数理解析研究所講究録
1130巻 2000年 140-147

古典関数解析から確率解析へ

ー 特にイタリア、フランスの関数解析の流れを追って ー

飛田　武幸
Takeyuki Hida
名城大学　理工学部

0．始めに。

Poincaré 以降、確率論と関数解析はたえず密接な関係を保ちながら発展を続けてきた。これまで、しばしばイタリアの伝統のある大学を訪ねる機会があって、その奥深い解析学の歴史に直接触れることができ、感銘をうけるだけでなく、現在に生きるアイデイアの探求を試みたいと思うようになった。それは当然のことながら、確率解析学に対するものであり、特に確率変分との関連を見出したいという希望からである。まさに、温故知新の故知にならいたいと願うものである。

もちろん、イタリアと関連の深いフランスにおける解析学や確率論の研究とは切り離すわけにはいかない。それにもできるだけ触れてみたいと思う。

これらのことを以下の小史の中で眺めてみよう。

1．一つの小史。

変分を意識する以上はまづ

L. Euler (1707-1783),

を見落としてはなるまい。彼の変分法については Euler 全集の２４巻、２５巻をあげておこう。

その他、前回の報告（講究録 1064　数学史の研究, 1998年）を参照して頂きたい。

P. S. Laplace. (1749 - 1827)

何といっても確率論を解析学の理論と結びつけたのは彼による次の著書であった。

"Théorie analytique des probabilités". 初版は 1812. （その後数回も版を重ねている名著である。）そこでは、確率分布の母関数を導入するなど、解析的なアプローチがなされた最初のものと思われる。歴史的にも重要な位置を占めるものである。

ついで出版された書物

"Essai Philosophique sur les Probabilités", 1914.

は少しトーンが違うようだ。

Henri Poincaré (1854 - 1912)

確率論に対する彼の見識は、科学全般に対する著述のなかに随所にみられる。それは今日でも参考となるところが多い。

確率論や三体問題、複雑系などについての彼の１４篇の論文を集めた

"L'analyse et la recherche. Collection savoire: Sciences." 1991. Hermann.

は読者に好都合である。なお
" La science et l'hypothèse." 1902 (邦訳,岩波文庫)。
にも教えられるところが多い。

Jacques Hadamard. 1865 - 1963.
" Leçons sur le calcul des variations." 1910, Hermann.
歴史的にみて、変分法に関する重要な文献の一つである。内容には、確率変分に発展するものが多く興味深い。
なお、変分に関する彼の最初の論文をあげておこう。
Sur une question de calcul des variations. Bull. Soc. Math. France. 30. 全集2, 467-470.

Vito Volterra. 1860 - 1940.
全集は5巻よりなる。 第5巻は変分に関する論文が多く、有名な Lotka-Volterra 方程式の論文もここにある。 その定式化は興味深い;今日の言葉で言えば、Lagrange function が情報量などで表現出来るところもあったりして、いろいろ見なおすことも有意義であろう。
著書として
" Théorie générale des fonctionnelles." 1936. (with J. Pérès), Gauthier-Villars.
" Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie." 1931. Gauthier-Villars.
をあげておきたい。
次節でも、またあらためて論じる。

Leonida Tonelli. 1885 - 1964. および Paul Lévy. 1886 - 1971.
次節で扱う。

Nobert Wiener. 1894 - 1964.
歴史的には Wiener measure が導入された論文
Differential space. J. Math. Phys. 2 (1923), 131 - 174,
は有名であり、cybernetics や nonlinear problems in random theory など、その後の偉大な業績の支えとなっている。

Andrei N. Kolmogoroff. 1903 - 1964.
Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnumg. Math. Annalen, Bd.104 (1931), 415 - 458.
この論文はマルコフ過程の研究に解析的方法の積極的な適用を提示し、その後の確率過程の研究に与えた大きな影響ははかり知れない。
その他、測度論を用いて近代確率論の基礎を築いた名著
" Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnumg." 1933. Ergeb. Math. 1933,
は確率論を学ぶ人なら誰しも知るところである。

Bertrand Russell.

"Human knowledge. Its scope and limits." 1948, Chapter 5.
は一読するのも無意味ではなかろう。

William Feller. 1906 - 1971.

"An introduction to probability theory and its applications." vol.1, 1950 ; vol.2, 1966. Wiley.
これも周知の文献である。vol. 1 初版の序文で「確率論における解析的方法」について述べる と言い、確率論は純粋数学のトピックとして扱われるべきものとした。
彼を私的にも知る者として、Feller ほど数学特に確率論を自然科学の中に正しく位置づけようとした学者は近年珍しいのではないかというのが筆者の感想である。

以後、現代につながるが、概観はこの辺でとどめて、本題に入りたい。

2. Lévy の確率論 など。

フランスにおける関数解析と確率との連係した発展は、これまで、昨年の報告も含めて何回か報告しているが、それで事足りるものではない。

Hadamard はこの節では割愛する。

É. Borel もこの方面での功績は大きい。彼の名を冠した定理もあることから推察されよう。今回は Borel の次の書物を挙げておきたい。

"Valeur pratique et philosophie des probabilités." 1939, Gauthier-Villars.
当時の philosophie がうかがえる。付録の 6 篇からなる Note も見逃さないように！

Paul Lévy. 1886 - 1971.

重ねて登場する。Lévy の興味が見かけ上関数解析から確率論にも及んだのは 1910 年代の終わり頃であった。著書
"Calcul des probabilités." 1925.
は本論自体の有意義さは別として、その付録には彼の 1919 年の College de France での講義を基にした論文
Les lois de probabilité dans les ensembles abstraits. Revue de Metaphys. et de Morale, vol.32, 149 - 174. （多分 1924 年の巻）
が収められている。確率分布の各タイプの例、連続濃度をもつ空間上の確率測度から進んで Lipschitz 連続関数の空間上の確率測度を論じている。さらに、$L^2[0,1]$ 上の解析を指向して汎関数の平均を扱っている。半径 R の球（実は球面になる）での平均を考えるうちにガウス測度が登場する事情は、今になってみればホワイトノイズの測度が自然に導入される話の楽屋裏を垣間見るような気がする。何よりも興味深いのは、ここで確率論創生の一場面が展開されていることである。アイデイアをたどってみるのも興味深いのではなかろうか。

Lévy の "Addition" と "Mouvement brownien" と略称で呼ばれている不朽の名著の他に、上記の "Calcul" と

" Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle." 1951, Gauthier-Villars.
は分野を考えずに接すべき書物と理解する。

確率変分へのアプローチを目指す人々にとって、これまで挙げたどの書物にも参考となるものが見られる。さらに、Lévy の 300 ページを超える力学についての労作
" Cours de mécanique." 1928, Gauthier-Villars.
も時間をかけて調べたいものである。後の方には変分に関する結果もあり、後日の報告事項としたい。

3．Pisa の解析。

Pisa の大学 Scuola Normale Superiore Pisa は Paris にある Imperial School の姉妹校を意図して 1813 年に Napoleon（1769 - 1821）により創始されたが、その後大改組され実質上の開学は 1862 年で,国立の独立した研究・教育の機関として出発した。

ここの数学教室は Dini, Tonelli, Volterra, Fermi 達が研究した所として、よく知られており、解析学と物理学はその伝統を誇っている。

変分と確率に関係したところをとりあげてみよう。

Tonelli の変分解析。

Pisa の Scuola Normale Superiore では Tonelli の没（1946）後 50 周年の記念行事が盛大に行われた。その折に、二つの特別講演があった。

1）E. de Giorgi, Variational Calculus.

2）A. Faedo, Scientific work of Tonelli.

近く、この会の Proceedings が出版される予定と聞いている（既刊かもしれない）。
ここの数学教室には、彼の偉大な業績を記念して、「Tonelli の部屋」が一室設けられている。

Tonelli の著書（前出）は変分問題に尽くされていて,第 1 巻（466 ページ）と第 2 巻（660 ページ）の 2 冊におよぶ大作である。第 1 巻は 3 部からなる。第 1 部の始めから曲線の集合に位相を入れること、解析的な扱いなどを述べ、さらにルベーグ積分の説明もしながら、本論への導入をはかっている。第 2 部で曲線を変数とする汎関数の取り扱いにはいる。Hadamard の著書（1910 年, 前出）を引用しているが,関数の（汎）関数というよりは、曲線（幾何学的な）の汎関数ということをより強く意識しているようである。第 3 部で本格的に曲線 C の汎関数 Ic の議論となる。内容は C 上での積分値として与えられる汎関数についての（無限次元）微積分である。

第 2 巻は曲線の汎関数の極値問題に終始する。 Ic の変分や極値の存在定理を詳しく論じている。曲線のパラメータ表示をして、Darboux の曲面論を引用するなど、曲線論を有効に活用している。もちろん Ic の被積分関数を F とするとき、Euler 方程式

$$F_y - (d/dx) F_{y'} = 0$$

も導かれて、いくつかの課題に適用されている。

また、等周問題や、曲線の動く範囲を制限したときの極値問題にも多くのページを

割いていて、興味深い話題となっている。

この本は、大作ながら全体を通じて、多くのことが系統的に述べられている。ゆっくりフォローしたいものである。

Vito Volterra の関数解析。

Volterra は 1860 年にアドリア海に面したイタリア東部の街 Ancona い生まれた。しばらく Florence に学んだ後、1878 年に Pisa の大学に入り、 Dini, Betti, Padova 達の講義を聴き、指導を受けた。ついで Scuola Normale Superiore に入学を許可され、ここで Dini の薫陶を受けた。

1882 年　Doctor of Physics. 学位論文は hydrodynamics について。
1883 年　23 才の若さで Full Professor of Mechanics, University of Pisa となる。
1900 年　Beltrami の後をついで Chair of Mathematical Physics in Roma に任ぜられた。
この他, 研究面で、Napoli, Paris の大学とに直接、間接に大きな影響を与えた。

関数解析の研究法として、彼独特の方法 "passing from the finite to the infinite" によるのがよく知られている。 例えば Volterra Laplacian..

Volterra の名を冠してよばれる積分方程式など解析学への貢献、また電磁場の問題など数理物理学における成果も大きい。関数解析については

" Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles." 1913, Gauthier-Villars.

を、また汎関数の理論については 1936 年の J. Pérès との共著の書物（前出）を挙げたい。

数理生物学にたいしても新しい方向を提唱している。 例えば、logistic equation, また有名な Lotka-Volterra equation を変分問題として導いていることなどに注目したい。内容を今日の言葉で理解するのもよいであろう。 なおこの方面の著書として、前に紹介した 1931 年の la lutte pour la vie の本を薦めたい（復刻版も Jacques Gabay より出ている)。

Roma University Tor Vegata には,彼の功績を称えて、研究センター Centro Vito Volterra が設置されている。 現所長 L. Accardi.

4. 確率解析へ。

現時点で我々にとって最も興味があるのは、当然のことながら、今世紀半ば頃までのヨーロッパにおける関数解析の成果がどのような形で現在の数学、特に確率解析学につながるのか、あるいはつながっているのか、ということである。

今回の報告でもわかるように, Lévy の確率論が関数解析とその軌を一にしているのは当然のこととして, 確率論に対する Poincaré, Hadamard 達の論説、さらには Feller が確率論の名著の第１巻、初版の序文の冒頭で述べている意気込みや Kolmogoroff の確率解析における偉大な業績などをみるときは、Pascal-Fermat の話に基づく流れとは趣を異にするように思われる。

前世紀末から盛んになった古典関数解析から、現在の確率解析の一つの方向としてのホワイトノイズ解析への自然なルートを認識しつつ、今ここで温故知新の故智に学びたいものである。

4．1．ホワイトノイズ解析。

無限次元ベクトル空間、ヒルベルト空間など、において、単位球面上の一様な確率測度を目指せば、空間を拡張した上で、自然にホワイトノイズ測度に到達する。

この測度が回転で不変なことの認識は無限次元回転群の定義を導くことになり、我々はそのような群が H. Yoshizawa によって定義されたものが最適であることを知るのである。したがって、ホワイトノイズ解析が、この回転群から生起する（無限次元）調和解析の側面をもつことになる。

そのような方向の芽生えは、回転群とか無限次元固有のラプラシアンなどで、すでに古典関数解析の中に見られるのである。それも含めて種々のアイデイアを活かすことは稔り多い分野を開拓することになろう。

もう一つ故智に倣えば、ラプラス変換とかフーリエ変換などを我々の無限次元の場に持ち込むことである。ホワイトノイズ測度を基にして構成されるヒルベルト空間（L^2）は実は超関数の非線形汎関数のなす空間である。そのような汎関数の visualize された表現を得るために、所謂 S 変換を導入する。それはラプラス変換を若干 modify したものである。結果を U-functional とよぶが、これは従来の解析で扱い易いものとなる。

U-functional に対する演算によって、元のホワイトノイズ汎関数に対する偏微分作用素（annihilation operator）や、その共役作用素（creation operator）がうまく定義できる。いわば、S 変換は古典解析とホワイトノイズ解析とをつなぐ役割を果たしている。

さらに、U-functional を用いて（L^2）拡張した超汎関数の空間も構成できて、我々の解析の守備範囲を広げてくれる。ここでも、関数解析と確率論との美しい interplay を見ることができる。

4．2．確率場。

時刻 t をパラメータとする確率過程 $X(t)$ では、t が動くことによって獲得できる情報、あるいは複雑性のありかたは、t が多次元になれば次元に応じて増加するのは当然である。さらに、t の代わりに曲線あるいは曲面 C をパラメータとする確率場 $X(C)$ を考えれば、C の動く範囲は一般に無限次元になり、情報理論からみれば、さらに効率の良いものとなるであろう。そのような場の具体例は、物理学や生物学その他の分野で多く見出すことができる。

これをホワイトノイズ解析の課題とするならば、場 $X(C)$ は C の他にもホワイトノイズの見本（超）関数 x の関数として表現されることになる ： $X(C) = X(C, x)$.
ここでも S 変換を適用することができて、ふたたび古典関数解析が有効に適用されるであろう。

このとき、いくつかの注意が必要である。

1)。当面、図形 C が有界で境界を持たない場合に限定する。そうする主な理由は C を動かす場合,境界があれば図形の不連続な部分もそれにつれて動くことになる。したがって確率場の変分は非常な singularity を生じることになるからである。したがって C は滑らかな contour あるいは単純な閉曲面と仮定する。

2)。さらに、確率場 X(C, x) の変分を考えるとき、パラメータが C に制限されたときもホワイトノイズを定義しなければならないし、しかも C が変わっても consistent でなければならない。そのようにホワイトノイズが正しく定義されるためには、C は良い幾何学的な性質を持った図形であることが望まれる。特に、C でのホワイトノイズを解析的に定義するため C 上の関数の作る空間の Gel'fand triple がきちんと定義される必要がある。C の微小変化に応じた場の変化を求めたり、いわゆる causality を保つ議論も必要で、結局 C は滑らかな ovaloid と仮定することになった。

3) C はユークリッド空間 R^d の中を動きまわるとしよう。解析に乗せるためには C の変形はその空間の微分同型写像の群の適当な部分群であることが好ましい。最も簡単な群としては time shift または space-time shift のなす可換群がある。より興味あるものとしては conformal group をあげたい。

<u>Future directions.</u>

当面の課題の一つとして、確率場 X(C) に対する確率変分方程式の理論を確立することである。個々の例については、いくらかの結果が得られているが一般論には程遠い。
試みとしては、確率過程 X(t) に対する Lévy の stochastic infinitesimal equation がお手本となって、その一般化として確率場 X(C) に対する stochastic variational equation を提唱することであろう。

次は情報理論的な扱いである。 X(t) のときと比べて、X(C) の場合は C が動くときどれだけ多くの情報を運ぶことができるのか。あるいは complexity の違いはどうか。
それらを量的に示す方法はどうか、など課題は尽きない。shift に注目したときは、その spectral multiplicity を見ておくのも一つのアイデイアであろう。ここでも古典関数解析ばかりか、近代解析のお世話にならねばならない。

確率場の分布に注目するとき、何といってもガウス型から始めなければなるまい。
ここでも、ホワイトノイズによる標準表現が有力な手段である。1次元パラメータの場合と同様に、標準表現の一意性が証明される。その表現を用いて、X(t) の場合と同じように、X(C) のマルコフ性を定義し、表現の形を kernel の言葉で決めることができる。
ガウス型マルコフ確率場の中には「場の bridge」もあって、C のクラス **C** を適当にきめて場の path space

$$\{ X(C) \ ; \ C \in \mathbf{C} \}$$

を考えることも可能である。X(C) がランダムであるので path についての平均（積分）も考えることができて、その扱いはまさにホワイトノイズ解析の話題になる。X(C) の汎関数についての path integral を指向していると言っては言い過ぎであろうか？

終わりに

　これまで述べたような立場で確率論を見るのは、幾分偏っているのかもしれない。しかし、一つの側面をクローズアップしてみるのも意義あることと考える。確率論の視野を広げるためにも、また別な側面をもライトアップしてみたい。情報理論との係わり合い、あるいは複雑系の中で占める位置について等、これから調べてみたいことである。

－　以上　－