数理解析研究所講究録
1131巻 2000年 1-7

Non-commutative L^p-spaces

東京大学大学院数理科学研究科
泉 英明

ノイマン環 $\mathcal{M}$ 上の2つの faithful normal semifinite (f.n.s.) weight φ, ψ に対して、複素補間法を用いて構成される非可換 L^p 空間 $L^p(\mathcal{M}, \varphi)$ と $L^p(\mathcal{M}, \psi)$ は可換の場合の類似から互いに同型であると考えられる。ここでは Connes の 2×2 行列のテクニックを用いて、上記の同型を与える写像を構成する。

1節では Calderón による複素補間法について説明する。2節ではノイマン環 $\mathcal{M}$ とその前共役空間 $\mathcal{M}_*$ に対して複素補間法を適用し、非可換 L^p 空間を構成する方法を述べ、$\mathcal{M}$ の L^p 空間への両側作用について説明する。3節では2節の結果および Connes のテクニックを用いて非可換 L^p 空間の Radon-Nikodym map を構成する。

1 Calderón による複素補間法

複素補間法とは2つの Banach 空間の対 (A_0, A_1) が与えられたとき、ある正則関数の空間を用いて Banach 空間の族 $C_\theta(A_0, A_1)$, $0<\theta<1$ を構成する手法である。以下具体的に説明する。

定義 1.1. A_0, A_1 を Banach 空間とする。(A_0, A_1) が両立対であるとは、ある Banach 空間 E への連続な埋め込み $i_0 : A_0 \hookrightarrow E$, $i_1 : A_1 \hookrightarrow E$ が与えられていることとする。

$A=(A_0, A_1)$ を両立対とする。このとき補間空間 $C_\theta(A)$ を次のようにして構成する。まず、E の部分空間 $\Sigma(A)$ およびそのノルム (inf ノルム) を、

$$\Sigma(A) = i_0(A_0) + i_1(A_1),$$

$$\|a\|_{\Sigma(A)} = \inf\{\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1} \mid a = i_0(a_0) + i_1(a_1),\ a_0 \in A_0,\ a_1 \in A_1\},\ a \in \Sigma(A).$$

と定義する。このとき、$\Sigma(A)$ はノルム $\|\cdot\|_{\Sigma(A)}$ で Banach 空間になる。次に、正則関数の空間 $\mathcal{F}(A)$ を

$$\mathcal{F}(A) = \left\{ f : D \to \Sigma(A) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ は } D \text{ 上連続、有界で} \\ D \text{ の内部で正則で} \\ \text{次を満たす：} \\ (1)\ f(it) \in i_0(A_0) \text{ for all } t \in \mathbb{R}, \\ \text{関数 } t \in \mathbb{R} \mapsto i_0^{-1}(f(it)) \in A_0 \text{ は連続で} \\ \lim_{t \mapsto \pm\infty} \|i_0^{-1}(f(it))\|_{A_0} = 0 \\ (2)\ f(1+it) \in i_1(A_1) \text{ for all } t \in \mathbb{R}, \\ \text{関数 } t \in \mathbb{R} \mapsto i_1^{-1}(f(1+it)) \in A_1 \text{ は連続で} \\ \lim_{t \mapsto \pm\infty} \|i_1^{-1}(f(1+it))\|_{A_1} = 0. \end{array} \right\}$$

と定める。ここで $D = \{\alpha \in C \mid 0 \leq \Re\alpha \leq 1\}$ とする。$\mathcal{F}(A)$ のノルムを

$$\|f\|_{\mathcal{F}(A)} = \max\{\sup_{t\in} \|i_0^{-1}(f(it))\|_{A_0},\ \sup_{t\in} \|i_1^{-1}(f(1+it))\|_{A_1}\},\ f \in \mathcal{F}(A)$$

で定義する。 Phragmén-Lindelöf の定理より、$\|\cdot\|_{\mathcal{F}(A)}$が $\mathcal{F}(A)$ のノルムになる。そして、補間空間 $C_\theta(A)$, $0 < \theta < 1$, とそのノルムを

$$C_\theta(A) = \{a \in \Sigma(A) \mid a = f(\theta) \text{ for some } f \in \mathcal{F}(A)\},$$

$$\|a\|_{[\theta]} = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}(A)} \mid f(\theta) = a\},\ a \in C_\theta(A)$$

で定義する。このとき、次が成立する。

命題 **1.1.** $\mathcal{F}(A)$ および $C_\theta(A)$, $0 < \theta < 1$, はそれぞれ Banach 空間になる。

注意：2つの空間の共通部分 $i_0(A_0) \cap i_1(A_1)$ は各補間空間で dense になる。したがって、$i_0(A_0) \cap i_1(A_1) = \{0\}$ のときはすべての補間空間は零空間になってしまう。よって共通部分の多い埋め込みを考えなければ意味がない。

例 **1.2.** (X, μ) を測度空間としたとき、Banach 空間の対 $(L^\infty(X,\mu), L^1(X,\mu))$ を Banach 空間 $L^\infty(X,\mu) + L^1(X,\mu)$ (inf ノルムを与える) に埋め込み、複素補間法を適用すると、補間空間 は $L^p(X,\mu)$, $1 < p < \infty$ とノルムを込めて一致する。

2 非可換 L^p 空間の構成

Dixmier-境の定理によれば、フォン・ノイマン 環 $\mathcal{M}$ は、predual $\mathcal{M}_*$ を unique に持つ C^* 環として特徴づけられる。もし $\mathcal{M}$ が可換ならば、ある測度空間 (X,μ) が存在して $\mathcal{M} = L^\infty(X,\mu)$, $\mathcal{M}_* = L^1(X,\mu)$ と表わすことができる。よって、もし 対 $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_*)$ に Calderón の複素補間法が適用できれ

ば、例 1.2 の類似から「非可換な」L^p 空間と呼ぶべきものが得られたことになる。ここでは非可換 L^p 空間の構成およびその基本的性質について述べる。

$\mathcal{M}$ をフォン・ノイマン環、φ を $\mathcal{M}$ 上の f.n.s. weight とする。実数 α に対して $L_{(\alpha)}$ を次のように定義する。

$$L_{(\alpha)} = \left\{ x \in \mathcal{M} \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{unique に } \varphi_x^{(\alpha)} \in \mathcal{M}_* \text{ が存在して、} \\ \varphi_x^{(\alpha)}(y^* z) = (\pi_\varphi(x) J_\varphi \Delta_\varphi \alpha \Lambda_\varphi(y) | J_\varphi \Delta_\varphi^{-\alpha} \Lambda_\varphi(z)) \\ \text{for all } y, z \in \mathfrak{a}_0, \end{array} \right\}$$

ここで、$\{\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \Lambda_\varphi\}$ はφ に付随する半巡回表現、$J_\varphi, \Delta_\varphi$ はモジュラー作用素、$\mathfrak{a}_0$ は対応する (full な) 冨田環である。

命題 2.1. 任意の実数 α に対して、 $L_{(\alpha)}^\varphi$ は線形空間で、

$$\varphi_{\lambda x + \mu y}^{(\alpha)} = \lambda \varphi_x^{(\alpha)} + \mu \varphi_y^{(\alpha)}, \ \lambda, \mu \in C, \ x, y \in L_{(\alpha)}^\varphi$$

が成立する。

$L_{(\alpha)}^\varphi$ のノルムを

$$\|x\|_{L_{(\alpha)}^\varphi} = \max\{\|x\|_\infty, \ \|\varphi_x\|_1\}, \ x \in L_{(\alpha)}^\varphi$$

で定めると、$L_{(\alpha)}^\varphi$ は Banach 空間になる。

次に実数 α に対して以下の写像を定義する。

$$\begin{array}{llll} i_{(\alpha)}: & L_{(\alpha)}^\varphi \to \mathcal{M}, & i_\alpha(x) = x, & x \in L_{(\alpha)}^\varphi; \\ j_{(\alpha)}: & L_{(\alpha)}^\varphi \to \mathcal{M}_*, & j_{(\alpha)}(x) = \varphi_x^{(\alpha)}, & x \in L_{(\alpha)}^\varphi; \end{array}$$

すると、次の結果が成立する。

命題 2.2. (1) 実数 α に対して

$$\mathfrak{a}_0^2 \subset L_{(\alpha)}^\varphi$$

が成り立つ。

(2) $i_{(\alpha)}(\mathfrak{a}_0^2)$, $\alpha \in C$, は $\mathcal{M}$ の中で weak operator topology に関して dense である。

(3) $j_{(\alpha)}(\mathfrak{a}_0^2)$, $\alpha \in C$, は $\mathcal{M}_*$ の中で norm dense である。

次に dual map を以下のように定義する。

$$\begin{array}{llll} i_{(\alpha)}^*: & \mathcal{M}_* \to (L_{(\alpha)}^\varphi)^*, & (i_{(\alpha)}^*(\psi))(y) = \psi(y), & \psi \in \mathcal{M}_*, \ y \in L_{(\alpha)}^\varphi; \\ j_{(\alpha)}^*: & \mathcal{M} \to (L_{(\alpha)}^\varphi)^*, & (j_{(\alpha)}^*(x))(y) = \varphi_y^{(\alpha)}(x), & x \in \mathcal{M}, \ y \in L_{(\alpha)}^\varphi; \end{array}$$

このとき、次が成立する。

定理 2.3.

(1) 任意の実数 α に対し、$i^*_{(\alpha)}, j^*_{(\alpha)}$ はともに norm-decreasing injective linear maps である。

(2) 等式

$$\varphi_x^{(\alpha)}(y) = \varphi_y^{(-\alpha)}(x),\ x \in L^\varphi_{(\alpha)},\ y \in L^\varphi_{(-\alpha)}.$$

が成立する。言い換えれば次の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{M} \arrow[dr, "j^*_{(-\alpha)}"] & \\ L^\varphi_{(\alpha)} \arrow[ur, "i_{(\alpha)}"] \arrow[dr, "j_{(\alpha)}"'] & & (L^\varphi_{(-\alpha)})^* \\ & \mathcal{M}_* \arrow[ur, "i^*_{(-\alpha)}"'] & \end{tikzcd}$$

定義 2.1. 定理 2.3 (2) で定義される両立対を $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_*)_{(\alpha)}$ と書くことにする。$1 < p < \infty$ なる p に対し

$$L^p_{(\alpha)}(\mathcal{M}, \varphi) = C_{1/p}(\mathcal{M}, \mathcal{M}_*)_{(\alpha)}$$

と定め、非可換 L^p 空間と呼ぶ。

$\alpha = -1/2$ で φ が state のとき、上で構成された非可換 L^p 空間は幸崎の left L^p-space ([6]) と同じものである。幸崎の記法にならって、$L^p_{(-1/2)}(\mathcal{M}, \varphi)$ を略して $L^p(\mathcal{M}, \varphi)$ と書くことにする。同様に、$\alpha = 1/2$ のとき $L^p_{(1/2)}(\mathcal{M}, \varphi)$ は幸崎の right L^p-space である。これを $L^p_R(\mathcal{M}, \varphi)$ と書く。

また、φ が一般の weight で、$\alpha = 0$ のとき、$L^p_{(0)}(\mathcal{M}, \varphi)$ は Terp([7]) のものと一致する。したがって上の構成法は、[6] と [7] の同時拡張になっている。

さらに、次のような equivalence が成立する。

定理 2.4. 実数 α, β を任意にとる。このとき $1 < p < \infty$ に対して

$$j^*_{(-\alpha)}(a) \in L^p_{(\alpha)}(\mathcal{M}, \varphi) \mapsto j^*_{(-\beta)}(\sigma^\varphi_{\frac{i(\beta-\alpha)}{p}})(a),\ a \in \mathfrak{a}_0$$

で定義される写像は $L^p_{(\alpha)}(\mathcal{M}, \varphi)$ から $L^p_{(\beta)}(\mathcal{M}, \varphi)$ への等距離同型 $U_{p,(\beta,\alpha)}$ に一意的に拡張できる。

命題 2.2 (2) より、$L^\varphi_{(\alpha)}$ は自然に$\Sigma_{(\alpha)} = j^*_{(-\alpha)}(\mathcal{M}) + i^*_{(-\alpha)}(\mathcal{M}_*)$ の部分空間とみなせる。さらに $L^\varphi_{(\alpha)}$ は $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}_*$ の $\Sigma_{(\alpha)}$ における共通部分と一致する。従って、複素補間法の一般論を適用すると、次の結果が得られる。

系 2.5. 任意の実数 α, $1 < p < \infty$ なる p に対し、$L^\varphi_{(\alpha)}$ は $L^p_{(\alpha)}(\mathcal{M}, \varphi)$ の中で norm dense.

次に $\mathcal{M}$ の両側作用について述べる。

$a \in \mathcal{M}$ とする。Left L^p-space $L^p(\mathcal{M}, \varphi)$ の元

$$\xi = j^*_{(1/2)}(x) + i^*_{(1/2)}(\kappa),\ x \in \mathcal{M},\ \kappa \in \mathcal{M}_*$$

に対して、作用素 $\pi^\varphi_{p,L}(a)$ を

$$\pi^\varphi_{p,L}(a)\xi = j^*_{(1/2)}(ax) + i^*_{(1/2)}(a\kappa)$$

で定義する。また right L^p-space $L^p_R(\mathcal{M}, \varphi)$ の元

$$\eta = j^*_{(-1/2)}(y) + i^*_{(-1/2)}(\gamma),\ y \in \mathcal{M},\ \gamma \in \mathcal{M}_*$$

に対して作用素 ${\pi^\varphi_{p,R}}'(a)$ を

$${\pi^\varphi_{p,R}}'(a)\eta = j^*_{(-1/2)}(ya) + i^*_{(-1/2)}(\gamma a)$$

で定義する。このとき、次が成立する。

補題 2.6. $\pi^\varphi_{p,L}(a)$ (resp. ${\pi^\varphi_{p,R}}'(a)$) は $L^p(\mathcal{M}, \varphi)$ 上の well-defined な bounded linear operator であり、$\|\pi^\varphi_{p,L}(a)\| = \|{\pi^\varphi_{p,R}}'(a)\| = \|a\|_\infty$ が成り立つ。

また、$\pi^\varphi_{p,L}$ は $\mathcal{M}$ の $L^p(\mathcal{M}, \varphi)$ への representation, ${\pi^\varphi_{p,R}}'$ は $\mathcal{M}$ の $L^p_R(\mathcal{M}, \varphi)$ への anti-representation である。

さらに実数 α に対して、

$$\begin{aligned} \pi^\varphi_{p,(\alpha)}(a) &= U^\varphi_{p,(\alpha,-1/2)} \circ \pi^\varphi_{p,L}(a) \circ U^\varphi_{p,(-1/2,\alpha)}, \\ {\pi^\varphi_{p,(\alpha)}}'(a) &= U^\varphi_{p,(\alpha,1/2)} \circ {\pi^\varphi_{p,R}}'(a) \circ U^\varphi_{p,(1/2,\alpha)} \end{aligned}$$

とおくと、$\pi^\varphi_{p,(\alpha)}(a), {\pi^\varphi_{p,(\alpha)}}'(a)$ は $L^p_{(\alpha)}(\mathcal{M}, \varphi)$ 上の bounded linear operator であり、次の事柄が成立する。

定理 2.7.

$$\|\pi^\varphi_{p,(\alpha)}(a)\| = \|{\pi^\varphi_{p,(\alpha)}}'(a)\| = \|a\|_\infty.$$

さらに

$$\pi^\varphi_{p,(\alpha)}(a) \circ {\pi^\varphi_{p,(\alpha)}}'(b) = {\pi^\varphi_{p,(\alpha)}}'(b) \circ \pi^\varphi_{p,(\alpha)}(a),\ a, b \in \mathcal{M}$$

が成立する。すなわち、$\pi^\varphi_{p,(\alpha)}$ を left action, ${\pi^\varphi_{p,(\alpha)}}'$ を right action として、$L^p_{(\alpha)}(\mathcal{M}, \varphi)$ は $(\mathcal{M}, \mathcal{M})$-bimodule である。

3 Radon-Nikodym theorem

φ, ψ を $\mathcal{M}$ 上の 2 つの f.n.s. weight としたとき、対応する非可換 L^p 空間 $L^p_{(\alpha)}(\mathcal{M}, \varphi)$ と $L^p(\alpha)(\mathcal{M}, \psi)$ の間の同型写像 $U^{\psi,\varphi}_{p,(\alpha)}$ を構成する。

まず、ノイマン環 $\mathcal{N}$ を $\mathcal{N} = \mathcal{M} \otimes M_2(\mathbb{C})$ で定義し、正部分 $\mathcal{N}_+$ 上の関数 χ を

$$\chi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \phi(a) + \psi(d), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_+$$

で定義すると、χ は $\mathcal{N}$ 上の n.s.f. weight になる。χ に関する非可換 L^p 空間 $L^p_{(\alpha)}(\mathcal{N}, \chi)$ を考え、その上の作用素 p_1, p_2 を

$$p_1 = \pi^\chi_{p,(\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \pi^\chi_{p,(\alpha)}{}' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$p_2 = \pi^\chi_{p,(\alpha)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \pi^\chi_{p,(\alpha)}{}' \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で定義すると次が成り立つ。

補題 3.1. (1) $L_1 = p_1 L^p_{(\alpha)}(\mathcal{N}, \chi)$ は自然に $L^p_{(\alpha)}(\mathcal{M}, \varphi)$ と同一視できる。

(2) $L_2 = p_2 L^p_{(\alpha)}(\mathcal{N}, \chi)$ は自然に $L^p_{(\alpha)}(\mathcal{M}, \psi)$ と同一視できる。

この定理の成り立つ理由は、p_1 が 2×2 行列の (1, 1) 成分だけを取り出す写像であり、χ に関する $\mathcal{N}$ と $\mathcal{N}_*$ の埋め込みの (1, 1) 成分は φ に関する $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}_*$ の埋め込みと同一視できるからである。p_2 に関しても同様。

次に $L^p_{(\alpha)}(\mathcal{N}, \chi)$ 上の作用素 u_1, u_2 を

$$u_1 = \pi^\chi_{p,(\alpha)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \pi^\chi_{p,(\alpha)}{}' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \pi^\chi_{p,(\alpha)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \pi^\chi_{p,(\alpha)}{}' \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する。$u_2 u_1 = p_1$, $u_1 u_2 = p_2$ で u_1, u_2 は定理 2.7 より contraction である。よって u_1 は L_1 を L_2 の上へ isometric にうつす。よって求める同型写像は次のようになる。

定理 3.2. 定理 3.1 の同一視の下で、u_1 は $L^p_{(\alpha)}(\mathcal{M}, \varphi)$ から $L^p_{(\alpha)}(\mathcal{M}, \psi)$ への等距離同型写像 $U^{\psi,\varphi}_{p,(\alpha)}$ を与える。また u_2 はその逆写像 $U^{\varphi,\psi}_{p,(\alpha)}$ を与える。

さらに、θ を別の $\mathcal{M}$ 上の f.n.s. weight とする。このとき連鎖律

$$U^{\theta,\psi}_{p,(\alpha)} \circ U^{\psi,\varphi}_{p,(\alpha)} = U^{\theta,\varphi}_{p,(\alpha)}$$

が成立する。

また、実数 α, β に対して、以下のような可換図式が成立する。

$$
\begin{tikzcd}
L^p_{(\alpha)}(\mathcal{M},\varphi) \arrow[r, "U^{\psi,\varphi}_{p,(\alpha)}"] \arrow[d, "U^{\varphi}_{p,(\beta,\alpha)}"'] & L^p_{(\alpha)}(\mathcal{M},\psi) \arrow[d, "U^{\psi}_{p,(\beta,\alpha)}"] \\
L^p_{(\beta)}(\mathcal{M},\varphi) \arrow[r, "U^{\psi,\varphi}_{p,(\beta)}"'] & L^p_{(\beta)}(\mathcal{M},\psi)
\end{tikzcd}
$$

参考文献

[1] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces: An Introduction*, Springer-Verlag, 1976.

[2] H. Izumi, *Constructions of non-commutative L^p-spaces with a complex parameter arising from modular actions*, Internat. J. Math. **8**(1997), 1029-1066

[3] H. Izumi, *Natural bilinear forms, natural sesquilinear forms and the associated duality of non-commutative L^p-spaces*, Internat. J. Math. **9**(1998), 975-1039.

[4] H. Izumi, *Relative modular theory for a weight*, Proc. Amer. Math. Soc. **127**(1999), 2703-2713

[5] H. Izumi, *The Radon-Nikodym theorem for non-commutative L^p-spaces*, preprint.

[6] H. Kosaki, *Applications of the Complex Interpolation Method to a von Neumann Algebra: Non-commutative L^p-Spaces*, J. Funct. Anal., **56** (1984), 29-78.

[7] M. Terp, *Interpolation Spaces between a von Neumann algebra and its predual*, J. Operator Theory **8**(1982), 327-360.