数理解析研究所講究録
1132 巻 2000 年 24-27

区間データの可能性AHPモデル

大阪府立大学工学部経営工学科 杉原 一臣
大阪府立大学工学部経営工学科 前田 豊
大阪府立大学工学部経営工学科 田中 英夫

Abstract In conventional AHP methods, it is assumed that the estimated weights are crisp values. In this paper the estimated weights are assumed to be interval values reflecting fuzziness in pair-wise comparisons. Two interval AHP models are proposed via crisp comparisons and interval comparisons, respectively. The proposed AHP models are based on possibility models.

Keyword: AHP, Interval Evaluaions

1 はじめに

人間の主観的であいまいな判断を用いて，各評価基準に対する重要度 (ウェイト) を求める方法に Satty の AHP[1]がある．この手法は一対比較による相対評価に基づいて評価を行い，各評価基準に対する重要度を固有ベクトル法 (EV:Eigen-Vector Method) を用いて決定するというものである．また統計的な観点から提案された手法としては，LS(Least Squares) 法 [2] や LLS 法 (Least Logarithmic Squares)[3]が提案されており，これら従来の AHP 手法では，データの不整合性に対してクリスプ値による最良なウェイト推定がなされている．

本論文においては，まずデータの不整合性を反映した区間推定ができる AHP モデルの定式化を提案する．これは田中らの [4] の可能性回帰モデルの定式化の概念を用いている．したがって，この定式化はデータを可能性という立場から取り扱うことができるモデル化になっている．クリスプデータによる区間 AHP モデルが提案されている．この定式化によって，クリスプ値を用いた従来の一対比較値の場合と比較し，提案手法の意義を述べる．本手法は，データの可能性を考慮し，それら全ての一対比較値を包含するような可能性区間 AHP モデルを線型計画問題として定式化している．次に人間の感覚を表現する手段として，一対比較値に区間判断を許した区間 AHP モデルを提案している．クリスプデータの場合と同様に，可能性の概念を用いて，この問題が線形計画問題として定式化されている．提案手法の利点は，データのあいまいさを反映して，区間値ウェイトが推定できることである．

2 クリスプデータによる可能性 AHP モデル

n 個の評価基準を $X_1, X_2, \ldots X_n$ とし，意思決定者に評価基準 X_i は X_j に比べてどの程度重要であるかを得ることができるとする．一般に，この重要度を a_{ij} とし，X_i が X_j より重要であれば，その程度を整数 $1, 3, 5, 7, 9$ から選ばれる．1 は同等を意味し，$k(3, \ldots, 9)$ は k 倍 X_j より X_i が好ましいことを表わしている．これに対して a_{ji} は X_j が X_i より重要である度合を表わし，これはその逆数 $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$ によって定義される．これらの a_{ij} を要素とする一対比較行列 A が得られる．この一対比較行列 A からウェイト推定を行う従来手法では，クリスプ値によりウェイトが表現されている．しかし一対比較評価に整合性がない場合は，求められたウェイトから一対比較行列を復元しても元の一対比較行列と一致しない．この評価の整合性の問題については，様々な観点からウェイト推定法が提案されている．特に最小二乗法によりウェイト推定を行う LS 法や対数誤差二乗を最小にする LLS 法など，一対比較の評価誤差を考慮したモデルの定式化

がなされている．しかしながら人間のあいまいさを誤差として捉えるよりはむしろ，データに潜在する可能性に注目したする方が一対比較評価の特性を生かせると考えられる．以上の動機付けにより，本研究では区間ウェイトを推定する区間 AHP モデルを提案する．

田中らの区間線形回帰分析では，データにはすべて可能性があると考えて，観測データ全てを包含するように推定区間回帰モデルを定式化している．そこでこの概念を用い，一対比較評価値すべてに可能性があると考えて AHP モデルを定式化する．まず区間ウェイトを $[\underline{w_i}, \overline{w_i}]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ と表わす．ここで，評価基準 i の評価基準 j に対する区間ウェイト比を W_{ij} で表わすと，W_{ij} は区間ウェイト $[\underline{w_i}, \overline{w_i}]$ を用いて次のように表される．

$$\forall i, j\,(i \neq j)\ \ W_{ij} = \left[\frac{\underline{w_i}}{\overline{w_j}}, \frac{\overline{w_i}}{\underline{w_j}}\right] \tag{1}$$

ここで，一対比較行列 $A = [a_{ij}]$ が与えられると，

$$\forall i, j\,(i \neq j) \quad a_{ij} \in W^*_{ij} \tag{2}$$

となるように，区間ウェイト $[\underline{w_i}, \overline{w_i}]$ を推定することがここでの問題である．

次に区間ウェイトに関する制約条件を導入する．固有ベクトル法では，最大固有値 λ_{max} に対応する固有ベクトルは基準化されている．これは一種の確率測度への変換であり，各評価基準に対する選好確率ともみなせる．そこで以下のような，前田ら [5] の区間確率密度関数の定義を用いて，区間ウェイトの制約条件を次のように設定する．

$$\sum_i \overline{w_i} - \max_j\left(\overline{w_j} - \underline{w_j}\right) \geq 1 \tag{3}$$

$$\sum_i \underline{w_i} + \max_j\left(\overline{w_j} - \underline{w_j}\right) \leq 1 \tag{4}$$

(3) 式は，$n-1$ 個のウェイトが区間の下限値を取ったときに $1 - \sum w_i$ が残る 1 つの区間の上限を下回らないことを意味する．同様に，(4) 式は $n-1$ 個のウェイトが区間の上限値を取ったときに $1 - \sum w_i$ が残る 1 つの区間の下限を上回らないことを意味する．すなわち，上記 2 式は冗長性に関する制約式である．なお，この式を変形すると，以下のように書き換えることができる．

$$\forall j \ \sum_{i \in \Omega - j} \overline{w_i} + \underline{w_j} \geq 1 \tag{5}$$

$$\forall j \ \sum_{i \in \Omega - j} \underline{w_i} + \overline{w_j} \leq 1 \tag{6}$$

制約条件 (5)(6) を用いて，(2) 式の問題を次の LP 問題に帰着させ，この定式化を PAHP と表す．

$$< PAHP >$$

$$\begin{array}{lll}
\min & \sum_i (\overline{w_i} - \underline{w_i}) & (7) \\
\textit{subject to} & & (8) \\
\forall\, i, j\,(i \neq j) & a_{ij}\underline{w_j} \leq \overline{w_i} & \\
\forall\, i, j\,(i \neq j) & a_{ij}\overline{w_j} \geq \underline{w_i} & \\
\forall j & \sum_{i \in \Omega - j} \overline{w_i} + \underline{w_j} \geq 1 & \\
\forall j & \sum_{i \in \Omega - j} \underline{w_i} + \overline{w_j} \leq 1 & \\
\forall i & \overline{w_i} \geq \underline{w_i} & \\
\forall i & \overline{w_i}, \underline{w_i} \geq 0 &
\end{array}$$

上記の PAHP の定式化に関して以下のことを注意しておく．w_i が一般的に正でかつ非零であることから，(2) 式を変形すると以下のようになり，この制約条件が PAHP に導入されている．

$$\forall i, j\,(i \neq j)\ \ a_{ij}\overline{w_j} \geq \underline{w_i},\ a_{ij}\underline{w_j} \leq \overline{w_i} \tag{9}$$

また，与えられたデータを包含するような可能性区間のうち各推定ウェイト幅 $(\overline{w_i} - \underline{w_i})$ の和を最小にするような $\underline{w_i}, \overline{w_i}$ を求めるために，PAHP の評価関数が考えられている．

(数値例)

可能性区間 AHP モデルを，クリスプな一対比較行列に用いた場合の例を以下に示す．整合性のない行列については，ウェイトが区間で得られる．また完全に整合性がある行列については，EV 法による結果と全く同じになることを以下の数値例によって示す．

(a) 整合性がない一対比較行列の場合：
次の一対比較行列 A が与えられ，これに対するEV法の結果とPAHP法との結果を表1に示す.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ \frac{1}{5} & 3 & 1 & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

表1:数値結果

Alt.	EV(C.I.=0.17)	PAHP
w_1	0.5736	$[0.6081, 0.6081]$
w_2	0.1495	$[0.0676, 0.2027]$
w_3	0.1863	$[0.1216, 0.2027]$
w_4	0.0906	$[0.0676, 0.1216]$

(b) 整合性がある一対比較行列の場合：
一対比較行列 A が与えられたとき，EV法とPAHP法との結果は同じであり，これを表2に示す.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 9 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

表2:数値結果

Alt.	EV	PAHP
w_1	0.5625	0.5625
w_2	0.1875	0.1875
w_3	0.1875	0.1875
w_4	0.0625	0.0625

3 区間データによる区間AHPモデル

ここでは，人間の直感的感覚を反映させるために，一対比較値を区間データとして取り扱うためのAHPモデルを定式化する．まず一対比較値の区間表現を

$$[A_{ij}] = \left[a_{ij}^L, a_{ij}^U\right]$$

と表し，区間 $[A_{ij}]$ と $[A_{ji}]$ との関係については，区間の両端が対応関係を持つように，

$$a_{ij}^L = \frac{1}{a_{ji}^U},\ a_{ij}^U = \frac{1}{a_{ji}^L} \tag{10}$$

と仮定する．ただし，行列の対角要素は $[A_{ii}] = [1,\ 1]$ とする．このようにして区間一対比較行列 $\tilde{A}$ を作成する．ここでPAHPと同様に「推定区間ウェイト比が，与えられた区間一対比較値を包含する」という観点で定式化を行う．すなわち，

$$W_{ij}^U \supseteq [A_{ij}] \tag{11}$$

となるような区間ウェイト $[\underline{w_i}, \overline{w_i}]$ を推定することが問題である．制約条件式(11)は以下のように書き換えることができる．

$$\begin{aligned} & W_{ij}^U \supseteq [A_{ij}] \quad \forall i, j\,(i \neq j) \\ & \leftrightarrow \frac{\underline{w_i}}{\overline{w_j}} \leq a_{ij}^L \leq a_{ij}^U \leq \frac{\overline{w_i}}{\underline{w_j}} && (12) \\ & \leftrightarrow a_{ij}^U \underline{w_j} \leq \overline{w_i}, && (13) \\ & \quad\ a_{ij}^L \overline{w_j} \geq \underline{w_i} \end{aligned}$$

以上から，区間一対比較値を用いた場合の可能性AHPモデルは下記のようになる．

$$< U - AHP >$$

$$\begin{aligned} & \qquad min && \sum_i (\overline{w_i} - \underline{w_i}) && (14) \\ & subject\ to && && (15) \\ & \forall\ i, j\,(i \neq j) && a_{ij}^U \underline{w_j} \leq \overline{w_i} \\ & \forall\ i, j\,(i \neq j) && a_{ij}^L \overline{w_j} \geq \underline{w_i} \\ & \forall j && \underline{w_j} \geq 1 - \sum_{i \in \Omega - \{j\}} \overline{w_i} \\ & \forall j && \overline{w_j} \leq 1 - \sum_{i \in \Omega - \{j\}} \underline{w_i} \\ & \forall i && \underline{w_i} \leq \overline{w_i} \\ & \forall i && \underline{w_i}, \overline{w_i} \geq 0 \end{aligned}$$

(11)式の意味から，このモデルは上界近似モデルと呼ばれる．また(11)式の逆である

$$W_{ij}^L \subseteq [A_{ij}] \tag{16}$$

に基づくモデルも定式化でき，これは下界近似モデルと呼ばれる(図1参照)．すなわち，上界

と下界から区間一対比較行列を近似することができる．これはラフ集合 [6] の近似の概念に類似している．

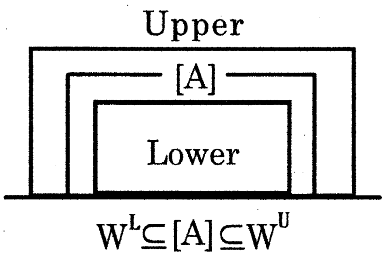

図 1: 区間一対比較値の上界・下界近似

4 おわりに

本研究では，区間ウェイトを用いて一対比較値の不整合性を区間の幅として捉えるモデルを提案した．いいかえると，人間の判断の持つあいまいさを的確に表現するために，一対比較に対して区間表現を許すモデルを提案したといえる．区間一対比較値を取り扱うので，下界近似モデルを定式化できる．すなわち，上界と下界との 2 つの AHP モデルによってあいまいな現象を表現することができる．定式化は LP に帰着させているが，誤差二乗最小という評価関数を用いると，定式化は QP になる．

参考文献

[1] T.L. Satty : *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, 1980

[2] K.O.Cogger and P.L.Yu : Eigen weight vectors and least distance approximation for revealed preference in pairwise weight ration, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol.46, 483-491, 1985

[3] G.Crawford and C.A. Williams : A note on the analysis of subjective judement matrices, *Journal of Mathmatical Psychology*, Vol.29, 387-405, 1985

[4] H.Tanaka and P.Guo : Possibilistic Data Analysis for Operations Research, Physica-Verlag, A Springer-Verlag Company, Hidelberg, 1999

[5] 前田 豊, 田中 英夫: 区間密度関数による非加法的確率測度, 日本ファジィ学会誌, Vol.11, No.4, 667-676, 1999

[6] Z.Pawlak : Rough Sets - Theoretical Aspects of Reasoning about Data -, *Kluwer Academic Publishers*, 1991