

初期和算にみる Archimedean Spiral について

前橋工科大学工学部 共通教育

小林 龍彦

1, はじめに

関孝和編「闕疑抄答術」(年紀不明)の第39問、第40問および第41問には、Archimedean Spiral と呼べる曲線が登場している。Archimedean Spiral は古代ギリシャ数学の到達した傑作の一つ属する。この曲線はアルキメデス (B.C. 287頃-212) によって、動径上の1点Pが一定の速さで動くときの点Pの軌跡として理解されたが、近世日本の数学では運動学とは無縁の問題として論じられた。かつて加藤平左エ門は『和算ノ研究行列表及円理』¹⁾において、和算における Spiral の研究を取り上げたが、加藤の関心はもっぱら幕末の円理に関連した問題に集中したため、和算初期とくに関孝和と建部賢明・賢弘の Spiral の研究については不十分な紹介に終わってしまった。その後の和算史研究において、平山諦らによる『関孝和全集』(大阪教育図書、昭和49年)でも関孝和の研究業績の一つとして Archimedean Spiral が存在することについて触れられてはいるが、関が書き留めた数値や術文を詳細に検討した結果に基づいた業績紹介にはなっていない。そこで関孝和の「闕疑抄答術」と「大成算経」に載る Archimedean Spiral について検討をおこなうことで、先行研究の手が及ばなかった部分を補おうとすることが本拙論の目的である。

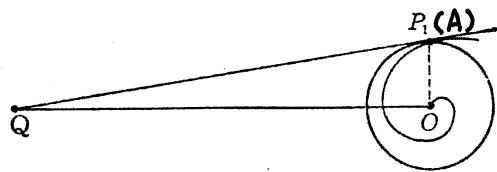
2, 中国と日本における Archimedean Spiral の出現について

Archimedean Spiral は、

$$r = a \theta^n \dots (1)$$

とする対数らせんにおいて、 $n = 1$ の場合を Archimedean Spiral と呼ぶ²⁾。紀元前3世紀にアルキメデスがこの運動曲線を研究し、著書『らせんについて』において、平面上での点Oを中心として等角速度で回転する動径OA上を、初点Oより等速度運動する動点Pの軌跡によって描かれる曲線として論じ、次のような定理を明らかにしている³⁾。

- 1) らせんの一回転の面積は最終動径を半径とする円の面積の1/3である。
- 2) 一回転目のPの位置P₁でのこのらせんの接線と、直線OP₁に垂直なOを通る直線との交点をQとすれば、線分OQの長さは、半径をOP₁とする円の周の長さに等しい。



近世日本数学の初期において、アルキメデスのらせんと同種の問題が登場する。しかしそれは動径上の点Pが等速度で運動をするという運動論に立脚したものではなかった。

東洋におけるこの問題の起源を辿ると、原初的问题を中国古代数学書『九章算術』の第九章勾股にある葛巻き問題に見いだすことが出来る。近世の和算家がこの問題の存在を知

り得たのは、おそらく江戸初期に輸入された程大位の『算法統宗』（万暦20：1592年刊）からであろう。『算法統宗』は『九章算術』をもとに編纂されたものであるが、程は第九章勾股にあった葛巻き問題を卷十六において“難題勾股九”として取り扱った⁴⁾。葛巻き問題の本質は三平方の定理の応用であるが、円柱に巻き付く葛の展開図から一般解を導き出すことは難しいと判断したのか、難題と位置づけている。このように難題と指定されたことが和算家の研究意欲を掻き立てる一因となったと思われる。

初期和算では葛巻き問題は俱利伽羅巻問題とも呼ばれ、関孝和以前の和算家たちの著した算書にも登場しており、この問題に対する彼らの関心の高さが窺える。初期の俱利伽羅巻は、円柱に紐もしくは縄が絡むものとしても設定されるが、後には本の径と末の径が異なる円柱、すなわち円錐台に紐が絡む問題としても出題された。また、類似問題として笠間（菅笠）問題も考案された。更には経巻口問題⁵⁾としても考えられた。これら関孝和の研究に至る前史的研究を算書ごとに整理しておこう。

経巻口：『算法闕疑抄』（万治二：1659年）、『童介抄』（寛文四：1664年）

『算法根源記』（寛文六：1666年）、

俱利伽羅巻：『算法闕疑抄』、『童介抄』、『算法根源記』、『算法勿憚改』（延宝元：1673年）、

笠間：『算法闕疑抄』、『算法根源記』

上記和算書に著された術文を検討すると、彼らは円柱に紐が絡むときは、円柱の展開図を考え、このときの矩形の対角線が紐の総長であると認めた。よって、術としては直角3角形の弦を求めることに帰着させている。しかし、ひとたび円錐台に紐が絡んだ場合には答えを得ることはできなかった。経巻口では糸の長さを半円周の総和して計算することが、もっとも進んだ解決法であった⁶⁾。

3、「闕疑抄答術」に表れる *Archimedean Spiral*

関孝和以前の和算家は *Archimedean Spiral* を半円周の集まったものと見なしていたが、これを円弧とは異なる曲線として取り上げたのは関孝和が最初であった⁷⁾。ただ、関は *Archimedean Spiral* が、動径上の点Pが等速度運動する結果として生じたもの、と理解していたかどうかは保留するとしても、関と同時代の和算家と比して、円とは異質な曲線であると捉えていたことは特筆しなければならない。加えて関は、経巻口、笠間および円錐台の場合もすべて腕背の近似式によって求まる、と考えたのである。この *Archimedean Spiral* に関わる関孝和の解法の基本は「闕疑抄答術」と「解見題之法」に明瞭にされている⁸⁾。本拙論の趣旨は「闕疑抄答術」において *Archimedean Spiral* の問題題処理が如何なるものであったかを解明することにあるが、腕背の近似式がどのような形を持っているかを理解するために、まず「解見題之法」に載る腕背術を検討しておこう。以下は『関孝和全集』からの引用である⁹⁾。

仮如有半円闕、半径若干、湾若干、承背準規而週腕形。問腕背。

置半径自乘三之、加入湾冪、共得数为実。以三為廉法、開平方除之、得背。

[題意] 右図の扇形の各部分の長さを与えたとき、扇形の広がりとともに生ずる曲線の長さ、すなわち腕背の長さを求めよ。

関孝和はこの問題に対して次のような近似式を示している。

$$\text{腕背}^2 = \{3 \cdot \text{半径}^2 + \text{湾}^2\} / 3 \quad \dots (2)$$

「解見題之法」において関はどのようにしてこのような曲線が描かれるのか、特別な説明を加えていない。手がかりは“承背準規”である。この意味は題意で述べたように、扇形の広がり即ち円規（コンパス）の開展と共に腕背が生じると解せるから、『明治前日本数学史』も指摘するように¹⁰⁾、扇形の半径を動径とする *Archimedean Spiral* と判断してよい。

そして腕背は次のようにして作図される。まず図1の扇形の湾を n 等分し、これらの点を扇形の中心と直線で結ぶ。また扇の半径を n 等分して扇形の中心より円弧を描く。このときの相応じる半径と円弧との交点の軌跡を腕背と考えたと思われる（図4参照）。このようにして描かれる曲線は *Archimedean Spiral* そのものであり、「解見題之法」の図は、(1)において、 $n < 1$ の場合と見なしてよい。

関孝和は続く“解術曰”において、腕背の長さを得るために増約術を使うと解説しているが、その意味するところは不明である¹¹⁾。よって本拙論では“解術曰”の解釈は留保しておく。

「解見題之法」の腕背の近似式を踏まえた上で、「闕疑抄答術」の検討に移ろう。同書の第39問、第40問、第41問が腕背術の応用問題に該当する。本来は出題順に問題を検討すべきであろうが、第40問は「解見題之法」の腕背術が応用されていることが明確であること、かつ関孝和は問題解決にあたって第40問から第39問へと発展的に考えたことと推測できることから、第40問を最初に検討することにした。以下に問題、答、術文を示そう¹²⁾。

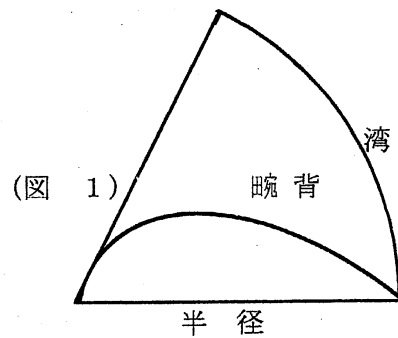
第40問 今有円錐、径八寸、高三寸、只云如図間各一寸明以糸纏之、問糸長

答 糸長七尺二寸七二四〇六強

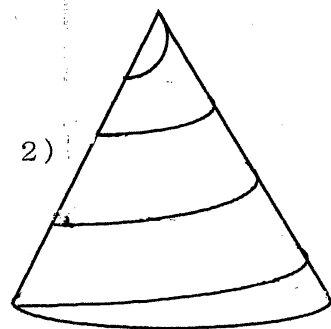
術曰 倍高自乗之得数加入径冪得数寄左列併径冪一十二万六千〇二十五段 与間冪三万八千三百〇七段 得数以寄左相乗之得数为実以間冪一十五万三千二百二十八段為廉法開平方除之得糸長合問

これら問題、答、術文に続いて、術文中に使用される数値の由来を説明するための補足文3行が付け加えられている。

十二万六千〇二十五者 周率冪也



(図 2)



… (ア)

三万八千三百〇七段者 径率冪三段也 … (イ)

十五万三千二百二十八段者 径率冪一十二段也 … (ウ)

これらの数字の意味は、関孝和が零約術で求めた円周率の近似分数の分母と分子のそれぞれを自乗したものからなっている¹³⁾。つまり

$$(ア) = 355^2 = 126,026$$

$$(イ) = 3 \cdot 113^2 = 3 \cdot 1132$$

$$(ウ) = 12 \cdot 113^2 = 12 \cdot 1132$$

これらの数値は術文を読み解いて行く際の案内人の役割を果たしているが、術文の本旨を捉えるために、ここでは以下のように書き換える。

$$\pi = 355 / 113 = \pi_2 / \pi_1$$

[題意] 底面の直径 ($2R$) 8寸、高さ (h) 3寸とする円錐の母線に、糸が1寸間隔 (m) でずれることなく巻き付いている。このときの糸の総長 (l) を求めよ。

[答] 糸長 7尺2寸72406強

[術文] まず、母線の長さ p は、

$$(2 \cdot h)^2 + (2R)^2 = 4p^2 \quad \dots (3)$$

と求められる。また、

$$\{\pi_2^2(2R)^2 + 3 \cdot \pi_1^2 \cdot m^2\} 4p^2 \quad \dots (実)$$

さらに、

$$12 \cdot m^2 \cdot \pi_1^2 \quad \dots (廉)$$

と求める。ここで実を廉で割り、商を平方に開けば総長 l が求まる。

以上が関孝和の示した術文である。原形のままである術文の本質が分からないから、まず術文を整理してみよう。上記式のわり算は、

$$l^2 = \{\pi_2^2(2R)^2 + 3 \cdot \pi_1^2 \cdot m^2\} 4p^2 / 12 \cdot m^2 \cdot \pi_1^2 \quad \dots (4)$$

となる。だが、関孝和は (4) がなぜ導けるのかを明らかにしていない。そこで式 (4) がどのような意味を持っているのかを調べてみよう。(4) を変形して整理すると、

$$l^2 = \frac{\pi_2^2 4R^2 p^2}{3 \cdot \pi_1^2 \cdot m^2} + p^2 \quad \dots (5)$$

となる。ところで、 $\pi = \pi_2 / \pi_1$ だから (5) は

$$l^2 = \frac{(2\pi R)^2}{3} \left(\frac{p}{m}\right)^2 + p^2 \quad \dots (6)$$

(6) に設問の数値を代入すれば、

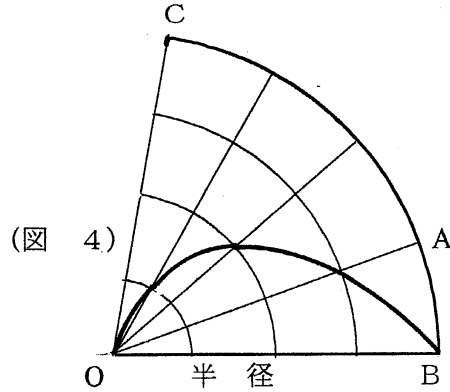
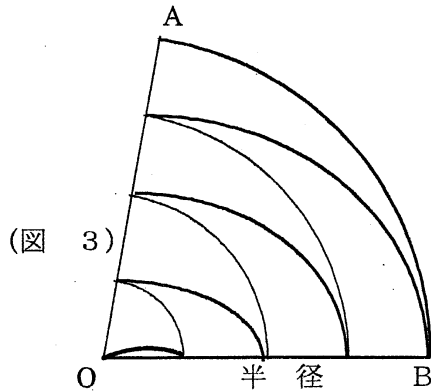
$$I = 72.72406687\dots^{14)}$$

と求まる。ただし、 $\pi = 355/113$ 、 $p = 5$ 。

問題の本文で示したように、関孝和は $I =$ 糸長 7 尺 2 寸 7 2 4 0 6 強 とするが、関の“定不尽之強弱”の定義に従えば、強は“五己下を棄て去ること”ことであるから、筆者が得た計算値と答曰が強と表記することとは一致しない。

関孝和の術文を理解する鍵は (6) 式にある。これは以下のように解釈できよう。

いま、図 2 の葛の始点と終点を母線に沿って切り開き、展開図を作れば図 3 を得る。



ここで図 3 の $\angle AOB$ と図 4 の $\angle AOB$ は等しく、また紐の回転数は図 3 の半径を間 (m) で等分することになるから、図 3 における回転ごとの扇形を接合して、円弧毎に巻き付いた紐を次々と繋いで行けば、図 4 を得る。図 4 の半径は p 、湾 $= 2\pi r \times (P/m)$ であるから、(6) は「解見題之法」に視た腕背と一致することになる。つまり第 40 問は、「解見題之法」の *Archimedean Spiral* を応用した問題に他ならない。

続いて第 39 問を見てみよう¹⁵⁾。

第 39 問 今有如図以糸繞之、只云内径二

寸、外径八寸、每一周間各一寸、問糸長

答 糸長 一丈

術 立 一為糸長、以一百十三相乗之、

得内減内外径和三百五十五ヶ、余自之、以間

冪相乗之、得数以十二乗之、得数寄甲位。

列併内径冪一十二万六千令二十五段間冪三万八千

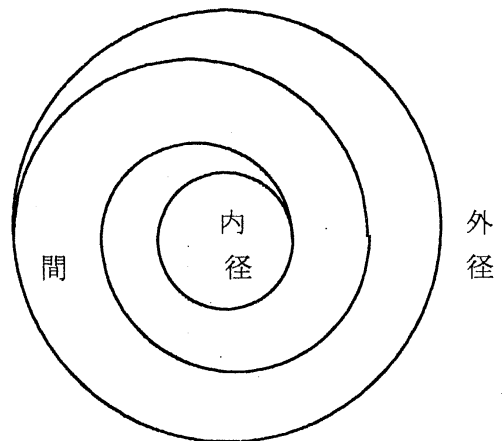
三百〇七段、得数以内径冪乗之、得数寄乙位

列併外径冪一十二万六千令二十五段間冪三万八千

三百〇七段、得数以外径冪乗之、得内併減甲

乙位、余自乗得数寄左。列甲位以乙位相乗之、得数四之、與寄左相消、得開方式、三乘

方翻法開之、得糸長合問¹⁶⁾



[題意] いま内径 ($2r$) を 2 寸、外径 ($2R$) を 8 寸とする 2 円の間に、一周毎の間隔 (m) を 1 寸として、糸が腕背のごとく張り巡らされている。このときの内円径と外円径の周長を含めた糸の総長 (I) を求めよ¹⁷⁾。

[答] 糸長 一丈

[術文] 第40問と同様に $\pi = \pi_2 / \pi_1$ として、総長 l から内径と外径の周を引けば、

$$\{l\pi_1 - (2R + 2r)\pi_2\}^2 12m^2 = l^2 12m^2 \quad \dots \quad \text{甲}$$

次に、内円に描かれる腕背 (l_1) を求めると、

$$\{(2r)^2\pi_2^2 + 3m^2\pi_1^2\} (2r)^2 = l_1^2 12m^2 \quad \dots \quad \text{乙}$$

また、外径全体に描ける腕背 (l_2) は、

$$\{(2R)^2\pi_2^2 + 3m^2\pi_1^2\} (2R)^2 = l_2^2 12m^2 \quad \dots \quad \text{丙}$$

これより、

$$\{\text{丙} - (\text{甲} + \text{乙})\}^2 = \text{左}_1$$

とおき、また、

$$4 \cdot \text{甲} \cdot \text{乙} = \text{左}_2$$

得れば、 $\text{左}_1 = \text{左}_2$ となる。これより l に関する4次方程式が導け、これを解けば答えを得る。ここまでの第39問の術文である。よって数値を代入して整理すれば、

$$\begin{aligned} 23478819984l^4 - 2950435785600l^3 - \\ 20572291988256l^2 + 7116523129315200l + \\ 132095417940416400 = 0 \end{aligned}$$

この4次方程式を解けば、

$$\begin{aligned} l = & 93.35809048\dots \\ & - 30.52623208\dots \\ & 85.83227497\dots \\ & - 23.00041657\dots \end{aligned}$$

の4根を得る。ところが、2つの正根とも答と一致しない。この問題の答については、日本学士院本：1256と遠藤利貞写本（日本学士院蔵：1257）ともに同問題の答に、著者不明の“不審ママ”とする書き込みがある。この書き込みは、「闕疑抄答術」が写本として流布する過程で、“答糸長一丈”とする数値に疑問を持つ和算家が存在していたことを示唆している。しかし、不審としながらも正答を示さなかった理由は定かでない。ただ、正答を表示しなかった理由の1つとして、4次方程式の係数の大きさが後世の和算家に検算を躊躇させたと言えないだろうか。また、 l の4次方程式を解いた後、2つの正根の内どちらを答として採用するかも難しい問題であったであろう。関孝和の提出した数値では、次章で取り上げる「大成算経」の同問題と比較して、85.83227497…が答えの候補となる。すると、“不審ママ”と書き込んだ和算家は「大成算経」に同じ問題が乗せられていることを知っていたのであろうか。

4, 「大成算経」の腕背術

関孝和が考案した *Archimedean Spiral* の求長式は関の弟子にも継承された。関孝和の晩年、建部賢明を中心に編纂の始まった「大成算経」にその痕跡を視ることが出来る。以下に同書で取り上げられた腕背術の要旨を紹介しておく。

「大成算経」卷之十五中集の最後を飾る問題が“繞術”であり¹⁸⁾、繞術は6問で構成されている。「闕疑抄答術」や「解見題之法」に用いられる用語と比して若干の相違を認めるが、術文などにおける本質的な違いは存在しない。

第1問：溝が1尺3寸、闊（半径）が1尺の時の腕背を求めよ。

答曰 腕背 1尺2寸5分0333弱¹⁹⁾

「解見題之法」に載る腕背術がまったくそのままに用いられている。以下同様であるため、詳細な解説は省略し、結果のみを紹介していく。

第2問：腕背が円の中心から生じる問題。円径10寸、腕背の半周ごとの間隔が2寸の時の腕背と外円径の周を併せた総長を求めよ。

答曰 総長 7尺7寸03575弱²⁰⁾

第2問は、総長 = (6) 式 + 外円径の周で求められる。

第3問：虚径が2寸、実径が3寸、間隔が1寸の時、その内側にある腕背と虚径および実径の円周を併せた総長を求めよ。

答曰 総長 8尺5寸82227強²¹⁾

この問題は「闕疑抄答術」の第39問と全く同じ問題である。ここでの三乗方翻法すなはち総長 l を求めるための4次方程式は、

$$\begin{aligned} 23478819984l^4 - 2950435785600l^3 \\ - 2057229188256l^2 + 711652312935200l \\ + 132095417940416400 = 0 \end{aligned}$$

となり、これを解けば答に示される数値のほか、正根 $93.35809049\dots$ を得るが、「闕疑抄答術」の答と同様に、この事実について建部はなにも触れていない。

第4問：直径4寸、高さ1尺2寸の円柱に2寸間隔で糸が巻き付いている。このときの糸の総長を求めよ。

答曰 糸長 7尺6寸3分4719弱²²⁾

この問題が所謂、俱利伽羅卷問題であり、これの起源が「九章算術」にあることはすでに述べた²³⁾。

第5問：底辺の直径が1尺、高さが1尺2寸の円錐に、1寸の間隔で糸が巻き付いている。このときの糸の総長を求めよ。

答曰 糸長 2丈3尺6寸1分52微弱²⁴⁾

「闕疑抄答術」の第40問と同じ。よって(6)式を用いて求めればよい。

第6問：下底の直径が1尺5寸、上底の直径が7寸、高さが1尺2寸の円錐台に、1寸の間隔で糸が巻き付いている。このときの糸の総長を求めよ。

答曰 糸長 2丈5尺2寸3分766強

第5問の応用問題である。すなはち高さ2尺3寸とする円錐に巻き付く糸の総長を求め、これより高さ1尺1寸の円錐に巻き付いた糸の長さを引けば答えは求まる。(6)式を用いて求めればよい。

4, まとめ

ここまでの議論をもとに、次のような若干の考察を加えて、本拙論における暫定的なまとめに代えたい。まず、関孝和編「闕疑抄答術」の第39問と第40問は、間違いなく「解見題之法」に載せられた腕背術を用いて問題を解いている²⁵⁾。そして腕背とは、*Archimedean Spiral*であり、関孝和はこれの求長に近似式(2)を採用している。また、「大成算経」に載る*Archimedean Spiral*の問題も「解見題之法」に載る腕背術の応用であることも確かである。「大成算経」の問題配列は整然としており、読者を納得させる構成となっている。

ところで関孝和の腕背術への着想はいつ頃発生したのであろうか。残念ながらこのことを具体的に考察させる資料は存在しない。しかし、「闕疑抄答術」「解見題之法」「大成算経」の3書の成立過程を鑑みれば、「闕疑抄答術」全体の成立時期を取り敢えず不問にすれば、少なくとも、関孝和が「闕疑抄答術」の著述もしくは編集を終了する段階で腕背術は成立していたことになる。そして、「大成算経」編纂時には、腕背術は建部賢明・賢弘らにも秩序立てて理解出来る状態に整理されていた、と指摘できよう。いずれにしても関孝和編「闕疑抄答術」は、楕円周の近似式²⁶⁾、 π の近似分数さらには弧背の求長²⁷⁾という関孝和の円理成立に関わる重要な問題が含まれている一級史料である、と断言できる。

注

- 1) 加藤平左エ門：『和算ノ研究行列式及円理』、東京開成館、昭和19年。
- 2) 中森寛二：「いろいろな「らせん」、『数学セミナー』9-80、1980年、pp.2-8。
- 3) E.J.Dijksterhuis: *Archimedes*, Translated by C.Diksboom, Princeton University Press, 1987, pp.264-277.
- 4) 梅栄照、李兆華校釈：『算法統宗校釈』、安徽教育出版社、1990年、p.929。
- 5) 経巻口問題は卷子本などの巻口を問題化したものと思われる。
- 6) 有馬頼僮(1714-1783)が明和6(1769)年に出版した『拾璣算法』の第5巻の渦巻き問題は円弧の組み合わせとして解いている。詳しくは『和算ノ研究行列式及円理』、p.317を見よ。
- 7) 本稿4章で取り上げる「大成算経」では、この曲線を“…弧之状、其周勢宛轉、不応于全円之規、謂之腕”と指摘している。
- 8) 関孝和の腕背に関して、加藤平左エ門は“腕背ヲ論理的ニ取扱ツタ最初ノモノハ関孝和ノ著書解見題之法デアル”と指摘しているが(『和算ノ研究行列式及円理』、p.317)、平山諦の「闕疑抄答術」を関孝和第2番目の著書とする説に従えば、「闕疑抄答術」を腕背術の最初の記述として認めなければならない。
- 9) 同書、本文p.128-129。
- 10) 同書、第2巻、pp.195-196。
- 11) この件に関しては、加藤、藤原松三郎、平山などが解釈を試みているが、未だ明確な結論は得られていない。

- 1 2) 日本学士院蔵書：1 2 5 6より引用。
- 1 3) 「闕疑抄答術」において、本文に見るような数値の解説は本問の他、同第4 1問と楕円の周長を求める第4 5問のみに施されている。同じ朧背の近似式が適用される第3 9問に数値解説がなされないことは書誌学的に見て奇異と言わざるを得ない。また、逆説的にいえば「闕疑抄答術」全体の著述形式から判断すると、これらの3問のみに数値解説が付せられたことは異例である。このような考察からすると、これらの数値解説が関孝和の手によってなされたものかどうかは疑わしい、と指摘できよう。
- 1 4) 本年度の京都大学数理解析研究所での研究集会終了後、同大学名誉教授旦代晃一氏より、第4 0問の定積分による計算結果を頂いた。氏の計算によれば、

$$I = 63.271271556\dots$$
 というのである。氏のご教示に感謝申し上げます。
- 1 5) 日本学士院蔵書：1 2 5 6より引用。
- 1 6) 本文p. 6で取り上げた遠藤利貞写本には日本学士院蔵書：1 2 5 6に見るような術文中の脱字もしくは欠字はなく、完全な文章となっている。
- 1 7) 問題には内円径と外円径の周を含めるとする記述はないが、問題と術文を検討すると題意のような内容となっている。このような問題設定は「大成算経」の同種の問題でも確認される。
- 1 8) 本稿では下平和夫収蔵本を利用している。なお、下平本の朧術には少なからずの誤記があるが、ここでは一々の指摘は控えた。
- 1 9) ここでの弱は“0 3 3 3 3 2 8 8…”を意味している。
- 2 0) ここでの弱は“0 3 5 7 4 8 7 2…”を意味している。
- 2 1) ここでの強は“8 2 2 2 7 4 9 8…”を意味している。
- 2 2) ここでの弱は“4 7 1 8 7 8 9…”を意味している。
- 2 3) この問題の解法については、Yoshimasa Michiwaki, Tatsuhiko Kobayashi: “On the Resemblance Problems of “Lilavati”, “Chiu-Chang Suan-Shu” and Wasan”, 『富士論叢』第3 2巻第1号、1 9 8 7年、pp. 1 0 5 - 1 0 6を参照されたい。
- 2 4) ここでの微弱は“5 2 0 2 9 2…”を意味している。
- 2 5) 同第4 1問も朧背術を用いる問題であることは明らかであるが、まだ細部の検討を終えていないことから、本拙論では具体的な議論は保留した。同様の理由から「大成算経」第6問も本稿では保留にしてある。
- 2 6) 楕円の近似式については、拙著：「関孝和の楕円の研究について」（『数学史の研究』、京都大学数理解析研究所講究録1 0 6 4、1 9 9 8年1 0月）、pp. 6 3 - 7 4を参照されたい。
- 2 7) 弧背の数値については、拙著：「規矩要明算法の弧長の近似式から弧術への道」（『数学史研究』、通巻1 5 8号、1 9 9 8年、pp. 1 - 1 4）を参照されたい。