{145}{125} \times 150 = \underline{174}.$$

(3) 上の**(2)**の方法で全ての甕の高さを補正して，後で掲げる一覧表(本稿のp.8)の欄**(i)**に，高さの大きい方から順に甕の番号を並べる．甕のうちで，傾いたりして高さが変化している可能性があると見られるのは，③,⑤,①,⑨である．これらの甕は，高さの後に ?-markを付けておいた．

これ以外の甕(即ち②,⑦,⑥,④,⑧)は，この段階では，一応“正常な”状態にあると考えておく．

欄**(i)**に見られる様に，高さが160～170の範囲に，即ち謂わば中間域に，(我々が壊れていると見たうちの)⑤と①が位置している．

(4) これらの甕のうちに，高さの比が$\sqrt[3]{2}$または$(\sqrt[3]{2})^{-1}$となる様なpairⓟとⓠを見出すことが目標である：

$$(*)\quad ⓟの高さ = (\sqrt[3]{2})^{\varepsilon} \times (ⓠの高さ)\ ,\ (\varepsilon=+1 または -1)\ .$$

ここで$\sqrt[3]{2}=1.259921\cdots$の近似値として，少々考えた末，1.25=5/4を用いることにした．我々にとっては，1.26の方が勿論，もっと正確なのであるが…．(本稿末尾の3行をご覧下さい．)

さて，欄**(ii)**には，次の数値を記してある．欄**(i)**で160以下の甕(p=8,9,4,6)にはその高さに$\sqrt[3]{2}$を乗じた値；170以上の甕(p=7,3,2)には$(\sqrt[3]{2})^{-1}$を乗じた値；また⑤，①，⑥には$\sqrt[3]{2}$と$(\sqrt[3]{2})^{-1}$をそれぞれ乗じた場合の数値を記しておく．

(5) 以上の簡単な計算の結果，認められる"coupling"(即ち**(4)**の条件(*)が近似的に成立すると見られる場合)を欄**(iii)**に示した．

(注) 一般的にいえば，望ましい精度は，欄**(i)**における高さの差の最小値の半分より小さいことである．従って，(⑤と①の高さの差が5mmであることを考慮して)差し当たり2mm以下とすれば，矛盾は起こらないことが期待できる．

以下に，全ての甕について，couplingの状態を分類して示してみる．(上に述べた“正常”と“不適格”という区別は，ここでは考慮しない．)

(A) (coupling成立)
⑤と⑧ — 誤差≦1，
②と④ — 誤差≦2，
③と⑨ — 誤差≦3．

(B) (scale逸脱)[=欄**(ii)**の値は何れも一覧表の枠外に出てしまう]
①,⑥.

(C) (couplingせず)=[一覧表の中に，3mm以下の誤差で対応する甕はない]
⑦.

以上の考察をまとめて，次の様に言うことが出来る:

「②が④の，⑤が⑧の，また③が⑨のほぼ2倍積である．」

(6) 以上の“数値計算”を手掛かりにして，次のことを一応認めることにする:

「当時，何らかの形と表現で，$\sqrt[3]{2}$ (の近似値)に“当たること”が知られていた可能性がある．」

但し，この物の存在と性質を確認するには，もっと多くの正確な資料に基づいた解析が必要である．

§3. コメント(基本的なことと発掘の夢想等)

(1) 伝説の変形 — “伝統的な”Minosの「命令」(殯室の倍積)[3]について，蛇足を付け加える．これについては，(誰かが言い出した)“甕の倍積”が元の問題であったと考えるのが，寧ろ自然でないだろうか．この甕の課題に感心した(或いは面白がった)“詩人”が，〈殯室の倍積〉を思いついて，(ニヤリとして)“神話もどき”をでっち上げたというのは，あり得ることの様に思われる．

序でながら，三百年ほど前の江戸の町の居酒屋に，「貧乏徳利」と呼ばれる一升徳利が普及していたそうである(酒屋は，元は庶民に酒を飲ませるところであった)．そのう

ちに庶民諸氏の間に，酒を買って自宅へ持ち帰って飲む風習が広まり，そのために五合徳利と二合五勺徳利が出来たという．筆者は本稿のワイン甕の倍積を思いついてから後で，この“半積問題”を知ったのであるが，3500年前のクレタの話が，(勿論無関係に)300年前の江戸でチマチマした風俗になって復活したというところである．

(2) “数学史”と史実 ── 倍積問題が“解決されていたこと”を予想する試案(“必要条件”の一つ)を，§2で提示したが，筆者は，「彼らクレタ人が立方根を用いて倍積問題を解いていた」と思っているのではない．つまり序言の最初に述べた様に，こんなことは“通念”通りの“数学史”にはならない．仮に彼らがこの問題を何らかの形で“解いていた”としても，彼らの苦心が，近世の数学の一片と関連が着くというだけのことである．つまり立方根は，倍積問題が解決していたことの数学的解釈であって，直ちに彼らの工夫を表すものではない．第一，彼らは“真の値を近似する”という思弁形式など持っていた筈がない．(如何なる分野と地域においても，この思弁が生じるのはギリシャ数学の誕生以後であろう．その証拠に，ギリシャでは，倍積問題は恐ろしく難しい問題になっていた)．そこで実際にクレタ人が行ったことの経過(充分条件)を探ろうとすると，もう一つ別の想像をすることになるが，それは無意味ではないと思われる．(次項(3))．

(3) クレタ人の“作業” ── 本稿の“クレタ文化にひそむ”$\sqrt[3]{2}$は，“我々の立場”からの解釈である．従って，特に彼らが理論的(または経験的)に$\sqrt[3]{2}$を知っていたことにはならない．(というより，そんなことはあり得ない．)

彼らが倍積を目標に したことは認めることにして，彼らのした(出来た)ことを想像してみよう．彼らがいろいろな大きさの甕を作って，その中から解になっていると思われる甕を探したというのはありそうなことである．この方法は，何十もの大甕を試作しなければならない様にも見えるが，模型を作れば大した作業ではあるまい．宮殿でロクロを使って日常用の(或いは儀式用の)土器を造っていた工人には，甕の小型の模型の製作ぐらいは何でもないことだったであろう．

もう一つ，相似形についての知識と仕事は，工人たちにとっては全く日常的なことであったと思われる．(話を一般化すると，ヒトは，合同より相似の認識が先行しているように思われる．序でながらこのことは，1000年以上のちにギリシャ数学が発生したことにとっても，重要な“生物学的”根拠の一つである様に，筆者には思われる．)

この話に合う様な小さな模型の甕が多数処分されている遺跡でも見つかれば，(本稿の筆者にとっては)めでたいことである．

また$\sqrt[3]{2}$は(奇蹟的といってよい程)計算に都合の良い根数である(倍積するには甕の高さと胴回りを1/4だけ増せばよい)．更にクレタ人は10進法を使っていたそうだから，(文

字はlinear　Bであっても)1/4を意味する“筆跡”(?)でも見つかれば，尚更めでたいことである.

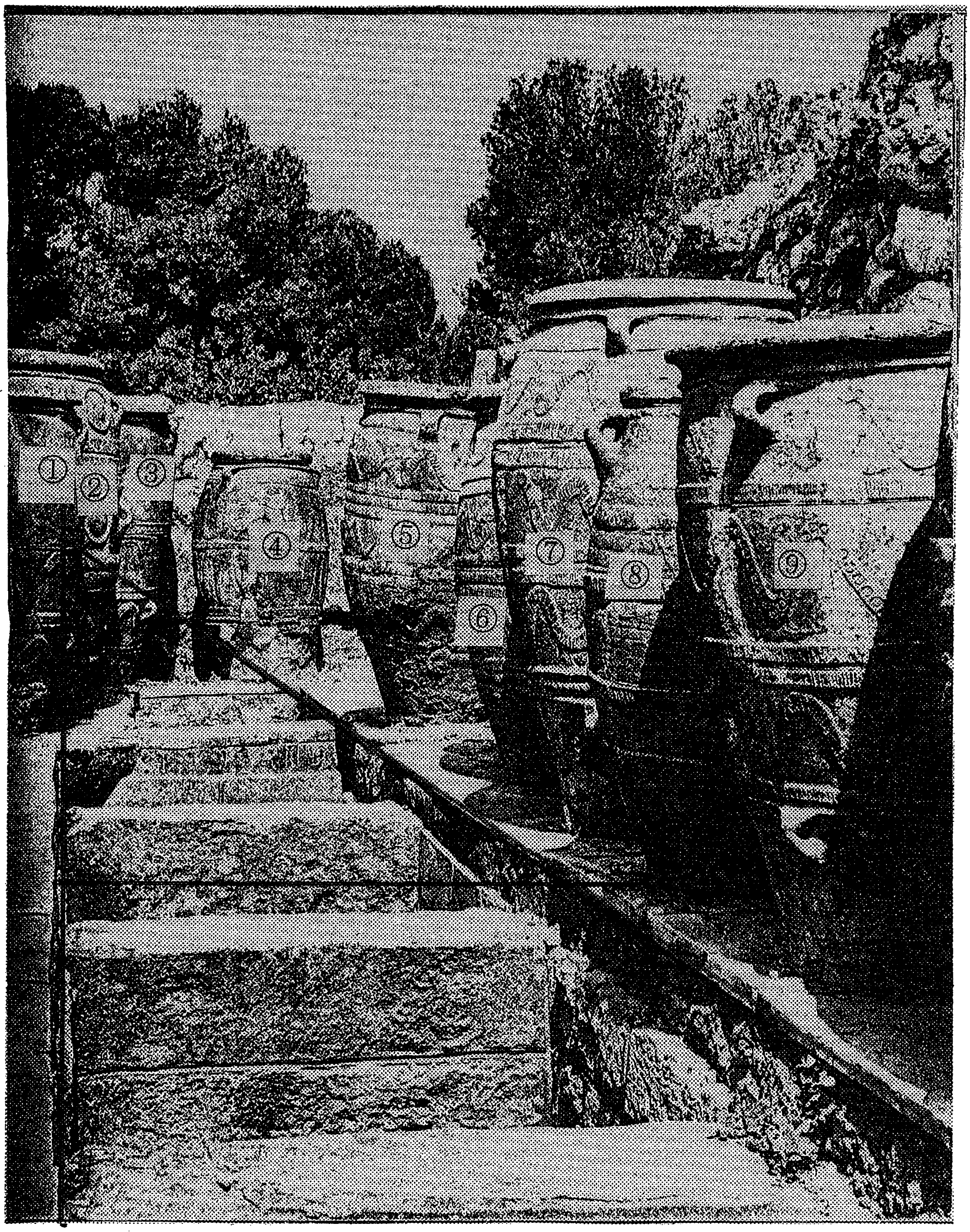
参考文献

[1] 吉沢尚明:「数学通史についての私見」——数理解析研究所考究録1019(数学史の研究)，

1997年11月．(pp.120-132，特に121-122)．

[2]「古代地中海美術」—大系世界の美術4，新規矩男編　，1986．(p.123)．

[3] Thomas Heath : A History of Greek Mathematics , vol I　, Oxford University Press (1921)，(pp.244-245)



Knossos宮殿西翼部の倉庫([2]から)

甕の一覧表

目盛 (mm)	(i) カメⓟと高さ(h)	(ii) C×h または C^{-1}×h ($C \fallingdotseq \sqrt[3]{2}$)	(iii) coupling ($\boxed{}$ は誤差)
190			
	② (186)	148.8 [= 186 × 4/5]	
			②-④ $\boxed{2mm}$
180			
	③ (177)?	141.6 [= 177 × 4/5]	
	⑦ (174)	139.2 [= 174 × 4/5]	③-⑨ $\boxed{3mm}$
170			
	⑤ (168)?	210 [= 168 × 5/4] 134.4 [= 168 × 4/5]	
	① (163)?	203.7 [= 163 × 5/4] 130.4 [= 163 × 4/5]	⑤-⑧ $\boxed{1mm}$
160			
	⑥ (155)	193.5 [= 155 × 5/4] 124 [= 155 × 4/5]	
150	④ (150)	187.5 [= 150 × 5/4]	
	⑨ (144)?	180 [= 144 × 5/4]	
140			
	⑧ (135)	169 [= 135 × 5/4]	
130			