

## STABLE RANK OF CROSSED PRODUCTS BY $\mathbb{R}$ OR $\mathbb{T}$

須藤隆洋 (TAKAHIRO SUDO)

琉球大学理学部

今回の講演の主題は次の通りである：

主題 1.  $\mathfrak{A}$  を任意の  $C^*$ -環とし、 $\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$  を  $\mathbb{R}$  の作用  $\alpha$  による接合積とする。このとき、この接合積のステイブル・ランク (stable rank,  $sr$ ) は、何で評価できるか？

$$sr(\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}) \leq ?$$

主題 2.  $\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} \mathbb{T}$  を任意の  $C^*$ -環  $\mathfrak{A}$  の  $\mathbb{T}$  の作用  $\alpha$  による接合積とする。このとき、このステイブル・ランクは、何で評価できるか？

$$sr(\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} \mathbb{T}) \leq ?$$

まず最初に、Rieffel [Rf] によって導入された  $C^*$ -環のステイブル・ランクについて復習する。

定義.  $\mathfrak{A}$  を  $C^*$ -環とする。 $\mathfrak{A}$  に単位元がないときは、その単位元付加  $\mathfrak{A}^+$  を考える。 $\mathfrak{A}$  のステイブル・ランク  $sr(\mathfrak{A}) \geq 1$  が  $n$  以下であるとは、

$$sr(\mathfrak{A}) \leq n \Leftrightarrow L_n(\mathfrak{A}) \text{ が } \mathfrak{A} \text{ の直和 } \mathfrak{A}^n \text{ で稠密}$$

ただし、次は同値である：

$$\begin{aligned} (a_i)_{i=1}^n \in L_n(\mathfrak{A}) &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i^* a_i \text{ が } \mathfrak{A} \text{ で可逆である。} \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n b_i a_i \text{ が } \mathfrak{A} \text{ で可逆となる } (b_i)_{i=1}^n \in \mathfrak{A}^n \text{ が存在する。} \end{aligned}$$

注. この定義は、コンパクト、ハウスドルフ空間  $X$  の被覆次元の、 $X$  上の連続関数全体のなす可換  $C^*$ -環  $C(X)$  による代数的特徴づけを、一般に非可換の  $C^*$ -環に拡張したものである。

Rieffel によって得られたステイブル・ランクのいくつかの基本結果 [Rf] は、以下で断わりなしに用いられる場合がある。

例.  $X$  を局所コンパクト、ハウスドルフ空間とし、 $C_0(X)$  を無限遠で 0 になる  $X$  上の連続関数全体のなす可換  $C^*$ -環とする。このとき、

$$\text{sr}(C_0(X)) = [\dim X/2] + 1,$$

ただし、 $\dim X$  は  $X$  の被覆次元で、 $[\cdot]$  はガウス記号を意味する。

$\mathfrak{A} = C_0(X)$  とし、 $\alpha$  を  $\mathfrak{A}$  上の  $\mathbb{R}$  の自明な作用とする。このとき、 $\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R} \cong C_0(X \times \mathbb{R})$ 。従って、位相積空間に対する被覆次元の積定理 (cf. [Ng]) をもちいて、次がわかる：

$$\begin{aligned} \text{sr}(\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}) &= [\dim(X \times \mathbb{R})/2] + 1 \leq [(\dim X + 1)/2] + 1 \\ &\leq [\dim X/2] + 1 + 1 = \text{sr}(\mathfrak{A}) + 1. \end{aligned}$$

特に、 $X = \mathbb{R}^n$  で、 $\alpha$  が自明のときは、

$$\text{sr}(C_0(\mathbb{R}^n) \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}) = [(n+1)/2] + 1 = \begin{cases} \text{sr}(C_0(\mathbb{R}^n)) + 1 & n \text{ が奇数、} \\ \text{sr}(C_0(\mathbb{R}^n)) & n \text{ が偶数。} \end{cases}$$

$\mathfrak{A} = C_0(\mathbb{R})$ ,  $\alpha$ がシフトのとき、 $\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R} \cong \mathbb{K}$  (cf.[Pd, 7.7]). ただし、 $\mathbb{K}$ は可算無限次元ヒルベルト空間上のコンパクト作用素全体のなす  $C^*$ -環である。このとき、

$$\text{sr}(\mathbb{K}) = 1 < \text{sr}(\mathfrak{A}) + 1 = 2.$$

例.  $\mathfrak{A}$ を任意の  $C^*$ -環とし、 $\alpha$ を  $\mathbb{T}$ の  $\mathfrak{A}$ 上で自明な作用とする。このとき、

$$\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} \mathbb{T} \cong \mathfrak{A} \otimes C^*(\mathbb{T}) \cong \mathfrak{A} \otimes C_0(\mathbb{Z}).$$

したがって、

$$\text{sr}(\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} \mathbb{T}) = \text{sr}(\mathfrak{A}).$$

高級な例として、 $\mathfrak{A}_n = C(\mathbb{T}^n) \rtimes_{\beta} \mathbb{Z}$ を単純な非可換トーラスとし、 $\alpha$ を  $\mathbb{T}$ の  $\mathfrak{A}_n$ 上の双対作用とする。このとき、高井双対定理 (cf.[Pd]) より、

$$\mathfrak{A}_n \rtimes_{\alpha} \mathbb{T} \cong C(\mathbb{T}^n) \otimes \mathbb{K}.$$

一方、Elliott-Lin [EL]の結果より、 $\mathfrak{A}_n$ は、 $C(\mathbb{T})$ 上の行列環の有限直和の帰納極限になっている。ゆえに、 $\text{sr}(\mathfrak{A}_n) = 1$ 。したがって、

$$\text{sr}(\mathfrak{A}_n \rtimes_{\alpha} \mathbb{T}) = \begin{cases} 1 = \text{sr}(\mathfrak{A}_1) & n = 1 \\ 2 = \text{sr}(\mathfrak{A}_n) + 1 & n \geq 2. \end{cases}$$

以上の例をふまえて、今回の主結果は次のとおりである：

定理 1.  $(\mathfrak{A}, \mathbb{R}, \alpha)$ を  $\mathbb{R}$ による任意の  $C^*$ -力学系とすると、

$$\text{sr}(\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}) \leq \text{sr}(\mathfrak{A}) + 1.$$

また、 $(\mathfrak{A}, \mathbb{T}, \alpha)$  を  $\mathbb{T}$  による任意の  $C^*$ -力学系とすると、

$$\text{sr}(\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} \mathbb{T}) \leq \text{sr}(\mathfrak{A}) + 1.$$

注. 上の定理で、 $\mathbb{T}$  を可分な可換コンパクト群で置き換えることができる。

これらの公式の左辺を直接計算するのは、一般には難しい問題で、作用  $\alpha$  の情報が関与してくる。上の不等式の良いところは、右辺が  $\mathfrak{A}$  だけの情報で決まることである。

また、上の美しい評価式は、次の Rieffel による  $\mathbb{Z}$  による接合積の stable rank の評価式が得られて以来予想されてきたが、今まで解けてなかった。

(Rieffel).  $\mathbb{Z}$  による任意の  $C^*$ -力学系  $(\mathfrak{A}, \mathbb{Z}, \alpha)$  に対して、

$$\text{sr}(\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) \leq \text{sr}(\mathfrak{A}) + 1.$$

注. 位相空間の被覆次元に関して、次の積公式が成り立つ (cf. [Ng]) :

$$\dim(X \times Y) \leq \dim X + \dim Y.$$

ただし、 $X, Y$  は局所コンパクト、ハウスドルフ空間である。従って、主定理の公式は、この公式の非可換版と考えられる。

また、定理 1 がもっともらしい直感的な理由は、接合積  $\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$  は、 $\mathbb{R}$  上のコンパクトな台をもつ  $\mathfrak{A}$  値連続場 (積は合成積) の全体を  $C^*$ -完備したものなので、底空間が  $\mathbb{R}$  で、ファイバーが  $\mathfrak{A}$  の適当なファイバー空間の連続断面全体とみなせるためである。

定理 1 の証明の概略は最後に述べ、その前に、定理 1 の発展と応用を先に取り上げる。上の定理 1 の二つの公式を、次の形の一つにまとめることができる :

系 2.  $\mathfrak{A}$  を  $C^*$ -環とし、 $G$  を連結可換リー群とする。このとき、次が成り立つ：

$$\text{sr}(\mathfrak{A} \rtimes G) \leq \text{sr}(\mathfrak{A}) + (\dim G \wedge (\dim \hat{G} + 1)).$$

ただし、 $\hat{G}$  は  $G$  の双対群で、 $\wedge$  は最小値である。

注. 連結可換リー群は直積リー群  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^s$  ( $n, s \geq 0$ ) に同型である。

さらに、評価は荒くなるが、Rieffel の  $\mathbb{Z}$  接合積に対する公式も考慮に入れて、次を与える：

系 3.  $\mathfrak{A}$  を  $C^*$ -環とし、 $G$  を基本位相アーベル群とする。このとき、次が成り立つ：

$$\text{sr}(\mathfrak{A} \rtimes G) \leq \text{sr}(\mathfrak{A}) + \dim \hat{G} + 1.$$

注. 基本位相アーベル群は直積リー群  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^s \times F \times \mathbb{Z}^l$  ( $n, s, l \geq 0$ ) を意味する。ただし、 $F$  は有限可換群である。

さらに、定理 1 の応用として、

系 4.  $\mathfrak{A}$  を  $C^*$ -環とし、 $G = \mathbb{R}$  または  $\mathbb{T}$  とする。このとき、 $G$  による接合積  $\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} G$  の連結ステイブル・ランク (connected stable rank,  $\text{csr}$ ) とリアル・ランク (real rank,  $\text{RR}$ ) は次で評価される：

$$\text{csr}(\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} G) \leq \text{sr}(\mathfrak{A}) + 2, \quad \text{RR}(\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} G) \leq 2 \text{sr}(\mathfrak{A}) + 1.$$

注. 任意の  $C^*$ -環  $\mathfrak{A}$  の連結ステイブル・ランクとリアル・ランクは、ステイブル・ランクで次のように評価される ([Rf],[BP])：

$$\text{csr}(\mathfrak{A}) \leq \text{sr}(\mathfrak{A}) + 1, \quad \text{RR}(\mathfrak{A}) \leq 2 \text{sr}(\mathfrak{A}) - 1.$$

定理 1 の別の応用として、

定理 5.  $\mathfrak{A}$  を  $C^*$ -環とし、 $G$  を連結可解リー群とする。任意の接合積  $\mathfrak{A} \rtimes G$  に対し、次がなりたつ：

$$\text{sr}(\mathfrak{A} \rtimes G) \leq \text{sr}(\mathfrak{A}) + \dim G.$$

特に、 $G$  の  $C^*$ -群環  $C^*(G)$  の場合は、

$$\text{sr}(C^*(G)) \leq \dim G$$

注.

任意の連結可解リー群  $G$  は、岩沢の結果 [Iw] により、次の連続する半直積に同型である：

$$(\cdots (H_1 \rtimes H_2) \rtimes \cdots) \rtimes H_{\dim G}, \quad H_i \cong \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{T} \quad (1 \leq i \leq \dim G).$$

このとき、 $\mathfrak{A} \rtimes G$  は、次の接合積の繰り返しでかける：

$$(\cdots (\mathfrak{A} \rtimes H_1) \rtimes H_2 \cdots) \rtimes H_{\dim G}.$$

1次元連結リー群は、 $\mathbb{R}$  か  $\mathbb{T}$  に同型である。従って、この定理は定理 1 の一般化である。

また、 $G$  に強い条件がついた場合 (I 型、巾零など) や、Mautner 群や Dixmier 群などの非 I 型の具体的な場合、これらの  $C^*$ -群環の stable rank のより精密な評価式がえられている ([Sh], [ST1,2], [Sd1,2,3,4,5]).

定理 5 の応用として、

系 6. 任意の  $C^*$ -環  $\mathfrak{A}$  の連結可解リー群  $G$  による接合積  $\mathfrak{A} \rtimes G$  に対して、

$$\text{csr}(\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} G) \leq \text{sr}(\mathfrak{A}) + \dim G + 2, \quad \text{RR}(\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} G) \leq 2 \text{sr}(\mathfrak{A}) + 2 \dim G - 1.$$

特に、 $G$  の  $C^*$ -群環  $C^*(G)$  の場合は、

$$\text{csr}(C^*(G)) \leq \dim G + 2, \quad \text{RR}(C^*(G)) \leq 2 \dim G + 1.$$

最後に定理 1 の証明の概略を述べる。

定理 1 の証明の概略.  $\mathfrak{A}$  は単位元をもつと仮定してよい。もし  $\mathfrak{A}$  に単位元がない場合は、その単位元付加  $\mathfrak{A}^+$  と、 $\mathbb{R}$  の  $\mathfrak{A}$  上の作用  $\alpha$  の、 $\mathfrak{A}^+$  への自明な拡張  $\alpha^+$  を考える。このとき、 $\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$  は、 $\mathfrak{A}^+ \rtimes_{\alpha^+} \mathbb{R}$  の閉イデアルになる。従って、

$$\text{sr}(\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}) \leq \text{sr}(\mathfrak{A}^+ \rtimes_{\alpha^+} \mathbb{R}).$$

次に、 $\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$  の普遍表現に対応する共変表現  $(\pi, u)$  を考える。さらに、 $C^*(\mathbb{R})$  の  $u$  に対応する次の表現を同じ記号で  $u$  とする：

$$u(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t) u_t dt, \quad f \in L^1(\mathbb{R}).$$

このとき、[Pd, Theorem 7.6.6] の証明より、 $\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$  は、 $\pi(\mathfrak{A})$  と  $u(C^*(\mathbb{R}))$  で生成される  $C^*$ -環  $C^*(\pi(\mathfrak{A})u(C^*(\mathbb{R})))$  に閉イデアルとして含まれることがわかる。また、 $(\pi, u)$  が共変表現であることから、 $C^*(\pi(\mathfrak{A})u(C^*(\mathbb{R})))$  は、元  $\pi(a)u(f)$ ,  $a \in \mathfrak{A}$ ,  $f \in C^*(\mathbb{R})$  の有限線形和で生成されていることに注意する。

次に、 $\mathfrak{B} = C^*(\pi(\mathfrak{A})(u(C^*(\mathbb{R}) + \mathbb{C}1)))$  とおく。ただし、 $1$  は  $\pi(\mathfrak{A})$  の単位元である。このとき、 $\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$  は  $\mathfrak{B}$  の閉イデアルとみなせる。よって、

$$\text{sr}(\mathfrak{A} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}) \leq \text{sr}(\mathfrak{B}).$$

さらに、 $C^*(\mathbb{R})^+ \cong C(\mathbb{T})$  で、 $C(\mathbb{T})$  がユニタリ元である座標関数  $\text{id}(z) = z$  で生成されていることに注意する。写像  $C(\mathbb{T}) \cong C^*(\mathbb{R})^+ \rightarrow u(C^*(\mathbb{R})) + \mathbb{C}1$  によるこのユニ

タリ元の像を  $W$  とする。このとき、次の有限線形和の集合：

$$D = \text{span}\{\pi(a)W^k \mid a \in \mathfrak{A}, k \in \mathbb{Z}\}$$

が  $\mathfrak{B}$  を生成することがわかる。この  $D$  は一般の  $\mathbb{Z}$ -接合積の稠密部分に似ているが、 $\pi$  と  $W$  との関係は共変的ではない。そこで、Rieffel の  $\mathbb{Z}$ -接合積のステイブル・ランクの評価式 [Rf] の証明の一部改良版を証明すればよいことになる。しかしながら、ここに、離散接合積と連続接合積の違いが現れていて、証明をつめるのはかなりやっかいなので、興味ある読者は [Sd6] を参照せよ。

□

## REFERENCES

- [BP] L.G. Brown and G.K. Pedersen, *C\*-algebras of real rank zero*, J. Funct. Anal. **99** (1991), 131–149.
- [EL] G.A. Elliott and Q. Lin, *Operator Algebras and Their Applications*, Fields Ints. Commun. **13**, 1997, pp. 91–123.
- [Iw] K. Iwasawa, *On some types of topological groups*, Ann. Math. **50** (1949), 507–558.
- [Ng] K. Nagami, *Dimension Theory*, Academic Press, New York-London, 1970.
- [NOP] M. Nagisa, H. Osaka and N.C. Phillips, *Ranks of algebras of continuous C\*-algebra valued functions*, Preprint.
- [Os] H. Osaka, *Real rank of crossed products by connected compact groups*, Bull. London Math. Soc. **27** (1995), 257–264.
- [Pd] G.K. Pedersen, *C\*-Algebras and their Automorphism Groups*, Academic Press, London-New York-San Francisco, 1979.
- [Rf] M.A. Rieffel, *Dimension and stable rank in the K-theory of C\*-algebras*, Proc. London Math. Soc. **46** (1983), 301–333.
- [Sh] A.J.-L. Sheu, *A cancellation theorem for projective modules over the group C\*-algebras of certain nilpotent Lie groups*, Canad. J. Math. **39** (1987), 365–427.
- [Sd1] T. Sudo, *Stable rank of the reduced C\*-algebras of non-amenable Lie groups of type I*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3647–3654.
- [Sd2] ———, *Stable rank of the C\*-algebras of amenable Lie groups of type I*, Math. Scand. **84** (1999), 231–242.
- [Sd3] ———, *Dimension theory of group C\*-algebras of connected Lie groups of type I*, to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [Sd4] ———, *Structure of group C\*-algebras of Lie semi-direct products  $C^n \rtimes \mathbb{R}$* , Preprint.
- [Sd5] ———, *Structure of group C\*-algebras of the generalized Dixmier groups*, Preprint.
- [Sd6] ———, *Stable rank of crossed products by  $\mathbb{R}$  or  $\mathbb{T}$* , Preprint.
- [ST1] T. Sudo and H. Takai, *Stable rank of the C\*-algebras of nilpotent Lie groups*, Internat. J. Math. **6** (1995), 439–446.



- [ST2] \_\_\_\_\_, *Stable rank of the  $C^*$ -algebras of solvable Lie groups of type I*, J. Operator Theory **38** (1997), 67–86.
- [Tk] H. Takai, *Stable rank of crossed products by compact abelian groups*, Preprint (1993).

903-0213 沖縄県 中頭郡西原町千原 1 番地 琉球大学 理学部 数理科学科  
E-mail address: sudo@math.u-ryukyu.ac.jp