数理解析研究所講究録
1133 巻 2000 年 1-7

ワイル群対称性をもつ q-超幾何級数の無限積表示について

名大・多元数理　伊藤 雅彦 (Masahiko ITO)

ルート系 F_4 のワイル群に関する対称性を持った q-超幾何級数で Jacobi の楕円テータ関数の積で表示されるもの (定理 4.1, 定理 4.4) を見つけたので報告します。以下、$|q|<1$ とし、記号

$$(a)_\infty := \prod_{\nu=0}^{\infty}(1-aq^\nu), \quad (a)_\nu := (a)_\infty/(aq^\nu)_\infty, \quad \vartheta(x) := (x)_\infty(q/x)_\infty(q)_\infty$$

を使います。

1　q-超幾何級数 ${}_n\psi_n$ ([GR] 参照)

命題 1.1 (Ramanujan's ${}_1\psi_1$ summation formula) $|b/a|<|z|<1$ のとき、次が成立：

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_\nu}{(b)_\nu}z^\nu = \frac{(az)_\infty}{(z)_\infty}\frac{(q)_\infty}{(b)_\infty}\frac{(b/a)_\infty}{(q/a)_\infty}\frac{(q/az)_\infty}{(b/az)_\infty}.$$

上の公式が ${}_1\psi_1$ と呼ばれるのは、一般に q-超幾何級数 ${}_n\psi_n$ が次のように定義されるからです：

$${}_n\psi_n\left(\begin{matrix} a_1, & a_2, & \cdots, & a_n \\ b_1, & b_2, & \cdots, & b_n \end{matrix};q;z\right) := \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{(a_1)_\nu(a_2)_\nu\cdots(a_n)_\nu}{(b_1)_\nu(b_2)_\nu\cdots(b_n)_\nu}z^\nu,$$

$|b_1\cdots b_n/a_1\cdots a_n|<|z|<1$ で収束。

よく研究されている ${}_n\psi_n$ に well-poised と very-well-poised という概念があります ('poised' は英和辞典で引くと '釣り合った' の意)。それぞれ定義は、

$$\text{well-poised} \ : \ a_1b_1 = a_2b_2 = \cdots = a_nb_n,$$
$$\text{very-well-poised} \ : \ a_1 = -a_2 = qb_1 = -qb_2 \quad \& \quad \text{well-poised}$$

です。very-well-poised ${}_n\psi_n$ において有名な公式に、Bailey の very-well-poised ${}_6\psi_6$ 公式があります。

命題 1.2 (Bailey 1936) $|qa^2/bcde|<1$ のとき、次が成立：

$$\begin{aligned}&{}_6\psi_6\left(\begin{matrix} qa^{\frac12}, & -qa^{\frac12}, & b, & c, & d, & e \\ a^{\frac12}, & -a^{\frac12}, & aq/b, & aq/c, & aq/d, & aq/e \end{matrix};q;\frac{aq^2}{bcde}\right)\\ &= \frac{(q/a)_\infty(aq)_\infty(aq/bc)_\infty(aq/bd)_\infty(aq/be)_\infty(aq/cd)_\infty(aq/ce)_\infty(aq/de)_\infty(q)_\infty}{(q/b)_\infty(q/c)_\infty(q/d)_\infty(q/e)_\infty(aq/b)_\infty(aq/c)_\infty(aq/d)_\infty(aq/e)_\infty(a^2q/bcde)_\infty}.\end{aligned}$$

これらの公式をルート系のワイル群の対称性を使って多重和に拡張します（後の定義 (5.1) でわかるように、Bailey の very-well-poised ${}_6\psi_6$ 公式は BC_1 型と見なせる（注意 5.2)）。

2 ワイル群対称性を持つ q-超幾何級数

E：n 次元実ベクトル空間、
R： E を張る irreducible reduced ルート系、
R^+：R の 基底 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ に対する正ルート全体 ($\alpha\in R^+$ を $\alpha>0$ と書く)、
W：R のワイル群
$\langle\cdot,\cdot\rangle$：$E$ 上の R のワイル群 Wに関する正定値内積、
P：コウェイト格子 $P=\{\chi\in E;\langle\alpha,\chi\rangle\in\mathbf{Z}\text{ for any }\alpha\in R\}$、
Q：コルート格子 $Q=\mathbf{Z}\alpha_1^\vee+\cdots+\mathbf{Z}\alpha_n^\vee\subset P$、ただし $\alpha^\vee=2\alpha/\langle\alpha,\alpha\rangle$、
L：任意の rank n の P の部分格子、

とします。内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $E_{\mathbf{C}}=E\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}\simeq\mathbf{C}^n$ 上線形に拡張されます。$x\in E_{\mathbf{C}}$ に対して次の関数 $\Phi_R(\beta_1,\cdots,\beta_s,\gamma_1,\cdots,\gamma_l;x)$ を定義します。。

$$\begin{aligned}\Phi_R(\beta_1,\cdots,\beta_s,\gamma_1,\cdots,\gamma_l;x)&=\Phi_R(\{\beta_i\},\{\gamma_j\};x)\\&=\prod_{i=1}^{s}\prod_{\substack{\alpha>0\\\alpha:short}}q^{(\frac12-\beta_i)\langle\alpha,x\rangle}\frac{(q^{1-\beta_i+\langle\alpha,x\rangle})_\infty}{(q^{\beta_i+\langle\alpha,x\rangle})_\infty}\cdot\prod_{j=1}^{l}\prod_{\substack{\alpha>0\\\alpha:long}}q^{(\frac12-\gamma_j)\langle\alpha,x\rangle}\frac{(q^{1-\gamma_j+\langle\alpha,x\rangle};q_\alpha)_\infty}{(q^{\gamma_j+\langle\alpha,x\rangle};q_\alpha)_\infty}\end{aligned}$$

ただし $s,l\in\mathbf{Z}_{\geq0}$, $\beta_i,\gamma_j\in\mathbf{C}$。すべてのルート $\alpha\in R$ が同じ長さのとき, それらはすべて短ルートと見なします。また、 $\Delta_R(x)$ を 'Weyl の分母'

$$\Delta_R(x):=\prod_{\alpha>0}(q^{\frac12\langle\alpha,x\rangle}-q^{-\frac12\langle\alpha,x\rangle}).$$

とします。$E_{\mathbf{C}}$ 上の関数 $F(x)$ に対して、ワイル群の作用を $wF(x):=F(w^{-1}x)$, $w\in W$ で定めると、関数 $\Phi_R(\{\beta_i\},\{\gamma_j\};x)$ と $\Delta_R(x)$ は それぞれ W に関して次の対称性を持ちます：

$$w\Phi_R(\{\beta_i\},\{\gamma_j\};x)=U_w(x)\cdot\Phi_R(\{\beta_i\},\{\gamma_j\};x),\quad w\in W$$

$$w\Delta_R(x)=(-1)^w\Delta_R(x).$$

ただし

$$U_w(x)=\prod_{i=1}^{s}\prod_{\substack{\alpha>0\\w\alpha<0\\\alpha:short}}q^{(2\beta_i-1)\langle\alpha,x\rangle}\frac{\vartheta(q^{\beta_i+\langle\alpha,x\rangle})}{\vartheta(q^{1-\beta_i+\langle\alpha,x\rangle})}\cdot\prod_{j=1}^{l}\prod_{\substack{\alpha>0\\w\alpha<0\\\alpha:long}}q^{(2\gamma_j-1)\langle\alpha,x\rangle}\frac{\vartheta(q^{\gamma_j+\langle\alpha,x\rangle})}{\vartheta(q^{1-\gamma_j+\langle\alpha,x\rangle})}.$$

$U_w(x)$ はシフト $x\to x+\chi$, $\chi\in L$ に関して不変な関数で、$q\to1$ の極限で $U_w(x)\to1$ になります。さて、$z\in E_{\mathbf{C}}$ に対して、格子 L 上の無限和

$$J_R(\{\beta_i\},\{\gamma_j\};L;z):=\sum_{\chi\in L}\Phi_R(\{\beta_i\},\{\gamma_j\};z+\chi)\ \Delta_R(z+\chi).$$

を 'ワイル群対称性を持つ q-超幾何級数' と呼ぶことにします。

3 例

ワイル群対称性を持つ q-超幾何級数 $J_R(\{\beta_i\},\{\gamma_j\};L;z)$ の例をいくつか紹介します。

3.1 A_n 型

基底：$\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ \alpha_2=\varepsilon_2-\varepsilon_3,\ \cdots,\ \alpha_n=\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}$,
正ルート：$\varepsilon_i-\varepsilon_j=\sum_{i\le k<j}\alpha_k \quad (1\le i<j\le n+1)$,
コウェイト格子：$P=\mathbf{Z}\chi_1+\mathbf{Z}\chi_2+\mathbf{Z}\chi_3+\cdots+\mathbf{Z}\chi_n, \quad \langle\alpha_i,\chi_j\rangle=\delta_{ij}$.
コルート格子：

$$Q=\mathbf{Z}\alpha_1+\mathbf{Z}\alpha_2+\mathbf{Z}\alpha_3+\cdots+\mathbf{Z}\alpha_n, \quad \Big(\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle\Big)_{i,j=1}^{n}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

sum	type
$J_{A_n}(\beta_1;P;z)$	Aomoto's A_n-type [p.132 Ito1]
$J_{A_n}(\beta_1;Q;z)$	

3.2 B_n 型

基底: $\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ \alpha_2=\varepsilon_2-\varepsilon_3,\ \cdots,\ \alpha_{n-1}=\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n,\ \alpha_n=\varepsilon_n$,
正短ルート：$\varepsilon_i\ (1\le i\le n)$, 正長ルート：$\varepsilon_i\pm\varepsilon_j\ (1\le i<j\le n)$,
コウェイト格子：

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{Z}\varepsilon_1+\mathbf{Z}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+\mathbf{Z}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\cdots+\mathbf{Z}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots+\varepsilon_n) \\ &= \mathbf{Z}\varepsilon_1+\mathbf{Z}\varepsilon_2+\mathbf{Z}\varepsilon_3+\cdots+\mathbf{Z}\varepsilon_n. \end{aligned}$$

sum	type
$J_{B_n}(\beta_1,\gamma_1;P;z)$	Aomoto's B_n-type [Ao]
$J_{B_n}(\{\beta_i\}_{i=1}^{2n-1};P;z)$	Gustafson's B_n-type [Gu1]

3.3 C_n 型

基底：$\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ \alpha_2=\varepsilon_2-\varepsilon_3,\ \cdots,\ \alpha_{n-1}=\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n,\ \alpha_n=2\varepsilon_n$,
正短ルート：$\varepsilon_i\pm\varepsilon_j\ (1\le i<j\le n)$, 正長ルート：$2\varepsilon_i\ (1\le i\le n)$,
コウェイト格子：

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{Z}\varepsilon_1+\mathbf{Z}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+\mathbf{Z}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\cdots+\mathbf{Z}(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots+\varepsilon_n}{2}) \\ &= \mathbf{Z}\varepsilon_1+\mathbf{Z}\varepsilon_2+\cdots+\mathbf{Z}\varepsilon_{n-1}+\mathbf{Z}(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots+\varepsilon_n}{2}), \end{aligned}$$

コルート格子：

$$\begin{aligned} Q &= \mathbf{Z}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+\mathbf{Z}(\varepsilon_2-\varepsilon_3)+\cdots+\mathbf{Z}(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)+\mathbf{Z}\varepsilon_n \\ &= \mathbf{Z}\varepsilon_1+\mathbf{Z}\varepsilon_2+\mathbf{Z}\varepsilon_3+\cdots+\mathbf{Z}\varepsilon_n. \end{aligned}$$

sum	type
$J_{C_n}(\beta_1,\gamma_1;P;z)$	
$J_{C_n}(\beta_1,\gamma_1;Q;z)$	Aomoto's C_n-type [p.122 (3.5) Ao]

3.4 D_n 型

基底：$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\cdots$, $\alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$, $\alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$,
正ルート：$\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \le i < j \le n)$,
コウェイト格子：

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{Z}\varepsilon_1 + \mathbf{Z}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \mathbf{Z}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) + \cdots + \mathbf{Z}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{n-2}) \\ &\quad + \mathbf{Z}(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots+\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n}{2}) + \mathbf{Z}(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots+\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n}{2}) \\ &= \mathbf{Z}\varepsilon_1 + \mathbf{Z}\varepsilon_2 + \cdots + \mathbf{Z}\varepsilon_{n-1} + \mathbf{Z}(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots+\varepsilon_n}{2}), \end{aligned}$$

コルート格子：$Q = \mathbf{Z}(\varepsilon_1-\varepsilon_2) + \mathbf{Z}(\varepsilon_2-\varepsilon_3) + \cdots + \mathbf{Z}(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n) + \mathbf{Z}(\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n) \subset P$,
部分格子: $L = \mathbf{Z}\varepsilon_1 + \mathbf{Z}\varepsilon_2 + \mathbf{Z}\varepsilon_3 + \cdots + \mathbf{Z}\varepsilon_n \subset P$.

sum	type
$J_{D_n}(\beta_1; P; z)$	
$J_{D_n}(\beta_1; Q; z)$	
$J_{D_n}(\beta_1; L; z)$	Aomoto's D_n-type [p.122 (3.6) Ao]

3.5 G_2 型

基底：$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$,
正短ルート：$\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_1+\alpha_2$, 正長ルート：$\alpha_2, 3\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+2\alpha_2$,
コウェイト格子：$P = Q = \mathbf{Z}\chi_1 + \mathbf{Z}\chi_2$, $\langle \alpha_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}$.

sum	type
$J_{G_2}(\beta_1, \gamma_1; P; z)$	Aomoto's G_2-type [p.152 Ito1]
$J_{G_2}(\{\beta_i\}_{i=1}^4; P; z)$	Gustafson's G_2-type [p.103 (8.12) Gu1]

3.6 F_4 型

ルート系 F_4 と $F_4^\vee$ は直交変換で移り合うので、$F_4^\vee$ を使う。
基底：$\alpha_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\alpha_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4$, $\alpha_3 = 2\varepsilon_4$, $\alpha_4 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4$,
正短ルート：$\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \le i < j \le 4)$, 正長ルート：$2\varepsilon_i$ $(1 \le i \le 4)$, $\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4$
コウェイト格子：

$$\begin{aligned} P = Q &= \mathbf{Z}(\varepsilon_2-\varepsilon_3) + \mathbf{Z}(\varepsilon_3-\varepsilon_4) + \mathbf{Z}\varepsilon_4 + \mathbf{Z}(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4}{2}) \\ &= \mathbf{Z}\varepsilon_1 + \mathbf{Z}\varepsilon_2 + \mathbf{Z}\varepsilon_3 + \mathbf{Z}(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4}{2}) \end{aligned}$$

部分格子: $L = \mathbf{Z}\varepsilon_1 + \mathbf{Z}\varepsilon_2 + \mathbf{Z}\varepsilon_3 + \mathbf{Z}\varepsilon_4 \subset P$

sum	type
$J_{F_4}(\beta_1, \gamma_1; P; z)$	Aomoto's F_4-type [Ao]
$J_{F_4}(\{\beta_i\}_{i=1}^3; P; z)$	
$J_{F_4}(\{\beta_i\}_{i=1}^3; L; z)$	[Ito4]

4 積公式

無限級数 $J_R(\{\beta_i\},\{\gamma_j\};L;z)$ が Jacobi の楕円テータ関数 $\vartheta(x)$ の積になる場合がパラメータの数 (s,l) で分類できます。

定理 4.1 ([Ito3]) 格子 $L\subset P$ に対して、無限級数 $J_R(\{\beta_i\},\{\gamma_j\};L;z)$ が

$$C_R(\{\beta_i\},\{\gamma_j\};L)\prod_{\substack{\alpha>0\\ \alpha:short}}\frac{q^{\left(\frac{s-1}{2}-\sum_{i=1}^{s}\beta_i\right)\langle\alpha,z\rangle}\vartheta(q^{\langle\alpha,z\rangle})}{\prod_{i=1}^{s}\vartheta(q^{\beta_i+\langle\alpha,z\rangle})}\cdot\prod_{\substack{\alpha>0\\ \alpha:long}}\frac{q^{\left(\frac{l-1}{2}-\sum_{j=1}^{l}\gamma_j\right)\langle\alpha,z\rangle}\vartheta(q^{\langle\alpha,z\rangle})}{\prod_{j=1}^{l}\vartheta(q^{\gamma_j+\langle\alpha,z\rangle})}\tag{4.1}$$

の積表示を持つのは、以下のとき、またそのときに限る：

A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 型のとき、$s=1$、
B_n 型のとき、$(s,l)=(1,1)$ *or* $(2n-1,0)$、
C_n 型のとき、$(s,l)=(1,1)$ *or* $(0,\frac{n+1}{2})$ n:奇数、
G_2 型のとき、$(s,l)=(1,1)$ *or* $(4,0)$、
F_4 型のとき、$(s,l)=(1,1)$ *or* $(3,0)$。
ただし $C_R(\{\beta_i\},\{\gamma_j\};L)$ は $z\in E_{\mathbf{C}}$ によらない定数 。

注意 4.2 上の分類で 一般の ルート系 R で $(s,l)=(1,1)$ のときは Aomoto [Ao] により定義が与えられ、定数 $C_R(\beta_1,\gamma_1;L)$ $(L=P$ *or* $Q)$ の値が知られている [Ito1, Ma2]。

注意 4.3 B_n 型 で $(s,l)=(2n-1,0)$ のときと、G_2 型 で $(s,l)=(4,0)$ のときは Gustafson により研究されており定数 $C_R(\{\beta_i\};P)$ の値が知られている [Gu1] 。

特に、F_4 型 で $(s,l)=(3,0)$ のとき、定数 $C_{F_4}(\beta_1,\beta_2,\beta_3;P)$ の具体形は次のようになります。

定理 4.4 ([Ito4]) 無限級数 $J_{F_4}(\beta_1,\beta_2,\beta_3;L;z)$ は、$|q|<|q^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}|^6$ のとき収束し、(4.1) の積表示を持つ。定数 $C_{F_4}(\beta_1,\beta_2,\beta_3;P)$ は次のようになる：

$$\begin{aligned}
&C_{F_4}(\beta_1,\beta_2,\beta_3;P)\\
=\;&(q)_\infty^4(q^{1-\beta_1-\beta_2})_\infty(q^{1-\beta_2-\beta_3})_\infty(q^{1-\beta_1-\beta_3})_\infty\\
&(q^{1-\beta_1-2\beta_2})_\infty(q^{1-\beta_1-2\beta_3})_\infty(q^{1-\beta_2-2\beta_1})_\infty(q^{1-\beta_2-2\beta_3})_\infty(q^{1-\beta_3-2\beta_1})_\infty(q^{1-\beta_3-2\beta_2})_\infty\\
&(q^{1-\beta_1-\beta_2-\beta_3})_\infty(q^{1-\beta_1-\beta_2-2\beta_3})_\infty(q^{1-\beta_1-2\beta_2-\beta_3})_\infty(q^{1-2\beta_1-\beta_2-\beta_3})_\infty\\
&(q^{1-\beta_1-2\beta_2-2\beta_3})_\infty(q^{1-2\beta_1-\beta_2-2\beta_3})_\infty(q^{1-2\beta_1-2\beta_2-\beta_3})_\infty(q^{1-2\beta_1-2\beta_2-2\beta_3})_\infty\\
&\frac{(q^{1-3\beta_1-3\beta_2-3\beta_3})_\infty}{(q^{1-6\beta_1-6\beta_2-6\beta_3})_\infty}\prod_{i=1}^{3}\frac{(q^{1-2\beta_i})_\infty}{(q^{1-\beta_i})_\infty}\frac{(q^{1-3\beta_i})_\infty}{(q^{1-\beta_i})_\infty}.
\end{aligned}$$

5 non reduced な場合

ルート系が non reduced ireducible の場合 (BC_n 型の場合) も同様の積公式を考察します。まず関数 $\Phi_{BC_n}(\beta_1,\cdots,\beta_s,\gamma_1,\cdots,\gamma_m,\delta_1,\cdots,\delta_l,;x)$ を定義します：

$$\begin{aligned}
&\Phi_{BC_n}(\{\beta_i\},\{\gamma_j\},\{\delta_k\};x)\\
&:= \prod_{i=1}^{s}\prod_{\substack{\alpha>0\\ \alpha:short}} q^{(\frac{1}{2}-\beta_i)\langle\alpha,x\rangle}\frac{(q^{1-\beta_i+\langle\alpha,x\rangle})_\infty}{(q^{\beta_i+\langle\alpha,x\rangle})_\infty}\cdot\prod_{j=1}^{m}\prod_{\substack{\alpha>0\\ \alpha:middle}} q^{(\frac{1}{2}-\gamma_j)\langle\alpha,x\rangle}\frac{(q^{1-\gamma_j+\langle\alpha,x\rangle};q_\alpha)_\infty}{(q^{\gamma_j+\langle\alpha,x\rangle};q_\alpha)_\infty}\\
&\quad\cdot\prod_{k=1}^{l}\prod_{\substack{\alpha>0\\ \alpha:long}} q^{(\frac{1}{2}-\delta_k)\langle\alpha,x\rangle}\frac{(q^{1-\delta_k+\langle\alpha,x\rangle};q_\alpha)_\infty}{(q^{\delta_k+\langle\alpha,x\rangle};q_\alpha)_\infty}.
\end{aligned}$$

ただし $s,m,l\in\mathbf{Z}_{\geq 0}$, $\beta_i,\gamma_j,\delta_k\in\mathbf{C}$。ここで、$C_n$ 型の分母 $\Delta_{C_n}(x)$ と C_n 型の コウェイト格子 P の rank n の部分格子 L を使って、BC_n 型の q-超幾何級数 $J_{BC_n}(\{\beta_i\},\{\gamma_j\},\{\delta_k\};L;z)$ を次のように定義します：

$$J_{BC_n}(\{\beta_i\},\{\gamma_j\},\{\delta_k\};L;z) := \sum_{\chi\in L}\Phi_{BC_n}(\{\beta_i\},\{\gamma_j\},\{\delta_k\};z+\chi)\ \Delta_{C_n}(z+\chi). \tag{5.1}$$

分類は次のようになります。

定理 5.1 ([Ito5]) 格子 $L\subset P$ に対して、無限級数 $J_{BC_n}(\{\beta_i\},\{\gamma_j\},\{\delta_k\};L;z)$ が

$$\begin{aligned}
&C_{BC_n}(\{\beta_i\},\{\gamma_j\},\{\delta_k\};L)\prod_{\substack{\alpha>0\\ \alpha:short}}\frac{q^{(\frac{s-1}{2}-\sum_{i=1}^{s}\beta_i)\langle\alpha,z\rangle}\vartheta(q^{\langle\alpha,z\rangle})}{\prod_{i=1}^{s}\vartheta(q^{\beta_i+\langle\alpha,z\rangle})}\\
&\cdot\prod_{\substack{\alpha>0\\ \alpha:middle}}\frac{q^{(\frac{m-1}{2}-\sum_{j=1}^{m}\gamma_j)\langle\alpha,z\rangle}\vartheta(q^{\langle\alpha,z\rangle})}{\prod_{j=1}^{m}\vartheta(q^{\gamma_j+\langle\alpha,z\rangle})}\cdot\prod_{\substack{\alpha>0\\ \alpha:long}}\frac{q^{(\frac{l-1}{2}-\sum_{k=1}^{l}\delta_k)\langle\alpha,z\rangle}\vartheta(q^{\langle\alpha,z\rangle})}{\prod_{k=1}^{l}\vartheta(q^{\delta_k+\langle\alpha,z\rangle})}
\end{aligned}$$

の積表示を持つのは、以下の表のとき、またそのときに限る：

n	s	m	l	type
2	0	3	0	
2	2	2	0	
3	0	2	0	
n	0	1	1	Aomoto's C_n-type
n	4	1	0	van Diejen's BC_n-type
n	$2n+2$	0	0	Gustafson's C_n-type
n	$2n-2$	0	1	
n	$2n-6$	0	2	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
n	$2n+2-4m$	0	m	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
n	$4(\frac{n+1}{2}-[\frac{n+1}{2}])$	0	$[\frac{n+1}{2}]$	n が奇数のとき定理 4.1の表の一つ

($0\leq m\leq[\frac{n+1}{2}]$, $[x]$ は x をこえない整数)

ただし $C_{BC_n}(\{\beta_i\},\{\gamma_j\},\{\delta_k\};L)$ は $z\in E_{\mathbf{C}}$ によらない定数 。

注意 5.2 特に 上の表で $n=1$ のとき、Bailey の very-well-poised ${}_6\psi_6$ 公式 になる。

注意 5.3 $(s,m,l)=(0,1,1),(4,1,0),(2n+2,0,0)$ の場合はそれぞれ Aomoto[Ao], van Diejen[D], Gustafson[Gu1] により研究されている。

参考文献

[Ao] K. Aomoto, *On elliptic product formulas for Jackson integrals associated with reduced root systems*, J. Alg. Combi. **8** (1998), 115–126.

[Bo] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4,5 et 6*, Hermann, Paris, 1969.

[D] J. F. van Diejen, *On certain multiple Bailey, Rogers and Dougall type summation Formulas*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **33** (1997), 483–508.

[DV] J. F. van Diejen and L. Vinet, *The quantum dynamics of the compactified trigonometric Ruijsenaars–Schneider model*, Comm. Math. Phys. **197** (1998), 33–74.

[GR] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series*, Encyclopedia of mathematics and its apprication **35**, Cambrige Unversity Press, 1990.

[Gu1] R. A. Gustafson, *Some q-Beta and Mellin-Barnes intrgrals on compact Lie groups and Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Anal. **23** (1992), 552–561.

[Gu2] ———, *Some q-Beta integrals on $SU(n)$ and $Sp(n)$ that generalize the Askey Wilson and Nasrallah-Rahman integral*, SIAM J. Math. Anal. **25** (1994), 441–449.

[Gu3] ———, *A summation theorem for hypergeometric series very-well-poised on G_2*, SIAM J. Math. Anal. **21** (1990), 510–522.

[Gu4] ———, *The Macdonald identities for affine root systems of classical type and hypergeometric series very-well-poised on semisimple Lie algebras*, Ramanujan International Symposium on Analysis (Pune, 1987), 185–224, Macmillan of India, New Delhi, 1989.

[Ito1] M. Ito, *On a theta product formula for Jackson integrals associated with root system of rank two*, J. Math. Anal. Appli. **216** (1997), 122–163.

[Ito2] ———, *Another proof of product formula for Gustafson's G_2-type sum*, Preprint, 1999.

[Ito3] ———, *Symmetry classification for Jackson integral associated with irreducible reduced root systems*, Preprint, 1999.

[Ito4] ———, *A product formula for Jackson integral associated with the root system F_4*, in preparation.

[Ito4] ———, *Symmetry classification for Jackson integral associated with the root system BC_n*, in preparation.

[Mi] S. C. Milne, *Basic hypergeometric series very well-poised in $U(n)$*, J. Math. Anal. Appli. **122** (1987), 223–256.

[Ma1] I. G. Macdonald , *Some conjectures for root systems*, SIAM J. Math. Anal. **13** (1982), 998–1007.

[Ma2] ———, *A formal identity for affine root systems*, Preprint, 1996.