数理解析研究所講究録
1132巻 2000年 3-8

Accumulation Gameについて

Clemson University William H. Ruckle
神戸商科大学 菊田健作 (Kensaku Kikuta)

1. はじめに.

2人のプレーヤーをHider (以後**H**) とSeeker (以後**S**) とする. n個の箱がある. Bは箱全体の集合である. 毎回, **H**はただ1個の物を任意の空の箱に隠し, **S**はただ1個の箱を調べる. 調べる箱に物がある場合, **S**は確率1でそれを見つける. 毎回, **S**が物を見つけた時にのみ, **H**は**S**が調べた箱を知る. **H**はこの情報を, 次回に箱を選ぶ際に使うことができる. 毎回終了後, もしk個の物が (k個の) 箱にあれば, ゲームは終了し, **H**は勝って利得1を得る. T回終了までに, k個の物を箱に残すのに失敗した時は**H**の負けで利得0を得る. このゲームをn個の箱, k個のlocation, T回の試行を行えるquiet accumulation gameと呼ぶ.

[2] において, Kikuta/Ruckleは新しい探索ゲームを提案し, accumulation gameと呼んだ. そこでは, **H**が**S**の調べた箱を毎回知ることができるような場合, すなわちnoisy accumulation gameを調べた. [5] において, Ruckle/Kikutaはquiet accumulation gameの二つのspecial caseを分析した. 一つは, $k=2$, $T=3$の場合, もう一つは$k=T$の場合である. $k=2$, $T=3$の場合を$T=k+1$ $(k \geq 2)$の場合へ拡張して分析するのは困難である.

そこで本報告では, n個の箱, k個のlocation, $T=k+m(m \geq 1)$回の試行を行えるquiet accumulation gameの三つのvariation (下記VAR I, VAR II, VAR III) を提案する. これらのvariationを分析することにより, 元のゲームの値の上界または下界を見つけることができる. さらに, これらの分析により, 元のゲームの最適戦略についての情報を得ることができる. 各variationはプレーヤーの戦略に制限を加えることにより得られる. 本報告では下記VAR IIを主として分析する. VAR IとVAR IIIを第3節で部分的に分析する. 第4節ではquiet accumulation gameの値に対する上界, 下界について述べる. 1)

VAR I: **S**はこれまでに調べたことがない箱のみを調べることができる,
　Hはこれまでに隠したことがない箱にのみ隠すことができる.
VAR II: **S**はこれまでに調べたことがない箱のみを調べることができる.
VAR III: **H**はこれまでに隠したことがない箱にのみ隠すことができる.

第i回の結果$\mathcal{O}_i$を次のように定義する.

$\mathcal{O}_i = \mathcal{N}$:第$i$回に**S**は物を見つけなかった.
$\mathcal{O}_i = \mathcal{F}$:第$i$回に**S**は物を見つけた.

一般的な結果の列は次の通りである:

$$\underbrace{\mathcal{N}\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{\ell_1}\mathcal{F}\underbrace{\mathcal{N}\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{\ell_2}\mathcal{F}\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}\mathcal{F}\underbrace{\mathcal{N}\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{\ell_i}\mathcal{F}\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}\mathcal{F}\underbrace{\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{\ell_{m+1}} \tag{1.1}$$

ここに

$$\ell_1+\cdots+\ell_{m+1}=k \text{ かつ } 0 \leq \ell_i \leq k \text{ for } 1 \leq i \leq m+1. \tag{1.2}$$

h_i, s_iは第i回における**H**, **S**の選択を表わす. 各$i=1,\ldots,T$に対し:

$$\begin{aligned}
H_i &\equiv \{h_1,\ldots,h_i\}, (\text{choices by } \mathbf{H}),\\
S_i &\equiv \{s_1,\ldots,s_i\}, (\text{choices by } \mathbf{S}),\\
N_i &\equiv I \setminus (H_i \cup S_{i-1}), (\mathcal{O}_i = N \text{ iff } s_i \in N_i),\\
F_i &\equiv H_i \setminus S_{i-1}, (\mathcal{O}_i = F \text{ iff } s_i \in F_i),
\end{aligned}$$

1) 命題の証明のうち本報告で省かれたものに興味のある人は [6] を参照されたい.

$H_0 = S_0 = \emptyset$ とおく．$D_i^j \equiv H_i \cup \{s_{i+1}, \ldots, s_{k+j}\}$ for $i = 0, \ldots, k+j$ and $j = 1, \ldots, m$ とおく．**H** と **S** の純戦略を次のように表わす．

$$h^i = h_i(h_1, \mathcal{O}_1, h_2, \mathcal{O}_2, \ldots, h_{i-1}, \mathcal{O}_{i-1}) \text{ for } i = 1, \ldots, T,$$
$$s^i = s_i(s_1, \mathcal{O}_1, s_2, \mathcal{O}_2, \ldots, s_{i-1}, \mathcal{O}_{i-1}) \text{ for } i = 1, \ldots, T.$$

B_t は $t-1$ 回の後の空の箱の集合である．第 t 回 $(1 \leq t \leq T)$ での,**H** の B_t への確率分布を p_t，**S** の $I \setminus S_{t-1}$ 上の確率分布を q_t と表わす．$T = k+m$ であるから，**S** が $(m+1)$ 回見つけるとゲームは **H** の負けで終了する．従って，両プレーヤーとも，これまでの **S** による発見回数は m 以下であるとして，確率分布を考えればよい．

これ以後 $x \equiv n-k$ とおく．

2. VAR II の分析

本節では VAR II を分析する．まず，**H** の行動戦略を定義する．第 t 回において，

$$p_t^*(h) = \frac{1}{n-t+r}, \tag{2.1}$$

ここに $\ell_1 + \cdots + \ell_{r-1} + r + 1 \leq t \leq \ell_1 + \cdots + \ell_r + r$ かつ $2 \leq r \leq m$ $(r = m+1$ のときは，$\ell_1 + \cdots + \ell_m + m + 2 \leq t \leq k+m$，そして $r = 1$ のときは，$1 \leq t \leq \ell_1 + 1)$．
第 t 回において，

$$p_t^*(s_{t-1}) = 1 \quad \text{and} \quad p_t^*(h) = 0 \quad \text{for} \quad h \neq s_{t-1}, \tag{2.2}$$

ここに，$t = \ell_1 + \cdots + \ell_{r-1} + r$ and $1 \leq r \leq m$.
S の行動戦略を

$$q_t^*(s) = \frac{1}{n-t+1} \quad \text{for} \quad s \in I \backslash S_{t-1}, 1 \leq t \leq k+m. \tag{2.3}$$

と定義する．

次に，関数 $\{f_a\}_{1 \leq a \leq m+1}$ を

$$f_a(x; y_1, \ldots, y_a) = f_1(x; y_a)\{f_{a-1}(x; y_1, \ldots, y_{a-1}) - f_{a-1}(x-1; y_1, \ldots, y_{a-1})\}, \tag{2.4}$$

$$f_1(x; y) = x^y, \tag{2.5}$$

と定義する．

$$v(n,k,1) \equiv \frac{f_1(x;k)}{{}_nP_k}, \tag{2.6}$$

とおく．さらに，$r = 2, \ldots, m+1$ に対し，

$$v(n,k,r) = v(n,k,r-1) + \frac{1}{{}_nP_k} \sum_{\ell_1=0}^{k-1} \sum_{\ell_2=0}^{k-\ell_1-1} \cdots \sum_{\ell_{r-1}=0}^{k-\ell_1-\cdots-\ell_{r-2}-1} f_r(x; \ell_1+1, \ell_2, \ldots, \ell_{r-1}, \ell_r - 1), \tag{2.7}$$

とおく，ここに $\ell_1 + \cdots + \ell_r = k$ である．

定理 2.1. $T = k+2$ とする．(2.1)，(2.2) および (2.3) はそれぞれ **H** および **S** の最適戦略である．ゲームの値は $v(n,k,3)$ である．

Proof: $\mathbf{H}$ が (2.1) と (2.2) で定義される行動戦略 $p*$ を用いるとせよ．$\mathbf{S}$ は行動戦略 q を用いるとせよ．結果の列 (1.1) が起こる確率を次の補題の公式を使いながら計算できる．そして，補題 2.2 から 2.6 より，マクシミン値が $v(n,k,3)$ であることがわかる．次に，$\mathbf{S}$ が (2.3) で定義される行動戦略 $q*$ を用い，$\mathbf{H}$ は純粋戦略 (2.8) を用いるとせよ．補題 2.7 から 2.11 によりミニマックス値が $v(n,k,3)$ 以下であることがわかる．

補題 2.2. 結果の列 $\underbrace{\mathcal{N}\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{k}$ が起こる確率は $v(n,k,1)$ である．

Proof:[1]

$$
\begin{aligned}
&\sum_{h_1=1}^{n}\frac{1}{n}\sum_{s_1\in N_1}q(s_1)\sum_{h_2\neq h_1}\frac{1}{n-1}\sum_{s_2\in N_2}q(s_2|S_1)\cdots\sum_{h_k\notin H_{k-1}}\frac{1}{n-k+1}\sum_{s_k\in N_k}q(s_k|S_{k-1})\\
&=\sum_{s_1=1}^{n}q(s_1)\sum_{s_2\neq s_1}q(s_2|s_1)\cdots\sum_{s_k\notin S_{k-1}}q(s_k|S_{k-1})\sum_{h_1\notin S_k}\frac{1}{n}\sum_{h_2\notin D_1^0}\frac{1}{n-1}\cdots\sum_{h_k\notin D_{k-1}^0}\frac{1}{n-k+1}\\
&=\sum_{s_1=1}^{n}q(s_1)\sum_{s_2\neq s_1}q(s_2|s_1)\cdots\sum_{s_k\notin S_{k-1}}q(s_k|S_{k-1})\frac{n-k}{n}\frac{n-k}{n-1}\cdots\frac{n-k}{n-k+1}\\
&=\frac{(n-k)^k}{{}_nP_k}=\frac{x^k}{{}_nP_k}=\frac{f_1(x;k)}{{}_nP_k}=v(n,k,1).
\end{aligned}
$$

すべての $a, 0\le a\le k-1$ に対し，$|D_a^0|=k$ であることに注意せよ．■

補題 2.3. $t=i,\ldots,j$ に対し，$\mathcal{O}_t=\mathcal{N}$ とせよ．このとき，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s_i\in N_i}\sum_{h_{i+1}\notin H_i}\sum_{s_{i+1}\in N_{i+1}}\cdots\sum_{h_j\notin H_{j-1}}\sum_{s_j\in N_j}\sum_{h_{j+1}\notin H_j}\\
&=\sum_{s_i\notin H_i\cup S_{i-1}}\sum_{s_{i+1}\notin H_i\cup S_i}\cdots\sum_{s_j\notin H_i\cup S_{j-1}}\sum_{h_{i+1}\notin H_i\cup\{s_{i+1},\ldots,s_j\}}\cdots\sum_{h_j\notin H_{j-1}\cup\{s_j\}}\sum_{h_{j+1}\notin H_j}.
\end{aligned}
$$

補題 2.4. $t=i,\ldots,j$ に対し，$\mathcal{O}_t=\mathcal{N}$ とせよ．$\mathcal{O}_{j+1}=\mathcal{F}$ であったとすると，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{h_{i+1}\notin H_i\cup\{s_{i+1},\ldots,s_j\}}\cdots\sum_{h_j\notin H_{j-1}\cup\{s_j\}}\sum_{h_{j+1}\notin H_j}\Bigl(\sum_{s_{j+1}\notin S_j}-\sum_{s_{j+1}\notin H_{j+1}\cup S_j}\Bigr)\\
&=\sum_{s_{j+1}\notin S_j}\sum_{h_{i+1}\notin H_i\cup\{s_{i+1},\ldots,s_j\}}\cdots\sum_{h_j\notin H_{j-1}\cup\{s_j\}}\sum_{h_{j+1}\notin H_j}\\
&\quad-\sum_{s_{j+1}\notin H_{j+1}\cup S_j}\sum_{h_{i+1}\notin H_i\cup\{s_{j+1},s_{i+1},\ldots,s_j\}}\cdots\sum_{h_j\notin H_{j-1}\cup\{s_{j+1},s_j\}}\sum_{h_{j+1}\notin H_j\cup\{s_{j+1}\}}.
\end{aligned}
$$

補題 2.5. 結果の列 $\underbrace{\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{\ell}\mathcal{F}\underbrace{\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{k-\ell}$ が起こる確率は $\frac{1}{{}_nP_k}f_2(x;\ell_1+1,\ell_2-1)$ である，ここに $\ell=\ell_1$ (i.e., (1.1) において $m=1$).

補題 2.6. $T=k+m$ とする．$\mathbf{H}$ が p^* を，$\mathbf{S}$ が q を用いたとき，結果の列 (1.1) が起こる確率は $v(n,k,m+1)$ である．

$\mathbf{S}$ が (2.2) で定義される行動戦略 q^* を用い，$\mathbf{H}$ が次のように表わされる任意の純粋戦略を用いたとせよ．

---

[1] 本報告で $q_t(s_t|S_{t-1})$ を $q(s_t|S_{t-1})$，あるいはより簡単に $q(s_t)$ と表わす．

$$
(2.8) \qquad \begin{cases} h_1,\cdots,h_k & \text{for } \underbrace{\mathcal{N}\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{k}; \\ h_1,\cdots,h_{\ell+1},h^{\ell}_{\ell+2},\cdots,h^{\ell}_{k+1} & \text{for } \underbrace{\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{\ell}\mathcal{F}\underbrace{\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{k-\ell}, 0\le \ell\le k-1. \end{cases}
$$

補題 2.7. **H** と **S** が上記の戦略を用いるとき，結果の列 $\underbrace{\mathcal{N}\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{k}$ が起こる確率は $v(n,k,1)$ である．

Proof:

$$
\sum_{s_1\in N_1}\frac{1}{n}\sum_{s_2\in N_2}\frac{1}{n-1}\cdots\sum_{s_k\in N_k}\frac{1}{n-k+1}=\frac{(n-k)^k}{{}_nP_k}. \blacksquare
$$

補題 2.8. 結果の列 $\underbrace{\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{\ell}\mathcal{F}\underbrace{\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{k-\ell}$ が起こる確率は $\frac{1}{{}_nP_k}f_2(x;\ell_1+1,\ell_2-1)$ 以下である，ここに $\ell=\ell_1$ and $\ell_2=k-\ell$ である．

結果の列 $\underbrace{\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{\ell_1}\mathcal{F}\underbrace{\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{\ell_2}\mathcal{F}\underbrace{\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{\ell_3}$ が起こったとせよ．

$$
h_{t_1}=s_{L_1+1}, h_{t_2}=s_{L_2+2}, h_{r_1}=s_{L_1+1} \text{ and } h_{r_2}=s_{L_2+2},
$$

であったとせよ，ここに

$$
L_1+2\le t_1\le k+2, L_2+3\le t_2\le k+2, 1\le r_1\le L_1+1 \text{ and } 1\le r_2\le L_2+2.
$$

補題 2.9. 結果の列 $\underbrace{\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{\ell_1}\mathcal{F}\underbrace{\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{\ell_2}\mathcal{F}\underbrace{\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{\ell_3}$ が起こる確率は次の通りである：

(i) $L_1+2\le t_1\le L_2+2$，$L_1+2\le r_2\le L_2+2$ かつ $r_2<t_1$ のとき．

$$
\frac{1}{{}_nP_k}x^{k+L_2-t_1-t_2+5}(x-1)^{L_1+t_1+t_2-r_1-r_2-L_2-2}(x-2)^{r_1+r_2-L_1-3}.
$$

(ii)$L_1+2\le t_1\le L_2+2$，$L_1+2\le r_2\le L_2+2$ かつ $t_1<r_2$ のとき．

$$
\frac{1}{{}_nP_k}x^{k+L_2-r_2-t_2+5}(x-1)^{L_1+r_2+t_2-r_1-t_1-L_2-2}(x-2)^{r_1+t_1-L_1-3}.
$$

(iii) $L_1+2\le t_1\le L_2+2$，$1\le r_2\le L_1+1$ かつ $r_1<r_2$ のとき．

$$
\frac{1}{{}_nP_k}x^{k+L_1+L_2-t_1-t_2-r_2+6}(x-1)^{t_1+t_2+r_2-r_1-L_1-L_2-5}(x-2)^{r_1-1}.
$$

(iv)$L_1+2\le r_2\le L_2+2$ かつ $L_2+3\le t_1\le k+2$ のとき．

$$
\frac{1}{{}_nP_k}x^{k-t_2+3}(x-1)^{t_2-t_1+L_2-r_2+L_1-r_1+3}(x-2)^{t_1-L_2+r_2-L_1+r_1-6}.
$$

(v) $1\le r_2\le L_1+1$ かつ $L_2+3\le t_1\le k+2$ のとき．

$$
\frac{1}{{}_nP_k}x^{k-t_2-r_2+L_1+4}(x-1)^{t_2-t_1+r_2-r_1+L_2-L_1}(x-2)^{t_1-L_2+r_1-4}.
$$

補題 2.10. (L_1+2) 回と (L_2+3) 回において，**H** はそれぞれ s_{L_1+1} と s_{L_2+2} を選択すべきである．
Proof: 補題 2.9 において，すべての場合において，確率の式は $(\frac{x-1}{x})^{t_1+t_2}$ かまたは $(\frac{x-1}{x})^{t_2}(\frac{x-2}{x-1})^{t_1}$ を含んでいる．これらは t_1 と t_2 について減少関数である． $\blacksquare$

補題 2.11. 結果の列 $\underbrace{\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{\ell_1}\mathcal{F}\underbrace{\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{\ell_2}\mathcal{F}\underbrace{\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{\ell_3}$ が起こる確率は $\frac{1}{{}_nP_k}f_3(x;\ell_1+1,\ell_2,\ell_3-1)$. 以下である．

3. VAR I と VAR III の分析

本節では $T=k+1$ の場合に VAR I と VAR III を分析する．まず，$\mathbf{H}$ の行動戦略を，第 t 回 $(1 \le t \le T)$ において，

$$(3.1) \qquad p_t^*(h) = \frac{1}{n-t+1} \quad \text{for} \quad h \in I \backslash H_{t-1}.$$

と定義する．

次に $\mathbf{S}$ の行動戦略を

$$(3.2) \qquad q_t^*(s) = \frac{1}{n-t+1} \quad \text{for} \quad s \in I \backslash S_{t-1}.$$

と定義する．(3.2) は (2.3) と同じである．さらに，関数 $\{g_a\}_{1 \le a \le m+1}$ を

$$(3.3) \qquad g_a(x; y_1, \ldots, y_a) = g_1(x-1; y_a)\{g_{a-1}(x; y_1, \ldots, y_{a-1}) - g_{a-1}(x-1; y_1, \ldots, y_{a-1})\},$$

かつ

$$(3.4) \qquad g_1(x; y) = x^y.$$

と定義する．

$$(3.5) \qquad w(n,k,1) \equiv \frac{g_1(x;k)}{{}_nP_k},$$

とおく．さらに，$r = 2, \ldots, m+1$ に対し，

$$(3.6) \quad w(n,k,r) = w(n,k,r-1) + \frac{1}{{}_nP_k}\frac{x-1}{x}\sum_{\ell_1=0}^{k-1}\sum_{\ell_2=0}^{k-\ell_1-1}\cdots\sum_{\ell_{r-1}=0}^{k-\ell_1-\cdots-\ell_{r-2}-1} g_r(x; \ell_1+1, \ell_2, \ldots, \ell_{r-1}, \ell_r - 1),$$

ここに，$\ell_1 + \cdots + \ell_r = k$ である．

定理 3.1. VAR I において，$T = k+1$ とせよ．(3.1) と (3.2) で与えられる p^* と q^* はそれぞれ $\mathbf{H}$ と $\mathbf{S}$ の最適戦略である．ゲームの値は

$$w(n,k,2) = \frac{1}{{}_nP_k} g_1(x;k) + \frac{1}{{}_nP_k}\frac{x-1}{x}\sum_{\ell_1=0}^{k-1} g_2(x; \ell_1+1, \ell_2-1).$$

次に，VAR III を $T = k+1$ の場合に考える．

定理 3.2. VAR III において $T = k+1$ とする．(3.1) と (3.2) で与えられる p^* と q^* はそれぞれ $\mathbf{H}$ と $\mathbf{S}$ の最適戦略である．ゲームの値は $w(n,k,2)$ である．

4. おわりに

n 個の箱，k 個の locations，$k+1$ 回の，元の quiet accumulation game の値を $V(n,k)$ と表わす．

定理 4.1. $v(n,k,2) \ge V(n,k) \ge w(n,k,2)$.

Proof: VAR II での $\mathbf{S}$ の戦略集合は元の quiet accumulation game における $\mathbf{S}$ の戦略集合に含まれる．よって，$v(n,k,2) \geq V(n,k)$. VAR III での $\mathbf{H}$ の戦略集合は元の quiet accumulation game における $\mathbf{H}$ の戦略集合に含まれる．よって，$V(n,k) \geq w(n,k,2)$ を得る． ∎

$$
\begin{aligned}
{}_nP_k\{v(n,k,2) - w(n,k,2)\} &= \sum_{\ell=0}^{k-1}\sum_{r=0}^{\ell}\{f_2(x;\ell+1,\ell_2-1) - \frac{x-1}{x}g_2(x;\ell+1,\ell_2-1)\} \\
&= \frac{1}{x}\{(k-2x+2)x^{k+1} + (k+2x)(x-1)^{k+1}\}.
\end{aligned}
$$

定義より，$n \geq k$, i.e., $x \equiv n-k \geq 0$. $x=0$ ならば，$\mathbf{H}$ が勝つ確率は我々が考えるすべてのモデルにおいてゼロである． $x=1$ のときには，$v(n,k,2) - w(n,k,2) = (n-1)/n!$ となり，これは n が大きくなるとゼロに収束する．$k=2$ のときは，[5] より，

$$
V(n,2) = \frac{1}{{}_nP_3}\{x^3 + x^2 + \frac{2x^3 - x^2 - x + 1}{x+2}\}.
$$

よって

$$
{}_nP_3\{v(n,2,2) - V(n,2)\} = \frac{4x^2 - x - 1}{x+2} > 0,
$$

かつ

$$
{}_nP_3\{V(n,2) - w(n,2,2)\} = \frac{7x-3}{x+2} > 0.
$$

References

[1] S.Gal: *Search Games*, Math.in Sci. and Eng., 149, Academic Press, 1980.

[2] Kikuta,K. and W.H.Ruckle: Accumulation Games I-Noisy Search. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol.94, No.2, August 1997.

[3] ———: Continuous Accumulation Games on Discrete Locations. August 1996.

[4] W.H.Ruckle: *Geometric Games and their Applications*. Pitman, Boston, 1983.

[5] Ruckle,W.H. and K.Kikuta: Quiet Accumulation Games. Working Paper No.176, Institute of Economic Research, Kobe university of Commerce, August 1999.

[6] ———: Variations of Quiet Accumulation Games. Working Paper No.177, Institute of Economic Research, Kobe university of Commerce, August 1999.