

## 近世日本数学史に現われた無限級数の特質について\*

小川東 (四日市大学)†

1999 年 5 月 11 日

### 1 はじめに

本稿は建部賢弘 (1664–1739) の『綴術算経』(1722) および『円理弧背術』(n.d.) に現われる無限級数の発展について考察し、その特質を探るものである<sup>1</sup>。

一言で言えば、建部は『綴術算経』において数値計算的考察により円弧長が無限級数で記述されることを発見し、次に『円理弧背術』において無限級数を方法、手段として用いて、改めて円弧長を計算した。ここで注意すべきことは、無限級数という用語は便宜的なものであり、今日的意味での無限級数を想定してはならないということである。建部は一般項を与える帰納的關係を見出し、それを無限に続けることができ、さらに計算を続けるにしたがって真値へいくらかでも近づくと観察しただけであって、決して形式的無限級数やその収束性を考察の対象としたのではなかった。このように建部は新たな数学的对象を生み出すことはなかったが、これは近世日本数学全般における大きな特質であった。

Enrico Giusti は「数学的对象は現実の対象からの抽象に由来し、それらに独特な特徴を記述するものではなく、種々の手続きの対象化のプロセスに由来する」と述べている<sup>2</sup>。Giusti は Euclides の幾何学や群概念の発生過程を例示してこのことを明確にしようとしている。精確な議論、批判は別に譲らなければならないが、今日の多くの数学者がこの仮説に首肯することは確かであろう。それだけ Giusti の視点は今日的な視点を持つ仮説ということができる。

Giusti の仮説を念頭におくとき、建部の数学は一つの興味深い事例を与えている。すなわち、建部は円弧長計算においてまず無限級数的な表現に到達し、さらに無限級数を道具として利用し計算を項別の計算に分割した。しかしその後の発展を見ても、この計算の簡略化のための手続きは決して無限級数として数学的に対象化されることはなかったのである。近世日本数学においては、Giusti の言うような手続きの対象化という局面は生じなかった。新しい数学的对象の創出が数学の発展というならば、近世日本数学は発展しなかったことになるが、近世日本の数学者も一定の数学研究の範囲を確定しており、また次第に困難な問題の解決に向かっていったという点では重大な発展をしているのである。新たな数学的对象の創出

\*On the Characteristics of Infinite Series Appeared in the History of Pre-modern Japanese Mathematics.

†Ogawa Tsukane (Yokkaichi University), ogawa@yokkaichi-u.ac.jp

<sup>1</sup>以下、『綴術算経』の引用は国立公文書館蔵内閣文庫 194-214 を用いる。本論で扱う円弧長計算に関しては『不休綴術』(1722)にも記述があるが、内容は同じであるからここでは『綴術算経』から引用する。また『円理弧背術』は東北大学蔵林 911 をもちいる。『円理弧背術』には著者名、年紀ともないが、その内容の検討から『綴術算経』あるいは『不休綴術』以降の執筆であり、著者も建部としてよい。

<sup>2</sup>[4] p.31.

は数学一般の発展を特徴づけるものではなく、種々の数学を特徴づける指標の一つに過ぎない。もちろん Giusti は数学的対象の創出が数学の発展の指標であるなどとは述べていない。Giusti の議論は西洋数学における対象の本性に関する考察なのである。

## 2 建部賢弘の円弧長計算の結果

建部賢弘は『綴術算経』の中で、直径  $d = 10$  寸の円周から矢  $c = 0.000001$  寸の円弧を切り取ったとき、その長さ  $s$  を

$$\begin{aligned} \left(\frac{s}{2}\right)^2 &= cd + \frac{1}{3}c^2 + a_1 \frac{8c}{15d} + a_1 a_2 \frac{9c}{14d} + a_1 a_2 a_3 \frac{32c}{45d} \\ &\quad + a_1 a_2 a_3 a_4 \frac{25c}{33d} + a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \frac{72c}{91d} + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

と述べている。ここで、

$$a_1 = \frac{1}{3}c^2, \quad a_2 = \frac{8c}{15d}, \quad a_3 = \frac{9c}{14d}, \quad a_4 = \frac{32c}{45d}, \quad a_5 = \frac{25c}{33d}, \quad \dots \quad (2)$$

である。そしてこの  $a_n$  の分母分子を別々に観察し、 $n \geq 2$  のとき、

$$a_n = \begin{cases} \frac{2n^2}{(2n+1)(n+1)} \cdot \frac{c}{d} & (n: \text{偶数}) \\ \frac{n^2}{(2n+1)(n+1)/2} \cdot \frac{c}{d} & (n: \text{奇数}) \end{cases} \quad (3)$$

となることを帰納的に推論した。

一方、『円理弧背綴術』において得られた無限級数は

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = cd \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right\}, \quad (4)$$

ただし

$$b_1 = \frac{2^2}{3 \cdot 4}, \quad b_n = b_{n-1} \frac{(2n)^2}{(2n+1)(2n+2)} \frac{c}{d} \quad (n \geq 2), \quad (5)$$

であった。すなわち、

$$\begin{aligned} \left(\frac{s}{2}\right)^2 &= cd \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \prod_{i=1}^n \frac{(2i)^2}{(2i+1)(2i+2)} \left(\frac{c}{d}\right)^n \right) \right\} \\ &= cd \left\{ 1 + \frac{2^2}{3 \cdot 4} \left(\frac{c}{d}\right) + \frac{2^2 \cdot 4^4}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \left(\frac{c}{d}\right)^2 + \frac{2^2 \cdot 4^4 \cdot 6^6}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \left(\frac{c}{d}\right)^3 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

この (6) が近世日本数学において最初に得られた結果として知られているものである。明らかに (1) と (6) は同じであるが、それを導いた方法は全く異なる。しばしば『綴術算経』における (1) を導いた方法をもって、(6) が得られたとすることがあるが、注意が必要である。

本稿は (1) と (6) を得るために用いられた方法の検討を通して、近世日本数学史における無限級数の特質を探るものであるが、その前に無限級数の表現形式について述べておく。すなわち、無限級数 (1) や (6) において特徴的なことは、一般項を漸化式の形で得ていることである。これは、たとえば、松永良弼 (1692?–1744) の『方円算経』 (1739) においても同様である。そのいくつかを例示すれば、

$$\begin{aligned} s &= 2\sqrt{cd} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \prod_{i=1}^n \frac{(2i-1)^2}{2i(2i+1)} \left(\frac{c}{d}\right)^n \right) \right\} \\ &= 2\sqrt{cd} \left\{ 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{c}{d}\right) + \frac{3^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \left(\frac{c}{d}\right)^2 + \frac{3^2 \cdot 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \left(\frac{c}{d}\right)^3 + \dots \right\}, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= \frac{s^2}{4d} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{(2i+1)(2i+2)} \left(\frac{s}{d}\right)^{2n} \right) \right\} \\ &= \frac{s^2}{4d} \left\{ 1 - \frac{1}{3 \cdot 4} \left(\frac{s}{d}\right)^2 + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \left(\frac{s}{d}\right)^4 - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \left(\frac{s}{d}\right)^6 + \dots \right\}, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= s \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{2i(2i+1)} \left(\frac{c}{d}\right)^{2n} \right) \right\} \\ &= s \left\{ 1 - \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{c}{d}\right)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \left(\frac{c}{d}\right)^4 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \left(\frac{c}{d}\right)^6 + \dots \right\}, \quad (9) \end{aligned}$$

などである (ここで  $s$  の長さ、 $c$  矢の長さ、 $d$  は直径、 $a$  は弦の長さ)。

### 3 建部の円弧長計算の方法

弧長を表現する式 (1) を得るために『綴術算経』において用いられた方法は、まず、今日の Richardson 補外あるいは Romberg 法による加速計算を実行して  $(s/2)^2$  の十進値を詳細に求めておき、この数値の並びを観察し、連分数展開を用いながら、次第に誤差を近似分数化してゆく、というものであった。この  $(s/2)^2$  の十進値を求めるための方法は、円周率計算に用いた方法を円弧に応用したものである<sup>3</sup>。この誤差を次第に近似してゆく過程で無限級数的な表現が得られたのである。建部はこの結果について次のように述べている<sup>4</sup>。

分子分母の数によって、原術のように逐差を重ねて半背巾を求めるときには、碎抹することなしに、直接真の数を得ることができる。これが弧背の本質を究めるものである。円弧というものは尽くすことができないという点にその本質がある。したがって、その術もまた尽くすことができない表現となることを理解せよ。思うに、数にも尽くすことのできるものとできないものがある。術にも尽くすことのできるものとできないものがある。本質にも尽くすことのできるものとできないものがある。

最初の一文は、原術 (すなわち (1)) では (3) のように一般項を帰納的に作ることができ、いち弧を分割する計算をしなくても良いという意味である。また「尽くすことができる/でき

<sup>3</sup>建部の Romberg 法による計算については [1], [6] など、建部の円周率計算についての詳細については [7]。

<sup>4</sup>『綴術算経』47 丁ウラ。

ない」ということを例示すれば、4分の1, 5分の1は数の尽きる例であり、3分の1, 7分の1は数の尽きない例である。加減乗は術の尽きる例であり、帰除(帰は一桁の割算, 除は二桁以上の割算)開方は術の尽きない例である。方形の周囲, 面積などは本質上尽きる例であり、円弧長は本質上尽きない例である<sup>5</sup>。

このように円弧長は本質上尽きないものであるから、その術も尽きず、その結果得られる数も尽きないのであるが、このことを理解するのは難しい。建部はこのことを次のように述べている<sup>6</sup>。

人は皆その本質を認識することなく、疑って、たとえば直角三角形の弦を求めたり、錘形の体積を求めるように、本質が尽されるもの、術が尽くされるものとして(円弧長を)求めようとする。これでどうして求めることができようか。

このように建部は円弧の本質に触れたのであるが、しかし本来の目的はあくまでも関がすでに得ていた矢の関数としての円弧長の精度を高めることであった。(1)式は矢が大きな場合には全く円弧長を近似しない。そこで建部はさらに改良を試みて、最終的に

$$\begin{aligned} \left(\frac{s}{2}\right)^2 &= cd + \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{c^3}{d - \frac{9}{14}} \cdot \frac{8}{15} \\ &\quad + \frac{1}{3} \cdot \frac{c^5}{d - \frac{9}{14}} \cdot \frac{1}{d^2 - \frac{1696}{1419}cd + \frac{6743008}{26176293}c^2} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{43}{980} \end{aligned} \quad (10)$$

を得るに至った<sup>7</sup>。

さて『円理弧背術』における式(6)を得る方法は次のようであった<sup>8</sup>。

図1のように $a_n, c_n$ を順次定めるとき、幾何的考察(これを勾股互換之術と呼んでいるが、内容は単なる比例計算である)によって

$$a_n^2 = c_{n-1}d, \quad -4c_{n-1}^2 + 4dc_{n-1} - c_{n-2}d = 0 \quad (11)$$

が成り立つ。ここで $c_n$ を求めれば

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 \approx \left(\frac{2^{n+1}a_{n+1}}{2}\right)^2 = \frac{2^{2n+2}c_nd}{4} = 2^{2n}c_nd \quad (12)$$

によって $\left(\frac{s}{2}\right)^2$ の近似値が求まる(以下、この右辺を $\left(\frac{s_n}{2}\right)^2$ と書く)。

そこでまず $n=2$ のとき(11)式から $c_1$ を解く。建部はこれを、組み立て除法(これを「飯除求商術」という)を繰り返して、

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{c}{4} + \frac{1c^2}{16d} + \frac{1c^3}{32d^2} + \frac{5c^4}{256d^3} + \frac{7c^5}{512d^4} + \frac{21c^6}{2048d^5} + \frac{33c^7}{4096d^6} \\ &\quad + \frac{429c^8}{65536d^7} + \frac{715c^9}{131072d^8} + \frac{2431c^{10}}{524288d^9} + \frac{4199c^{11}}{1048576d^{10}} + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

<sup>5</sup>Ibid.

<sup>6</sup>Ibid., 48 丁オモチ。

<sup>7</sup>関による弧長計算から建部のこの結果までの詳細は[8]。なお(10)の右辺第4項分母にある $c^2$ の係数は正しくない。この分数に最も近い正しい分数は $7129717/27677493$ である。

<sup>8</sup>『円理弧背術』の内容は日本数学史研究の初期から明らかにされている。とくに1900年にパリで開催された国際数学会議での藤沢利喜太郎の講演[2]も『円理弧背術』に関するものであった。ほかにも[3], [5]など、多くの文献に解説されているが、ここでも必要最小限の範囲で概観しておく。

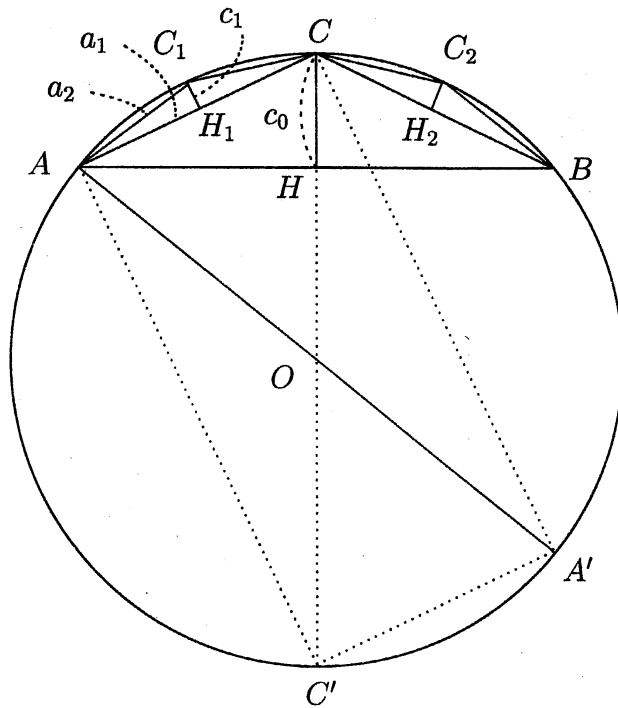


図 1: 勾股互換之術の図

と求めた. 建部はここに現われる係数を観察して, この一般項  $a_n$  は  $a_n = a_{n-1} \cdot \frac{c \cdot 2n - 1}{d \cdot 2n + 2}$  であると述べている. 続いて  $n = 3$  のとき (11) 式にこの無限級数 (13) を代入して, 同様の計算をしたのち, 再び係数を観察して,

$$c_2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n = b_{n-1} \cdot \frac{c(4n-1)(4n+1)}{d(4n+2)(4n+4)} \tag{14}$$

を得る.

しかしこの方法では  $c_3$  以下を求めるのは繁雑であるとして,  $a_n$  から  $b_n$  を得る規則を推測して, その規則を援用して  $c_3$  以下  $c_{10}$  までの各係数を順に推測する. その結果を (12) に代入して, 10 個の  $\left(\frac{s_n}{2}\right)^2 = 2^{2n} c_n d$  を求める.

次に  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{s_n}{2}\right)^2$  を計算するのであるが, まず各  $\left(\frac{s_n}{2}\right)^2$  ごとに隣り合う係数の比を計算し, その係数間に成り立つ規則を帰納する. たとえば, (13) より

$$\left(\frac{s_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}cd + \frac{1}{16}c^2 + \frac{1}{32} \frac{c^3}{d} + \frac{5}{256} \frac{c^4}{d^2} + \frac{7}{512} \frac{c^5}{d^3} + \dots\right) \times 4 \tag{15}$$

である. この括弧の中の各項の係数の比を順に計算して,  $\frac{1}{4} \frac{c}{d}, \frac{1}{2} \frac{c}{d}, \frac{5}{8} \frac{c}{d}, \frac{7}{10} \frac{c}{d}$  が得られるが, これらを  $\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4}, \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 6}, \frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 8}, \frac{7 \cdot 9}{9 \cdot 10}$  と見る. このような計算を繰り返して得られる比を一覧したものが表 1 である (表は  $\left(\frac{s_5}{2}\right)^2$  まで).

表 1: 汎半背巾の係数

$\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4}$	$\frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 6}$	$\frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 8}$	$\frac{7 \cdot 9}{9 \cdot 10}$
$\frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 4}$	$\frac{7 \cdot 9}{5 \cdot 6 \cdot 4}$	$\frac{11 \cdot 13}{4 \cdot 7 \cdot 8}$	$\frac{15 \cdot 17}{4 \cdot 9 \cdot 10}$
$\frac{7 \cdot 9}{3 \cdot 4 \cdot 16}$	$\frac{15 \cdot 17}{5 \cdot 6 \cdot 16}$	$\frac{23 \cdot 25}{7 \cdot 8 \cdot 16}$	$\frac{31 \cdot 33}{9 \cdot 10 \cdot 16}$
$\frac{15 \cdot 17}{3 \cdot 4 \cdot 64}$	$\frac{31 \cdot 33}{5 \cdot 6 \cdot 64}$	$\frac{47 \cdot 49}{7 \cdot 8 \cdot 64}$	$\frac{63 \cdot 65}{9 \cdot 10 \cdot 64}$
$\frac{31 \cdot 33}{3 \cdot 4 \cdot 256}$	$\frac{63 \cdot 65}{5 \cdot 6 \cdot 256}$	$\frac{95 \cdot 97}{7 \cdot 8 \cdot 256}$	$\frac{127 \cdot 129}{9 \cdot 10 \cdot 256}$

ここで、この表の各列の極限值を推測するのであるが、建部は各列ごとにそれぞれを小数に展開してその数値列を観察することによってそれを実行した。たとえば第 1 列は分母に共通の  $3 \cdot 4$  を除いて小数に展開すると、それが次第に 4 に近づくことが観察される。そこで第 1 列の極限は  $\frac{2^2}{6^2}$  とする。以下同様に計算、観察を繰り返して、第 2 列以下の極限を  $\frac{4^2}{8^2}$ ,  $\frac{3 \cdot 4}{10^2}$ ,  $\frac{7 \cdot 8}{9 \cdot 10}$ ,  $\frac{11 \cdot 12}{10^2}$  とする。こうして、 $n \rightarrow \infty$  としたときの各係数間の比に規則性が見出され、これから建部は (6) を得たのである。

## 4 方法としての無限級数

無限級数 (1) を得た建部が、改めて以上のような巧妙な計算によって、ほとんど同じ級数を求めた動機は何であったのか。それは、村松茂清以来の十進数値計算を基にした方法からの脱却を目指すものであったのではなからうか。村松茂清は『算俎』(1663) において内接正  $2^{15}$  角形の周長を計算することによって円周率を小数第 7 位まで正しく求めたが、関孝和はその方法を基にして無限級数の和の公式を用いて初めて加速計算を実行した。その方法は Aitken 法と同様の結果をもたらした。さらに Newton 法に似た方法によって円弧長の計算を実行し、誤差が  $10^{-6}$  程度で円弧長の二乗  $s^2$  を矢の関数として表わした。関の研究を引き継いだ建部賢弘は、関の数値計算的手法を発展させて、Richardson 補外と同様の方法で円周率を小数第 41 位まで求め、また本節最初に述べたような方法で円弧長を表わす式 (1) に到達したのである。

それまでの建部は、村松以来の数値計算的方法を持ち続けていた。そしてその基本的方法のもとに円弧長の計算を実行し、はじめて無限級数 (1) を得た。これは円弧長の本質を表現する点では一つの結論であった。しかし建部は、さらに無限級数が単なる結論ではなく、それまでの基本的方法に取って代わることのできる「方法」でもあるということに気づいたのであるまいか。本節で述べた方法において、最初に  $n = 2$  のとき (11) を解く場合に、 $c_1$  を無限級数の形 (13) で求めているのがそれを端的に示している。建部は無限級数を方法として用いているのである。そして問題を解決する過程であられる諸量を無限級数に

表わすことによって、処理を項ごとの処理に分解することに成功したのである。これは、今日われわれが各種の構造を直和などに分解して考察する方法に通じるものがある。

## 5 手続きの対象化と建部の数学

Enrico Giusti は Euclides の幾何学や群概念の発生を例として、「手続きの対象化」ということを述べている<sup>9</sup>。たとえば群概念の場合、5 次以上の方程式の根号による解法の不可能性を（不完全ながら）述べた Ruffini は、置換が作る群を証明技法として用いている。当時群の概念はなく、したがってそれを表わす術語もなかった。また正確に言えば、Ruffini が考察したのは根の置換そのものではなく、置換の結果生じる順列であった。しかし Ruffini の方法は解法として有効なものであり、また今日から見れば置換群の概念につながるものとして革新的なものであった。その置換操作を導入し、二つの置換が合成されて新たな置換が生じることを明確に示したのは Cauchy であった。方程式論においては Ruffini を越える結果はなかったが、根を交換するという置換をあらたな数学的对象として認識した点において Cauchy は新機軸を生み出した。また Cauchy は置換群の巡回部分群の構造を詳細に研究している。ここに新しい数学的对象が確立したといえる。さらに Galois は置換全体の作る群を考察した。ここでも有効な方法としての置換群から新たな群という数学的对象を認識したという点で、Cauchy の場合と同様の流れが見られる。もちろん Galois の時代にも、今日のような形で群の概念が整理されていたわけではなく、Galois もそのような「言葉」を持たなかった以上、表現には困難が伴ったのである<sup>10</sup>。

このようなヨーロッパ数学史における数学的对象の創出過程に関する Giusti の議論を念頭に置くとき、建部の無限級数をめぐる議論は興味深い。建部は『綴術算経』において円弧の本質を表わすものとして、数学的对象としての無限級数の一歩手前まで到達しつつ、それから無限級数という数学的对象の創造へと向かわず、むしろそれを有効な方法として認識し、実際に活用することによって『円理弧背術』を著したのである。円弧の本質としての無限性を認識し、また無限級数の項別処理という方法の有効性を認識しつつ、無限級数という数学的对象を研究対象としなかったところに、建部の数学、ひいては日本数学の大きな特質がある。日本数学においては、円理のように各種の問題を統一的に扱えるような共通の方法の探求もなされたが、それらの方法はあくまでも一定の解法手順のまとまりであった。種々の数学的对象を設定して、それら自身の研究を通して強力な解法を構築するというような現象は生じなかったのである。

建部の円理は、各計算過程においては精密な方法を援用しつつも、その根幹を支えているのは数学的对象を素材とした数学理論ではない。建部の解法に、今日から見て批判に耐えうる何らかの数学理論を期待するとすれば、われわれは期待はずれに終わるであろう。しかし一方で、われわれが期待するような確固たる理論的基盤を持たずとも、数学上の諸経験を踏まえつつ正しい結論に到達した建部の「方法」に感嘆せざるを得ないのも事実である。

<sup>9</sup>[4] pp.34-42.

<sup>10</sup>置換群と独立に群を定義したのは Cayley であった。ただしそこでは結合法則、逆元の存在を仮定していないので定義としては不十分であった。

## 文献

- [1] Chabert, J-L. (Ed.) *A History of Algorithms*. Springer, 1999.
- [2] Fujisawa, R. "Note on the Mathematics of the Old Japanese School." *Compte Rendu du 2. Congres International des Mathematiciens*, Paris, 1900, pp.379-393.
- [3] 藤原松三郎『明治前日本数学史新訂版』第二巻, 日本学士院日本科学史刊行会編, 野間科学医学研究資料館, 1979年(初版は1956年)
- [4] Giusti, E. 著, 斎藤憲訳『数はどこから来たのか 数学の対象の本性に関する仮説』共立出版, 1999.
- [5] Kikuchi, D. "Seki's Method of Finding the Length of an Arc of a Circle." *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan*, 1st Ser. Vol.8, 1896, pp.181-198.
- [6] 森本光生『パソコンによる解析学』放送大学教材 56443-1-9911, 放送大学教育振興会, 1999年.
- [7] 小川東「円理の萌芽——建部賢弘の円周率計算」『数理解析研究所講究録』1019, 1997年, pp.77-97.
- [8] ——「近世日本数学における円理の萌芽とその特質 数式処理システムによる17, 18世紀日本数学の再現を方法として」学位論文, 東京大学1999.