数理解析研究所講究録
1132 巻 2000 年 28-36

MTP_2 の一般化と部分観測可能なマルコフ過程について

九州大学経済学部　　中井　達（Tōru Nakai）

1　はじめに

ここでは、一般化した MTP_2 (multivariate total positivity of order two) について議論し、部分観測可能なマルコフ過程における多段決定モデルに適応する。この性質は、MTP_2 として知られている性質の一般化である。Nakai[5] において、 MTP_2 を用いた仮定の下で、部分観測可能なマルコフ連鎖の性質を議論し、Nakai[6] で一般化を行っている。一方、 FKG 不等式は MTP_2 のときに成り立つ性質であり、Fortuin et al. [1], Kemperman [2] および Preston [7] では、確率測度が絶対連続の場合に議論している。

ここでの議論において、部分観測可能なマルコフ過程の状態は、完備で可分な全順序が定義された距離空間に含まれているものとする。また、状態に関する情報は、 すべて状態空間上の確率測度で表されるとする。ここでは、情報は多変量確率変数を通して得られるものとし、一般化した MTP_2 を用いた仮定の下で議論することにする。

第２節では、一般化した MTP_2 を定義し、確率測度のあいだにこの性質を用いて順序を定義する。また、この不等式のいくつかの基本的な性質を求める。部分観測可能なマルコフ過程において、学習プロセスとしてベイズの定理を用いていることから、非減少関数の期待値に関して順序関係を保存する性質を持つことがわかる。第３節では部分観測可能なマルコフ過程を導入し、第４節では、この確率過程における逐次決定問題を議論するために、事前情報と事後情報の間の関係についての性質を求める。最後に、例として簡単な最適停止問題に触れる。

2　一般化した MTP_2 とその性質

$\mathcal{S}$ を完備で可分な全順序が定義された距離空間とし、この可測空間で定義されている全順序を $\leq$ で表す。$\mathcal{B}$ を $\mathcal{S}$ の Borel 集合とし、$\boldsymbol{P}(\mathcal{S})$ を可測空間 $(\mathcal{S},\mathcal{B})$ 上の確率測度の集合とすれば、

$$\boldsymbol{P}(\mathcal{S})=\left\{\mu \,\middle|\, \int_{\mathcal{S}}\mu(ds)=1, \mu(B)\geq 0\,(B\in\mathcal{B})\right\} \tag{1}$$

である。これらの確率測度のあいだに、定義 1 によって順序を定義する。ここでは、確率測度 μ が絶対連続であるとは仮定しない。

定義 1 μ と ν を $\boldsymbol{P}(\mathcal{S})$ に含まれる２つの確率測度とする。背反な２つの *Borel* 集合 A と B $(A,B\in\mathcal{B})$ に対して、$A\prec B$ ならば

$$\mu(A)\nu(B)\leq\mu(B)\nu(A),\ \ i.e., \begin{vmatrix}\mu(B) & \nu(B)\\ \mu(A) & \nu(A)\end{vmatrix}\geq 0, \tag{2}$$

であり、少なくとも1つの A と B の組み合わせに対して、$\boldsymbol{\mu}(B)\boldsymbol{\nu}(A) > \boldsymbol{\mu}(A)\boldsymbol{\nu}(B)$ となるとき、$\boldsymbol{\mu} \succ \boldsymbol{\nu}$ とする。もし、任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して、確率1で $\boldsymbol{\mu}(A) = \boldsymbol{\nu}(A)$ ならば $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu}$ とする。もし、$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu}$ または $\boldsymbol{\mu} \succ \boldsymbol{\nu}$ のとき $\boldsymbol{\mu} \succeq \boldsymbol{\nu}$ とする。

ただし、$\mathcal{S}$ に含まれる任意の2つの *Borel* 集合 A と B に対して、$A \prec B$ とは $a \leq b$ が任意の $a \in A$ と $b \in B$ に対して成り立つときをいう。

確率測度 $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\nu}$ が絶対連続で、確率密度 $\mu(s)$ と $\nu(s)$ を持つとき、(2) 式は $\mu(t)\nu(s) \geq \mu(s)\nu(t)$ $(s, t \in \mathcal{S}, s < t)$ に等しい。これは、TP_2 (total positivity of order two) に等しい。$\mathcal{S}$ で定義された関数 $u(\boldsymbol{\mu})$ が、任意の確率測度 $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\nu}$ $(\boldsymbol{\mu} \succeq \boldsymbol{\nu})$ に対して $u(\boldsymbol{\mu}) \geq u(\boldsymbol{\nu})$ のとき、この関数を $\boldsymbol{\mu}$ 非減少関数という。

部分観測可能なマルコフ過程における逐次決定問題を考える上で、非減少関数の期待値に関する順序の保存性を示すことが必要である。そのために、一般化した MTP_2 に関する命題 1 と 2 を示す。

いま、d を $\mathcal{S}$ で定義された距離とする。任意の部分集合 $A \subset \mathcal{S}$ に対して、$d(A)$ を

$$d(A) = \sup_{a_1, a_2 \in A} d(a_1, a_2)$$

で定義する。

つぎに、$\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\nu}$ を $\boldsymbol{P}(\mathcal{S})$ に含まれる2つの確率測度で、$\boldsymbol{\mu} \succ \boldsymbol{\nu}$ とする。これらの $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\nu}$ に対して、集合 $\mathcal{B}$ の部分集合 S_ε を

$$S_\varepsilon = \{A \in \mathcal{B} | \boldsymbol{\mu}(A) \geq \boldsymbol{\nu}(A), d(A) < \varepsilon, A \text{は連結}\}$$

で定義する $(\varepsilon > 0)$。定義から、これらの集合は $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\nu}$ に依存するが、便宜上 $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\nu}$ を記号から省くことにする。

補題 1 $A, B \in S_\varepsilon$ ならば $A \cap B \in S_\varepsilon$ および $\boldsymbol{\mu}(A \cup B) \geq \boldsymbol{\nu}(A \cup B)$ である。

集合 S_ε に対して、$u_\varepsilon = \inf_{s \in S_\varepsilon} s$ とし、集合族 E_ε を

$$E_\varepsilon = \{A | \{u_\varepsilon\} \prec A, \boldsymbol{\mu}(A) = \boldsymbol{\nu}(A) = 0, A \in \mathcal{B}\}$$

とする。つぎに、$\tilde{E}_\varepsilon$ を $\tilde{E}_\varepsilon = \cup_{A \in E_\varepsilon} A$ とし、G_ε を $G_\varepsilon = (\cup_{A \in S_\varepsilon} A) \cup \tilde{E}_\varepsilon$ とする。

補題 2 集合 $G_\varepsilon = (\cup_{A \in S_\varepsilon} A) \cup \tilde{E}_\varepsilon$ が連結集合である。

補題 3 集合 G を $G = \cap_{\varepsilon > 0} G_\varepsilon$ とするとき、$A \subset G$ となる任意の集合 $A \in \mathcal{B}$ に対して、$\boldsymbol{\mu}(A) \geq \boldsymbol{\nu}(A)$ である。

補題 4 $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\nu}$ を $\boldsymbol{P}(\mathcal{S})$ に含まれる2つの確率測度で、$\boldsymbol{\mu} \succeq \boldsymbol{\nu}$ とする。このとき、$(\mathcal{S} \times \mathcal{S}, \mathcal{B} \times \mathcal{B})$ での確率測度 δ で

$$\delta(A \times \mathcal{S}) = \boldsymbol{\mu}(A) \quad \textit{for all } A \in \mathcal{B} \tag{3}$$
$$\delta(\mathcal{S} \times B) = \boldsymbol{\nu}(B) \quad \textit{for all } B \in \mathcal{B}, \tag{4}$$

かつ

$$\delta(\{(s,t) | (s,t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}, s \geq t\}) = 1 \tag{5}$$

となるものが存在する。

ただし、H を $H = \mathcal{S} \cap G^c$, すなわち $G \cup H = \mathcal{S}$ とする。

証明. (2) 式を満たす2つの確率測度 μ と ν に対して、上記で考えた集合 G と H を考える。ここでは、直積測度空間 $(\mathcal{S}\times\mathcal{S},\mathcal{B}\times\mathcal{B})$ を考えるので、すべての矩形集合 $A\times B\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ に対する確率測度 δ について議論する。まず、$\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ での確率測度 δ を

$$\begin{aligned}\delta(A\times B) &= \nu(G\cap(A\cap B))+\mu(L\cap(A\cap B))\\ &\quad+\frac{(\mu(G\cap A)-\nu(G\cap A))(\nu(L\cap B)-\mu(L\cap B))}{\mu(L)-\nu(L)}\end{aligned}$$

と定義する。(3) 式、(4) 式および、and (5) 式が成り立つことを示すことは簡単である。例えば、$\mu(G)-\nu(G)=\mu(L)-\nu(L)$ だから

$$\begin{aligned}\delta(\mathcal{S}\times B) &= \nu(G\cap B)+\mu(L\cap B)+\frac{(\mu(G)-\nu(G))(\nu(L\cap B)-\mu(L\cap B))}{\mu(L)-\nu(L)}\\ &= \nu(G\cap B)+\nu(L\cap B)=\nu(B)\end{aligned}$$

となり、(4) 式が示される。もし、$A\times B\subset\{(s,t)|s<t\}$ ならば、測度 δ の定義から、簡単に $\delta(A\times B)=0$ を示すことができる。□

命題 1 $P(\mathcal{S})$ に含まれる2つの確率測度 μ と ν で $\mu\succeq\nu$ とする。このとき、$h:S\to\mathcal{R}_+$ が有界な $\mathcal{B}$-可測で非減少関数とすれば

$$\int_{\mathcal{S}}h(s)d\mu(s)\geq\int_{\mathcal{S}}h(s)d\nu(s)$$

である。

つぎに、補題 4 と命題 1 を全順序が定義された完備距離空間の直積空間で、自然な形で半順序が定義されている場合に拡張する。

いま、

$$\mathcal{S}^n=\prod_{i=1}^n\mathcal{S},\qquad \mathcal{B}^n=\prod_{i=1}^n\mathcal{B},$$

とする。ただし、$\mathcal{S}^1=\mathcal{S},\mathcal{B}^1=\mathcal{B}$ である。つぎに μ_n を直積可測空間 $(\mathcal{S}^n,\mathcal{B}^n)$ での確率測度とする。ここで $P(\mathcal{S}^n)$ を $(\mathcal{S}^n,\mathcal{B}^n)$ での確率測度の集合とすれば

$$P(\mathcal{S}^n)=\left\{\mu_n\left|\int_{\mathcal{S}^n}\mu_n(ds^n)=1,\mu_n(B^n)\geq 0\,(B^n\in\mathcal{B}^n)\right.\right\}\tag{6}$$

となる。$(\mathcal{S}^n,\mathcal{B}^n)$ での確率測度の間に定義 1 を一般化した順序を定義する。

定義 2 $\mathcal{S}^n$ の2つの集合 $\boldsymbol{A}^n=\prod_{i=1}^n A_i$ と $\boldsymbol{B}^n=\prod_{i=1}^n B_i$ で $A_i,B_i\subset\mathcal{S}$ かつ $A_i\cap B_i=\emptyset$ とする $(i=1,\cdots,n)$ 。いま、$A_i\prec B_i$ ならば $A_i\vee B_i=B_i$ および $A_i\wedge B_i=A_i$ とする。記号 $\vee$ と $\wedge$ を $\boldsymbol{A}^n\vee\boldsymbol{B}^n=\prod_{i=1}^n A_i\vee B_i,\boldsymbol{A}^n\wedge\boldsymbol{B}^n=\prod_{i=1}^n A_i\wedge B_i$ で定義する。

定義 3 $(\mathcal{S}^n,\mathcal{B}^n)$ での2つの確率測度を μ_n および ν_n とする。たがいに背反な *Borel* 集合 $\boldsymbol{A}^n=\prod_{i=1}^n A_i$ と $\boldsymbol{B}^n=\prod_{i=1}^n B_i$ $(\boldsymbol{A}^n,\boldsymbol{B}^n\in\mathcal{B}^n,A_i,B_i\subset\mathcal{S},A_i\cap B_i=\emptyset,i=1,\cdots,n)$ に対して、

$$\mu_n(\boldsymbol{A}^n\vee\boldsymbol{B}^n)\nu_n(\boldsymbol{A}^n\wedge\boldsymbol{B}^n)-\mu_n(\boldsymbol{A}^n)\nu_n(\boldsymbol{B}^n)\geq 0\tag{7}$$

であり、少なくとも1つの組み合わせ A^n と B^n について $\mu_n(\boldsymbol{A}^n\vee\boldsymbol{B}^n)\nu_n(\boldsymbol{A}^n\wedge\boldsymbol{B}^n)>\mu_n(\boldsymbol{A}^n)\nu_n(\boldsymbol{B}^n)$ のとき $\mu_n\succ\nu_n$ であるとする。また、任意の $A^n\in\mathcal{B}^n$ に対して、確率1で *If* $\mu_n(A^n)=\nu_n(A^n)$ のとき $\mu_n=\nu_n$ とする。$\mu_n=\nu_n$ または $\mu_n\succ\nu_n$ ならば $\mu_n\succeq\nu_n$ である。

注 1 空間 $\mathcal{S}$ での確率測度 $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\nu}$ に対して、$A \prec B$ であるような背反な*Borel* 集合 A と B $(A, B \in \mathcal{B})$ が *(2)* 式を満たすとする。もし、$\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\nu}$ が絶対連続で確率密度 $\mu(s)$ および $\nu(s)$ を持てば、*(2)* 式は任意の $s, t \in \mathcal{S}$ に対して$\mu(s \vee t)\nu(s \wedge t) \geq \mu(s)\nu(t)$ と同値である。この性質は TP_2 として知られているもので、*(2)* 式は、この性質の一般化といえる。

$(\mathcal{S}^n, \mathcal{B}^n)$ 上の確率測度の間に、*(7)* 式を用いて順序を定義する。推移法則と、確率変数 X_s が絶対連続で確率密度を持てば、この不等式は MTP_2 と同値である。このことから、*(7)* 式で定義される順序は MTP_2 の一般化であり、一般化した MTP_2 と呼ぶことにする。後で示す命題 *2* の *(20)* 式は *FKG* 不等式と呼ばれ、この性質は *[1],[2],[7]* などで示された性質の一般化といえる。

補題 5 $\boldsymbol{\mu}_n$ と $\boldsymbol{\nu}_n$ を $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}^n)$ 上の２つの確率測度で、$\boldsymbol{\mu}_n \succeq \boldsymbol{\nu}_n$ とする。つぎに、$\boldsymbol{\mu}_{n-1}, \boldsymbol{\nu}_{n-1}$ を $\boldsymbol{\mu}_n$ と $\boldsymbol{\nu}_n$ の周辺測度とすれば、$\boldsymbol{\mu}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1}) = \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \times \mathcal{S})$ および $\boldsymbol{\nu}_{n-1}(\boldsymbol{B}^{n-1}) = \boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \times \mathcal{S})$ $(\boldsymbol{A}^{n-1} \times \mathcal{S}, \boldsymbol{B}^{n-1} \times \mathcal{S} \in \mathcal{S}^{n-1} \times \mathcal{S} = \mathcal{S}^n)$ である。このとき

$$\boldsymbol{\mu}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1} \vee \boldsymbol{B}^{n-1})\boldsymbol{\nu}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1} \wedge \boldsymbol{B}^{n-1}) - \boldsymbol{\mu}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1})\boldsymbol{\nu}_{n-1}(\boldsymbol{B}^{n-1}) \geq 0$$

である。

証明. はじめに、直積空間 $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ を、$D = \{(s,t)|s < t, s, t \in \mathcal{S}\}, E = \{(s,t)|s = t, s, t \in \mathcal{S}\}$ と $F = \{(s,t)|s > t, s, t \in \mathcal{S}\}$ の３つの領域に分割する。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1})\boldsymbol{\nu}_{n-1}(\boldsymbol{B}^{n-1}) &= \int_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}} \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1}, ds)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1}, dt) \\
&= \int_D \{\boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1}, ds)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1}, dt) + \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1}, dt)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1}, ds)\} \\
&\quad + \int_E \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1}, ds)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1}, dt)
\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\mu}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1} \vee \boldsymbol{B}^{n-1})\boldsymbol{\nu}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1} \wedge \boldsymbol{B}^{n-1}) \\
&\quad = \int_D \{\boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \vee \boldsymbol{B}^{n-1}, ds)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \wedge \boldsymbol{B}^{n-1}, dt) \\
&\qquad + \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \vee \boldsymbol{B}^{n-1}, dt)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \wedge \boldsymbol{B}^{n-1}, ds)\} \\
&\qquad + \int_E \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \vee \boldsymbol{B}^{n-1}, ds)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \wedge \boldsymbol{B}^{n-1}, dt)
\end{aligned}$$

だから、領域 D と E でこららの値を比較すればこの補題は示される。□

帰納法を用いて次の性質が示される。

補題 6 $\boldsymbol{\mu}_n$ と $\boldsymbol{\nu}_n$ を $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}^n)$ 上の２つの確率測度で、$\boldsymbol{\mu}_n \succeq \boldsymbol{\nu}_n$ とする。このとき、$(\mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n, \mathcal{B}^n \times \mathcal{B}^n)$ 上の確率測度 δ で

$$\delta(\boldsymbol{A}^n \times \mathcal{S}^n) = \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^n) \qquad \boldsymbol{A}^n \in \mathcal{B}^n \tag{8}$$

$$\delta(\mathcal{S}^n \times \boldsymbol{B}^n) = \boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^n) \qquad \boldsymbol{B}^n \in \mathcal{B}^n, \tag{9}$$

および

$$\delta(\{(\boldsymbol{s}^n, \boldsymbol{t}^n)|(\boldsymbol{s}^n, \boldsymbol{t}^n) \in \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n, \boldsymbol{s}^n \succeq \boldsymbol{t}^n\}) = 1 \tag{10}$$

となるものが存在する。

証明. μ_n, ν_n の周辺測度 μ_{n-1}, ν_{n-1} を $\mu_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1}) = \mu_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \times \mathcal{S}), \nu_{n-1}(\boldsymbol{B}^{n-1}) = \nu_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \times \mathcal{S})$ $(\boldsymbol{A}^{n-1} \times \mathcal{S}, \boldsymbol{B}^{n-1} \times \mathcal{S} \in \mathcal{S}^{n-1} \times \mathcal{S} = \mathcal{S}^n)$ とする。補題 5 より、帰納法の仮定から $(\mathcal{S}^{n-1}, \mathcal{B}^{n-1})$ 上の確率測度 μ_{n-1}, ν_{n-1} に対して

$$\mathcal{S}^{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} \mathcal{S}, \qquad \mathcal{B}^{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} \mathcal{B},$$

とすれば、$(\mathcal{S}^{n-1} \times \mathcal{S}^{n-1}, \mathcal{B}^{n-1} \times \mathcal{B}^{n-1})$ 上の確率測度 $\tilde{\delta}$ で

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}(\boldsymbol{A}^{n-1} \times \mathcal{S}^{n-1}) &= \mu_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1}) \qquad \boldsymbol{A}^{n-1} \in \mathcal{B}^{n-1} && (11) \\ \tilde{\delta}(\mathcal{S}^{n-1} \times \boldsymbol{B}^{n-1}) &= \nu_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1}) \qquad \boldsymbol{B}^{n-1} \in \mathcal{B}^{n-1}, && (12) \end{aligned}$$

および

$$\tilde{\delta}(\{(\boldsymbol{s}^{n-1}, \boldsymbol{t}^{n-1}) | (\boldsymbol{s}^{n-1}, \boldsymbol{t}^{n-1}) \in \mathcal{S}^{n-1} \times \mathcal{S}^{n-1}, \boldsymbol{s}^{n-1} \succ \boldsymbol{t}^{n-1}\}) = 1 \tag{13}$$

となるものが存在する。

2つの部分集合 $\boldsymbol{A}^{n-1}$ と $\boldsymbol{B}^{n-1}$ で $\boldsymbol{A}^{n-1} \prec \boldsymbol{B}^{n-1}$ $(\boldsymbol{A}^{n-1}, \boldsymbol{B}^{n-1} \in \mathcal{B}^{n-1}, \boldsymbol{A}^{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} A_i, \boldsymbol{B}^{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} B_i)$ となるものを考える。$\mu_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1}) \neq 0, \mu_{n-1}(\boldsymbol{B}^{n-1}) \neq 0$ のとき、任意の $A, B \in \mathcal{B}$ に対して

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\boldsymbol{A}^{n-1}} &= \frac{\mu_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \times A)}{\mu_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1})}, && (14) \\ \hat{\nu}_{\boldsymbol{B}^{n-1}} &= \frac{\nu_n(\boldsymbol{B}^{n-1} \times B)}{\nu_{n-1}(\boldsymbol{B}^{n-1})} && (15) \end{aligned}$$

とおく。このとき、

$$\begin{aligned} \mu_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \times A) &= \hat{\mu}_{\boldsymbol{A}^{n-1}}(A)\mu_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1}), && (16) \\ \nu_n(\boldsymbol{B}^{n-1} \times B) &= \hat{\nu}_{\boldsymbol{B}^{n-1}}(B)\nu_{n-1}(\boldsymbol{B}^{n-1}), && (17) \end{aligned}$$

であり、$\hat{\mu}_{\boldsymbol{A}^{n-1}}, \hat{\nu}_{\boldsymbol{B}^{n-1}}$ は、$(\mathcal{S}^1, \mathcal{B}^1) = (\mathcal{S}, \mathcal{B})$ 上の確率測度となる。

ここで、$\hat{\mu}_{\boldsymbol{A}^{n-1}} \succeq \hat{\nu}_{\boldsymbol{B}^{n-1}}$ となるから補題 4 より、$(\mathcal{S} \times \mathcal{S}, \mathcal{B} \times \mathcal{B})$ 上の確率測度 $\hat{\delta}_{\boldsymbol{A}^{n-1}, \boldsymbol{B}^{n-1}}$ で

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{\boldsymbol{A}^{n-1}, \boldsymbol{B}^{n-1}}(A \times \mathcal{S}) &= \hat{\mu}_{\boldsymbol{A}^{n-1}}(A) \qquad A \in \mathcal{B} && (18) \\ \hat{\delta}_{\boldsymbol{A}^{n-1}, \boldsymbol{B}^{n-1}}(\mathcal{S} \times B) &= \hat{\nu}_{\boldsymbol{B}^{n-1}}(B) \qquad B \in \mathcal{B}, && (19) \end{aligned}$$

および

$$\hat{\delta}_{\boldsymbol{A}^{n-1}, \boldsymbol{B}^{n-1}}(\{(s,t) | (s,t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}, s \geq t\}) = 1$$

となるものが存在する。

つぎに、$(\mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n, \mathcal{B}^n \times \mathcal{B}^n)$ 上の確率測度 δ を

$$\delta((\boldsymbol{A}^{n-1}, A) \times (\boldsymbol{B}^{n-1}, B)) = \tilde{\delta}(\boldsymbol{A}^{n-1} \times \boldsymbol{B}^{n-1})\hat{\delta}_{\boldsymbol{A}^{n-1}, \boldsymbol{B}^{n-1}}(A \times B)$$

とする。この δ がこの補題の性質を満たすことは簡単にわかる。□

命題 1 と同じように、非減少関数の期待値に関する順序関係を保存する性質を求めることができる。証明は命題 1 を示すのに用いた方法と同様にして求められるので、ここでは簡単に説明する。はじめに $\mathcal{R}_+^k$ での関数の性質を定義する。

定義 4 k-次関数 $\varphi: \mathcal{R}_+^k \to \mathcal{R}_+$ が $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$ のとき $\varphi(\boldsymbol{x}) \leq \varphi(\boldsymbol{y})$ $(\varphi(\boldsymbol{x}) \geq \varphi(\boldsymbol{y}))$ であれば、この関数を $\boldsymbol{x}$ に関する非減少関数 (非増加関数) という。

命題 2 $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}^n)$ に含まれる2つの確率測度 $\boldsymbol{\mu}_n$ と $\boldsymbol{\nu}_n$ で、$\boldsymbol{\mu}_n \succeq \boldsymbol{\nu}_n$ とする。もし、$h: \mathcal{S}^n \to \mathcal{R}_+$ が $\mathcal{B}^n$ 上の有界な非減少関数であれば

$$\int_{\mathcal{S}^n} h(\boldsymbol{s}) d\boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{s}) \geq \int_{\mathcal{S}^n} h(\boldsymbol{s}) d\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{s}) \tag{20}$$

である。

3 部分観測可能なマルコフ過程

部分観測可能なマルコフ過程で、その状態を直接には知ることは出来ないとする。ここで、$\mathcal{S}$ を完備で可分な全順序が定義された距離空間とし、この確率過程の状態を表す。この可測空間で定義されている全順序を $\leq$ で表す。この状態空間 $\mathcal{S}$ に対して、$\mathcal{B}$ を $\mathcal{S}$ の Borel 集合とする。さらに、$P(\cdot|s)$ $(s \in \mathcal{S})$ を推移法則を表すとし、状態空間 $\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ への推移を表す。次に、可測集合 $B \in \mathcal{B}$ に対して

$$P(B|s) = \int_B \boldsymbol{p}(dt|s),$$

とする。ここで、任意の状態 $s \in \mathcal{S}$ に対して、$\boldsymbol{p}(\cdot|s)$ は $\mathcal{S}$ 上の確率測度である。$P(B|\cdot)$ が絶対連続の場合は、その確率密度関数を $p(\cdot|s)$ とする。

この確率過程の状態 s に対して、平均が有限で非負の k-次の多変量確率変数 $\boldsymbol{X}_s$ を仮定し、観測過程を表すものとする。この確率変数の確率分布を、任意の $s \in \mathcal{S}$ と Borel 集合 $C \subset \mathcal{R}_+^k = (0, \infty)^k$ に対して

$$\Pr(\boldsymbol{X}_s \in C) = \int_C f(d\boldsymbol{x}|s), \tag{21}$$

とする。もし、確率密度 $f(\boldsymbol{x}|s)$ が存在すれば$\Pr(\boldsymbol{X}_s \in C) = \int_C f(\boldsymbol{x}|s) d\boldsymbol{x}$ である。これらの確率変数から得られる標本を用いて、この確率過程の状態に関する情報を得る。

確率過程の状態に関する情報は、すべて $\mathcal{S}$ 上の確率測度で表され、情報全体の集合は第2節で定義した $\boldsymbol{P}(\mathcal{S})$ である。これらの確率測度のあいだに定義 1 を用いて順序を定義する。

任意の標本値 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ $(\in \mathcal{R}_+^k)$ と事前情報 μ に対して、事後情報が存在し、ベイズの定理にしたがって学習する。事前情報が μ のとき、この確率過程は推移法則 $P(\cdot|\cdot)$ にしたがってまず推移する。任意の可測集合 $B \in \mathcal{B}$ に対して、確率測度 $\overline{\mu}$ は次のようになる。

$$\overline{\mu}(B) = \int_{\mathcal{S}} P(B|s)\mu(ds). \tag{22}$$

標本値 $\boldsymbol{x}$ を観測した後で、ベイズの定理にしたがって情報を $\overline{\mu(\boldsymbol{x})}$ と改良する。任意の可測集合 $B \in \mathcal{B}$ に対して、事後情報は

$$\overline{\mu(\boldsymbol{x})}(B) = \frac{\int_B f(\boldsymbol{x}|t)\overline{\mu}(dt)}{\int_{\mathcal{S}} f(\boldsymbol{x}|t)\overline{\mu}(dt)}, \tag{23}$$

となる。ただし、$\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}_+^k$および $\mu \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S})$ とする。

4 ベイズ学習プロセスへの応用

いま、

$$\mathcal{R}_+^k = \prod_{i=1}^{k} \mathcal{R}_+, \qquad \mathcal{X}^k = \prod_{i=1}^{k} \mathcal{X}$$

とし $\mathcal{R}_+^1 = \mathcal{R}_+, \mathcal{X}^1 = \mathcal{X}$ とおく。ここで、$\mathcal{X}$ は $\mathcal{R}_+$ の Borel 集合とする。任意の状態 $s \in \mathcal{S}$ に対して、$\boldsymbol{F}_k(\cdot|s)$ を $(\mathcal{R}_+^k, \mathcal{X}^k)$ 上の確率測度とする。

仮定 1 たがいに素な2つの *Borel* 集合を $\boldsymbol{X}^k = \prod_{i=1}^k X_i$ および $\boldsymbol{Y}^k = \prod_{i=1}^k Y_i$ $(\boldsymbol{X}^k, \boldsymbol{Y}^k \in \mathcal{X}^n, X_i, Y_i \subset \mathcal{R}_+, X_i \cap Y_i = \emptyset, i = 1, \cdots, k)$ とする。任意の状態 $s, t \in \mathcal{S}$ に対して

$$\boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{X}^k \vee \boldsymbol{Y}^k | s \vee t)\boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{X}^k \wedge \boldsymbol{Y}^k | s \wedge t) \geq \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{X}^k|s)\boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{Y}^k|t). \tag{24}$$

である。

仮定 2 任意の状態 $s \in \mathcal{S}$ に対して、推移法則を $\boldsymbol{P}(\cdot|s)(s \in \mathcal{S})$ とする。状態 s および t が $s \prec t$ のとき、

$$\boldsymbol{P}(A|s)\boldsymbol{P}(B|t) \leq \boldsymbol{P}(B|s)\boldsymbol{P}(A|s) \tag{25}$$

である。

注 2 確率測度と推移法則がともに絶対連続であれば、*(24)* 式と *(25)* 式は

$$f(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}|s \wedge t)f(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}|s \vee t) \geq f(\boldsymbol{y}|s)f(\boldsymbol{x}|t), \tag{26}$$

$$p(u|s)p(v|t) \geq p(v|s)p(u|t) \tag{27}$$

と同値である。ただし、$u \prec v$ $(u, v \in \mathcal{S})$ とする。*(26)* 式は MTP_2 であり、TP_2 の一般化になっている。この過程の状態が経済状態を表すと考えれば、それが観測値に影響することになる。一般的にはこれらの値を直接知らないが、それについての部分情報を持っている。仮定 *1* から、s の値が大きくなるにつれ状態が良くなると考えることができる。

仮定 1 と 2 のもとで、(22) 式と (23) 式で定義された事後情報と事前情報のあいだの関係について考える。情報が複数の独立な確率変数から得られる場合については、Nakai [4] で考察されている。はじめに、k-次の標本空間順序を入れる。

定義 5 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_k)$ を $\mathcal{R}_+^k$ からの2つの標本とする。$x_i \leq y_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ のとき、$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{y}$ より小さいといい、$\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$ と表す。

補題 7 任意の $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu} \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S})$ に対して、$\boldsymbol{\mu} \succeq \boldsymbol{\nu}$ ならば $\overline{\boldsymbol{\mu}} \succeq \overline{\boldsymbol{\nu}}$ である。

定理 1 任意の $\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S})$ に対して、$\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$ ならば $\overline{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x})} \succeq \overline{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{y})}$ である。

定理 2 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}_+^k$ に対して、$\boldsymbol{\mu} \succeq \boldsymbol{\nu}$ ならば $\overline{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x})} \succeq \overline{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})}$ である。

これらの性質は Nakai [3, 4, 5] で用いられた方法と同じようにして求めることができるので、ここでは証明を省略する。

注 3 確率変数が絶対連続で密度関数を持つとき、事後情報もまた MTP_2 である。すなわち、任意の標本 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対して、

$$\overline{\mu(\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y})}(s\vee t)\,\overline{\mu(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})}(s\wedge t)\geq\overline{\mu(\boldsymbol{y})}(s)\,\overline{\mu(\boldsymbol{x})}(t)$$

である。この性質は、*Nakai [4, 5]* で用いたものと同様の方法で示すことができる。

これらの性質は、事前情報と事後情報のあいだの関係に関するものであり、部分観測可能なマルコフ過程での逐次決定問題を解析する上で必要な性質である。事後情報に関する条件付き期待値に関して、命題 1 より、$\mathcal{S}=\mathcal{R}_+$ とおくことによって次の性質が得られる。

系 1 $\boldsymbol{\mu}_k$ と $\boldsymbol{\nu}_k$ を $(\mathcal{R}_+^k,\mathcal{X}^k)$ 上の２つの確率測度とする。$\boldsymbol{C}^k=\prod_{i=1}^k C_i$ と $\boldsymbol{D}^k=\prod_{i=1}^k D_i$ を背反な２つの *Borel* 集合とし $(\boldsymbol{C}^k,\boldsymbol{D}^k\in\mathcal{X}^k, C_i, D_i\subset\mathcal{R}_+, C_i\cap D_i=\emptyset, i=1,\cdots,k)$、

$$\boldsymbol{\mu}_k(\boldsymbol{C}^k\vee\boldsymbol{D}^k)\boldsymbol{\nu}_k(\boldsymbol{C}^k\wedge\boldsymbol{D}^k)-\boldsymbol{\mu}_k(\boldsymbol{C}^k)\boldsymbol{\nu}_k(\boldsymbol{D}^k)\geq 0$$

とする。もし、$h:\mathcal{R}_+^k\to\mathcal{R}_+$ が $\mathcal{X}^k$ の有界な非減少可測関数ならば

$$\int_{\mathcal{R}_+^k}h(x)d\boldsymbol{\mu}_k(x)\geq\int_{\mathcal{R}_+^k}h(x)d\boldsymbol{\nu}_k(x)$$

である。

もし、$\varphi(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}$ の非減少関数であれば、仮定 1 と系 1 より $\Phi(s)=\mathrm{E}[\varphi(\boldsymbol{X}_s)]$ が s の非減少関数であることがわかる。このことから、系 1 より次の補題が得られる。

補題 8 $\boldsymbol{\mu}\succeq\boldsymbol{\nu}\,(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}\in\boldsymbol{P}(\mathcal{S}))$ ならば

$$\mathrm{E}_{\boldsymbol{\mu}}[\varphi(\boldsymbol{X})]=\int_{\mathcal{S}}\{\int_{\mathcal{R}_+^k}\varphi(\boldsymbol{x})f(d\boldsymbol{x}|s)\}\boldsymbol{\mu}(ds)\geq\int_{\mathcal{S}}\{\int_{\mathcal{R}_+^k}\varphi(\boldsymbol{x})f(d\boldsymbol{x}|s)\}\boldsymbol{\nu}(ds)=\mathrm{E}_{\boldsymbol{\nu}}[\varphi(\boldsymbol{X})]$$

が $\boldsymbol{x}$ の任意の非減少関数 $\varphi(\cdot)$ について成り立つ。

最後に、ここで考えた部分観測可能なマルコフ過程での簡単な最適停止問題を考える。n 個の k-次元実確率変数が１度に１つずつ順番に現れる。これらの確率変数は、このマルコフ過程の状態に依存し、その状態を直接には知ることができないとする。これらの確率変数から得られる標本値 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_k)$ を知って、この時点で停止するかどうかを決定し、このマルコフ過程の未知の状態についての情報を改良する。これらの確率変数は、これらの状態にのみ依存し、すべての情報は状態空間上の確率測度として表される。このとき停止すれば、標本値 $\boldsymbol{x}$ で定まる利得 $\varphi(\boldsymbol{x})$ が得られる。停止しなければ、この標本値を用いて情報を改良し新たな標本値を観測する。この利得関数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ は、$\boldsymbol{x}$ の非減少関数とする。例えば、$\varphi(\boldsymbol{x})=\max_{1\leq i\leq k}x_i$ は、この条件を満足する。この問題の目的は、n 期間のあいだに標本値を１つ選び、総期待利得を最大にすることである。

部分観測可能なマルコフ過程の状態に関する情報が $\boldsymbol{\mu}$ のとき、$v_n(\boldsymbol{\mu})$ を n 期間のあいだ最適政策にしたがったときに得られる総期待利得を表すとする。最適性の原理より、これらの値はつぎの帰納的関数を満足する (Ross [8])。

$$v_n(\boldsymbol{\mu})=\mathrm{E}_{\boldsymbol{\mu}}[\max\{\varphi(\boldsymbol{X}),v_{n-1}(\overline{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X})})\}],\qquad(28)$$

であり、便宜的に、

$$v_n(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{x}):=\max\{\varphi(\boldsymbol{x}),v_{n-1}(\overline{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x})})\}\qquad(29)$$

と表す。定理 1，2 と補題 8 より、これらの関数はつぎの性質を持つことがわかる。

補題 9 $v_n(\mu|x)$ は μ と x に関する非減少関数である。すなわち、$\mu \succeq \nu$ および $x \prec y$ ならば $v_n(\nu|x) \leq v_n(\mu|x)$ および $v_n(\mu|x) \leq v_n(\mu|y)$ である。また、$v_n(\mu)$ は μ の非減少関数である。

つぎに、$\mathcal{R}_+^k$ の部分集合 $S_n(\mu)$ を $S_n(\mu) = \{x|\varphi(x) \geq v_{n-1}(\overline{\mu(x)})\}$ とすれば、この集合はこの最適停止問題の停止領域にあたり、最適政策を示すものである。

補題 10 $\mu \succeq \nu$ ならば $S_n(\mu) \subset S_n(\nu)$ である。

参考文献

[1] Fortuin, C. M., Kasteleyn,P. W. and Ginibre, J. (1971) Correlation Inequalities on Some Partailly Ordered Sets, *Communications on Mathematical Physics*, **22**, 89–103.

[2] Kemperman, J. H. B. (1977), On the FKG-Inequality for Measures on a Partially Ordered Space, *Indagationes Mathematicae*, **39**, 313–331.

[3] Nakai, T. (1986), A Sequential Stochastic Assignment Problem in a Partially Observable Markov Chain, *Mathematics of Operations Research*, **11**, 230–240.

[4] Nakai, T. (1996), An Optimal Selection Problem on a Partially Observable Markov Chain, *Stochastic Modelling in Innovative Manufacturing*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems **445**, Eds. A. H. Christer, S. Ösaki and L. C. Thomas, 140–154, Springer-Verlag, Berlin.

[5] Nakai, T. (1998), Sequential Decision Problems with Learning Procedure for Multivariate Random Variables, *Proceedings of the First Euro-Japanese Workshop on Stochastic Risk Modelling for Finance, Insurance, Production and Reliability*, **2**, Brussels.

[6] Nakai, T. (1999), Sequential Decision Problems with Learning Procedure for Multivariate Random Variables, *Proceedings of the First Western Pacific and Third Australia-Japan Workshop on Stochastic Models in Engineering, Technology and Management*, (Eds. R. J. Wilson, S. Osaaki and M. J. Faddy), The University of Queensland, 387–396.

[7] Preston, C. J. (1974), A Generalization of the FKG Inequaliteis, *Communications on Mathematical Physics*, **36**, 233–241.

[8] Ross, S. M. (1970), *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, San Francisco, California.