数理解析研究所講究録
1132 巻 2000 年 59-63

ファジイ非線形写像の最小化に関するいくつかの話題について

古川　長太　(創価大学工学部)

ファジイ非線形写像の最小化に関しては，数理解析研究所における過去の研究集会において筆者がある程度報告ずみであるが，本報告ではその際欠落していた部分を補うと共に，未報告の話題について一括して報告する．ただし説明の都合上，報告ずみのことがらについても若干重複する部分がある．

はじめに全体を通じて基本的な定義として，ファジイ数とその間の順序関係について定義を述べておく．

サポートが有界なファジイ数：

(i) $\mu_A(m)=1$ をみたす実数 m がただ一つ存在する，

(ii) A のサポートは有界である，

(iii) μ_A は $\mathbf{R}$ 上で準凹である，

(iv) μ_A は $\mathbf{R}$ 上で上半連続である．

サポートが有界なファジイ数の全体からなる集合を $\mathcal{F}$ で表す．

サポートが有界な型関数：

(i) $L(x)=L(-x)\quad \forall x\in\mathbf{R}$,

(ii) $L(x)=1 \Leftrightarrow x=0$,

(iii) $L(x)$ は $[0,\infty)$ 上で単調非増加,

(iv) $L(x)$ は $\mathbf{R}$ 上で上半連続,

(v) $t_0^L=\sup\{x>0 \mid L(x)>0\}$ は $0<t_0^L<\infty$ をみたす．

t_0^L を L の零点という．

L -ファジイ数：

L をサポートが有界な任意の型関数，m を任意の実数，β を任意の正数として，

$$\mu_A(x)=L\big((x-m)/\beta\big),\ \ x\in\mathbf{R},$$

をメンバシップ関数にもつファジイ数 A を L -ファジイ数といい，略して

$$A=(m,\beta)_L$$

と書く．L -ファジイ数の全体からなる集合を $\mathcal{F}_L$ で表す．

ファジイ・マックス順序： $A, B \in \mathcal{F}$ に対して

$$A \preceq B \underset{def}{\Leftrightarrow} (\max A_\alpha \leqq \max B_\alpha) \,\&\, (\min A_\alpha \leqq \min B_\alpha) \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

§1 ファジイ凸写像

定義 1　Ω を $\mathbf{R}^k$ の凸部分集合とする． Ω から $\mathcal{F}$ への写像 F が，任意の $x, y \in \Omega$ と任意の $0 < \lambda < 1$ に対して

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \preceq (\lambda \otimes F(x)) \oplus ((1-\lambda) \otimes F(y))$$

をみたすとき，F は Ω 上で凸であるといい，このとき F を Ω 上の凸写像という． ここに $\otimes, \oplus$ は拡張原理から定義される積と和の演算を表す．

補題 1　F を $\mathbf{R}^k$ の凸部分集合 Ω から $\mathcal{F}_L$ への写像とし，そのパラメータ表現を

$$\left.\begin{aligned} F(x) = (m(x), \beta(x))_L \\ \beta(x) \geqq 0 \end{aligned}\right\} \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

とする． このとき F が Ω 上で凸であるための必要十分条件は次の(i), (ii) が成り立つことである．

(i)　センター関数 $m(x)$ は Ω 上で通常の意味で凸である，

(ii)　$t_0^L \,|\, \lambda\beta(x) + (1-\lambda)\beta(y) - \beta(\lambda x + (1-\lambda)y) \,|$
$$\leqq \lambda m(x) + (1-\lambda)m(y) - m(\lambda x + (1-\lambda)y),$$
$$\forall x, \forall y \in \Omega, \ 0 < \forall \lambda < 1.$$

<u>簡単な凸写像の例</u>

例 1　$\mathbf{R}^k$ の凸部分集合 Ω から $\mathcal{F}_L$ への写像 (1) において，センター関数 $m(x)$ とスプレッド関数 $\beta(x)$ はともに Ω 上で凸で，定数 $0 < \mu \leqq 1$ が存在して

$$\beta(x) = \mu m(x), \ x \in \Omega$$

の関係をみたす．

例 2　(1) において $m(x)$ は Ω 上で凸で負の値をとり，定数 $0 < \mu \leqq 1$ が存在して

$$\beta(x) = -\mu m(x), \ x \in \Omega$$

の関係をみたす．

例 3　凸2次曲線 $y = ax^2$ $(a > 0)$ のファジイ化

$$F(x) = Ax^2, \ x \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

を考える． ただし

$$A = (m, \beta)_L, \quad (\beta > 0) \tag{3}$$

(2), (3) を書きかえれば

$$F(x) = (mx^2, \beta x^2)_L, \quad x \in \mathbf{R}.$$

となる． 定数 $0 < \mu \leqq 1$ が存在して $\beta = \mu m$ の関係をみたせば，F は凸写像である．

F を$\mathbf{R}^k$の開部分集合E から$\mathcal{F}$ への写像とし, x をE の任意の点, h を$\mathbf{R}^k$の任意のベクトルとする. F のx におけるh 方向のFurukawa の意味の片側方向微分を $F'(x;h)$ で表す.

定理 1 F を $\mathbf{R}^k$の開凸部分集合 Ω から$\mathcal{F}_L$ への凸写像とし, (1) をそのパラメータ表現とする. このときF はΩ のすべての点において片側方向微分可能となり, 点x におけるh 方向の片側方向微分は次式で与えられる.

$$F'(x;h) = \left(m'(x;h), |\beta'(x;h)| \right)_L \tag{4}$$

ここに $m'(x;h)$, $\beta'(x;h)$ はそれぞれ m, β の通常の意味の片側方向微分である.

定理 2 F を $\mathbf{R}^k$の開部分集合E から $\mathcal{F}_L$ への写像とし(凸性は仮定しない), そのパラメータ表現を

$$\left. \begin{aligned} F(x) = (m(x), \beta(x))_L \\ \beta(x) \geqq 0 \end{aligned} \right\} \quad x \in E, \tag{5}$$

とする. ここで $m(x)$, $\beta(x)$ はE 上で微分可能であるとする. このときF はE のすべての点において片側方向微分可能となり, そのx におけるh 方向の片側方向微分は次のように表される.

$$F'(x;h) = \left(\nabla m(x)h, |\nabla \beta(x)h| \right)_L \tag{6}$$

§ 2　制約無しのファジイ非線形計画問題

F を $\mathbf{R}^k$ から$\mathcal{F}$ への写像として次の問題を考える.

$$\text{(FNP)} \qquad \underset{x \in \mathbf{R}^k}{\text{Minimize}}\ F(x)$$

ここにMinimize はファジイ・マックス順序に関する最小化を意味するものとする.

定義 2 点 $z \in \mathbf{R}^k$ に対してz の近傍Uが存在して

$$F(z) \preceq F(x) \qquad \forall x \in U$$

が成り立つとき, z は(FNP) の局所的最小解であるという.

$$F(z) \preceq F(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R}^k$$

が成り立つとき, z は(FNP) の大域的最小解であるという.

定理 3 F を $\mathbf{R}^k$ から$\mathcal{F}$ への凸写像とする. このときz が(FNP) の局所的最小解であれば, z は(FNP) の大域的最小解である.

定理 4　F を $\mathbf{R}^k$ から $\mathcal{F}_L$ への写像で, そのパラメータ表現を

$$\left.\begin{array}{r} F(x)=(m(x),\beta(x))_L \\ \beta(x)\geqq 0 \end{array}\right\} \quad x\in\mathbf{R}^k, \tag{7}$$

とする．ここで $m(x), \beta(x)$ は $\mathbf{R}^k$上で微分可能であるとする．このとき (FNP) の局所的最小解 z は

$$\begin{cases} \nabla m(z)=\mathbf{0}, \\ \nabla\beta(z)=\mathbf{0}, \end{cases} \tag{8}$$

をみたす.

定理 5　定理4 の写像 F が $\mathbf{R}^k$ から $\mathcal{F}_L$ への凸写像であるとする．このとき $z\in\mathbf{R}^k$が (8) をみたせば, z は (FNP) の大域的最小解である.

§ 3　ファジイ非線形写像の最小化探索法

定義 3　2つのファジイ数 $A, B\in\mathcal{F}$ に対して

$$A \prec\!\prec B \underset{def}{\Longleftrightarrow} (\max A_\alpha < \max B_\alpha)\,\&\,(\min A_\alpha < \min B_\alpha) \quad \forall\alpha\in[0,1].$$

補題 2　ファジイ数 A と実数 t に対して

$$A \prec\!\prec t \Leftrightarrow \max A_0 < t$$

が成立する．ここに $\max A_0$ は A のサポートの右端点.

定義 4　F を $\mathbf{R}^k$ から $\mathcal{F}$ への写像, x を $\mathbf{R}^k$の点とする．ベクトル $d\in\mathbf{R}^k$ に対して $\lambda_0>0$ が存在して

$$F(x+\lambda d) \prec\!\prec F(x) \qquad \forall\lambda\in(0,\lambda_0] \tag{9}$$

をみたすとき, ベクトル d は点 x における F の降下方向であるという.

定理 6　F を $\mathbf{R}^k$の開部分集合 E から $\mathcal{F}_L$ への写像とし, そのパラメータ表現を (5)とする．ここで $m(x), \beta(x)$は E 上で微分可能であるとする．（定理2 により F は E のすべての点において片側方向微分可能となる）このとき

$$F'(x;d) \prec\!\prec 0 \tag{10}$$

をみたすベクトル d は x における F の降下方向である.

降下方向ベクトルの求め方：

$$F'(x;d) \prec\prec 0 \iff \begin{cases} (\nabla m(x) + t_0^L \nabla \beta(x))d < 0, \\ \qquad \text{and} \\ (\nabla m(x) - t_0^L \nabla \beta(x))d < 0, \end{cases}$$

が成り立つことに注意すると，

$$a = \frac{\nabla m(x) + t_0^L \nabla \beta(x)}{\| \nabla m(x) + t_0^L \nabla \beta(x) \|},$$

$$b = \frac{\nabla m(x) - t_0^L \nabla \beta(x)}{\| \nabla m(x) - t_0^L \nabla \beta(x) \|},$$

とおいてベクトル d を

$$d = -(a+b) \tag{11}$$

と定めれば，d は(10) をみたす．すなわち(11) の d は x における F の降下方向である．

直線探索の方法：

F のパラメータ表現を(5) とし，ベクトル d は(10) をみたすものとする．あらかじめ

$$0 < \mu < 1, \quad 0 < \gamma < 1,$$

をみたす定数 μ, γ を任意に定めておく．このとき

$$\begin{cases} m(x+(\gamma)^l d) + t_0^L \beta(x+(\gamma)^l d) - (m(x) + t_0^L \beta(x)) \\ \qquad\qquad \leqq \mu(\gamma)^l (\nabla m(x) d + t_0^L \nabla \beta(x) d), \\ m(x+(\gamma)^l d) - t_0^L \beta(x+(\gamma)^l d) - (m(x) - t_0^L \beta(x)) \\ \qquad\qquad \leqq \mu(\gamma)^l (\nabla m(x) d - t_0^L \nabla \beta(x) d), \end{cases}$$

をみたす最小の非負整数を $\hat{l}$ とする．((10) をみたす d に対しこのような $\hat{l}$ は必ず存在する)

この $\hat{l}$ を用いて $(\gamma)^{\hat{l}}$ を点 x における d 方向のステップ幅とせよ．すなわち

$$x + (\gamma)^{\hat{l}} d$$

を次の段階の探索点とせよ．

上記のステップ幅の定め方は，クリスプな非線形関数の場合の Armijo の方法にならって作成したものである．

【参考文献】

古川長太　『ファジイ最適化の数理』　森北出版 1999年