数理解析研究所講究録
1133 巻 2000 年 139-150

ベクトル場の同時標準形とSeifert 予想への応用

中央大学　　吉野正史

考える問題

例　原点に特異点をもつようなベクトル場の標準形
$x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{C}^n$　(あるいは$\mathbf{R}^n$) の原点$x=0$ の近傍で定義された特異なベクトル場

$$\chi:=\sum_{k=1}^{n}X_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k}$$

を考える。ここで、特異という条件は

$$X_k(0)=0 \qquad k=1,\ldots,n.$$

そこで

$$X(x):=(X_1(x),\ldots,X_n(x))=x\Lambda+R(x),\ R(x)=(R_1(x),\ldots,R_n(x))$$

とあらわす。ここで、Λは $n\times n$ 定数行列、$R(x)$ はなめらかであって次の条件をみたす。

$$R(0)=0, \qquad \nabla R(0)=0.$$

すなわち、$R(x)=O(|x|^2)$ である。

問題：　適当な原点の近傍の座標変換 $x\mapsto x=y+v(y)$ によって χを線形化できるか。すなわち$R\equiv 0$ とできるか。

Homology 方程式

座標変換の公式によれば

$$X(y+v(y))(1+\nabla v)^{-1}=y\Lambda.$$

したがって

$$(y+v)\Lambda+R(y+v)=y\Lambda(1+\nabla v)=y\Lambda+y\Lambda\nabla v.$$

よって、vは次の方程式(**Homology 方程式**)の解である。

$$\mathcal{L}v=R(y+v),$$

ここで、

$$\mathcal{L}:=y\Lambda\nabla-\Lambda.$$

ベクトル場χが線形化されるための必要十分条件はHomology 方程式が解を持つことである。

例 今座標変換によって、Λ が対角化されていたとする。すなわち、$\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. $y\Lambda\nabla = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k(\partial/\partial y_k)$ であるので

$$\mathcal{L}v = \mathrm{diag}\,((\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k \frac{\partial}{\partial y_k} - \lambda_1)v_1, \ldots, (\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k \frac{\partial}{\partial y_k} - \lambda_n)v_n).$$

この場合、Homology 方程式は微分方程式の立場から見ればかなりきれいな形をしている。

- 非線型性は $w := y + v$ を未知関数と思えば、準線形である。
- 系ではあるが最高階に関しては単独に分解している。
- 作用素 $\mathcal{L}$ はその可逆性はかなりわかりやすい。

最後に関しては、次の計算によってたしかめられる。$v = \sum_\alpha v_\alpha y^\alpha$ と展開すると $\lambda_k y_k \frac{\partial}{\partial y_k} y^\alpha = \lambda_k \alpha_k y^\alpha$ であるので

$$\mathcal{L}v = \sum_\alpha (\sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k - \Lambda) v_\alpha y^\alpha$$

したがって、$\sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k - \lambda_j$ の割り算によって $\mathcal{L}^{-1}$ を構成できる。
この議論は解析的な関数でのみ、有効であるが Mellin 変換（乗法的 Fourier 変換）によって $y_j(\partial/\partial y_j) \mapsto \xi_j$ であるので $\mathcal{L}^{-1}$ を滑らかな関数のクラスで構成することもできる。

評価の立場からみた時の問題

非線型方程式を解くためには線形部分の評価が重要である。評価の立場から考えたとき、重要なクラスは Poincaré **型のベクトル場**と Siegel **型のベクトル場**である。簡単のため、うえの記号をそのまま用いることにする。

> χ が Poincaré **型のベクトル場**であるとは固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ が複素平面の原点を通る直線の片側に存在することである。

注意 Poincaré **型のベクトル場**に対するホモロジー作用素 $\mathcal{L}$ の Kernel および Cokernel は有限次元である。このとき、Homology 方程式は非線型性 R が十分に小さければ通常の逐次近似で解くことができる。(Poincaré の定理)
これ以外の作用素では無限次元の核があらわれたり、核は有限次元であっても、$\mathcal{L}^{-1}$ は非常に高い微分のロスをもつ。前者の場合を resonance をもつという。後者の場合は Siegel **型のベクトル場**という。
後者の場合、いわゆる rapidly convergent iteration あるいは Nash-Moser iteration をもちいることによって非線型方程式を解く。

ポアンカレ条件の幾何学的な意味

ポアンカレ条件はベクトル場の原点における線形部分の固有値の条件である。これの幾何学的な意味を述べる。ここでの結果は Ito (数理研講究録) による。いま $\mathbf{C}^n \sim \mathbf{R}^{2n}$ と考え、S^{2n-1} を $2n-1$ 次元の半径 1 の球面とする。χ が S^{2n-1} に **横断的**とは χ が S^{2n-1} に接しないことである。この時つぎがなりたつ。

χがS^{2n-1}に **横断的**であるとき、χはS^{2n-1}のなかにただ一つの特異点をもつ。その特異点においてχはポアンカレ条件をみたす。

一般性を失うことなく、球の中で一次分数変換を用いて、そのような特異点は原点であるとしておいてよい。逆にポアンカレ条件をみたせば、ベクトル場は特異点の近くの球面に横断的である。

可換なベクトル場の系の同時標準形

可換なベクトル場あるいは写像の同時標準形の研究はJ. Moserによって提案された。(Math. Z. 1990). その後、DeLatte (Discr. and Cont. Dynam. Sys. 1997), Kra (Israel Jour. Math. 1996), Stolovitch (preprints) らによって、1次元のベクトル場の場合、regularityが少ない場合、一般次元の複素ベクトル場の場合などが研究された。ベクトル場が特にハミルトン場の時はKAM理論の一般化として提唱されている。すなわち、$2n$次元のハミルトンベクトル場$\chi_H := H_\xi \partial_x - H_x \partial_\xi$を考えるとき、$\chi_H$と可換なベクトル場が存在するとき、$\chi_H$はどのような構造を持つか。

ここでは複素ベクトル場を実の立場からとらえることでこの問題を考える。これは後で述べるように、Seifert予想への応用を与える。

例 複素ベクトル場$a(z)\partial_z$をかんがえる。いま$z = x + iy$とあらわし、ベクトル場を実部と虚部にあらわす。$a(z) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$とかくと$\partial_z = (\partial_x - i\partial_y)/2$であるので

$$a(z)\partial_z = \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)(\partial_x - i\partial_y) = \frac{1}{2}(\alpha\partial_x + \beta\partial_y + i(\beta\partial_x - \alpha\partial_y)) = X_1 + iX_2.$$

この時、$a(z)$の正則性より、$\alpha_x = \beta_y$, $\alpha_y = -\beta_x$ (Cauchy-Riemann equation) であるので

$$\begin{aligned}[X_1, X_2] &= \alpha\beta_x - \alpha_x\beta - (\alpha\alpha_x - \alpha\alpha_y) + \beta\beta_y - \beta\beta_x - (\beta\alpha_y - \alpha\beta_y) \\ &= -\alpha\alpha_y - \alpha_x\beta - (\alpha\alpha_x - \alpha\alpha_y) + \beta\alpha_x + \beta\alpha_y - (\beta\alpha_y - \alpha\alpha_x) = 0.\end{aligned}$$

一般に

複素ベクトル場の実部と虚部は実のベクトル場として、可換なベクトル場である。

そこで複素ベクトル場の結果を実の可換なベクトル場の理論より拡張できないか。という立場から問題をかんがえる。このような立場より、Seifert予想に対して、複素のベクトル場での結果を拡張、あるいは精密化することを行う。

可換なベクトル場の系

$\chi = \{\chi_1, \ldots, \chi_d\}$を可換な原点で特異なベクトル場の系とする。すなわち

$$[\chi_j, \chi_k] = 0 \qquad \forall j, k, 1 \le j, k \le d.$$

原点で特異とは**すべてのベクトル場は原点で消える**ということである。

われわれはベクトル場の系χを座標変換で同時に線形化したい。このための変換の満足する方程式を求めるため座標をとって

$$\chi_j := \sum_{k=1}^{n} X_k^j(x) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$X^j(x) := (X^j_1(x), \ldots, X^j_n(x)) = x\Lambda^j + R^j(x),\ R^j(x) = (R^j_1(x), \ldots, R^j_n(x))$$

とあらわす。ここで、Λ^jは $n \times n$定数行列、$R^j(x)$ は次の条件をみたす。

$$R^j(0) = 0, \qquad \nabla R^j(0) = 0.$$

$\mathcal{L}^j := x\Lambda^j\nabla - \Lambda^j$と定義するとき

ベクトル場の系χが座標変換$x \mapsto y + v(y)$で同時に線形化されるための必要十分条件はvがHomology equationsの系を同時に満足することである。　すなわち

$$\mathcal{L}^j v = R^j(y + v), \qquad j = 1, \ldots, d.$$

同時ポアンカレ条件と同時横断性条件

単独のベクトル場でみたように複素ベクトル場の単位球面に対する横断性条件はポアンカレ条件として理解される。そして、注意したようにこれはホモロジー作用素のある種の楕円性としてとらえられる。それでは

複素ベクトル場を実の可換なベクトル場であらわしたとき、ポアンカレ条件あるいは横断性条件はどのようにとらえられるのか。

この問題に答えるためわれわれは同時ポアンカレ条件と同時横断性条件の概念をいれる。これはHomology作用素の立場からいえばおのおのの$\mathcal{L}_j$は楕円性を持たないが、系として楕円性を持つということに対応する。

同時横断性の定義　gを$\mathbf{R}^n$上のリーマン計量、$<,>_g$, $\|\cdot\|_g$ を内積、およびノルムとする。χが単位球$\|\cdot\|_g = 1$ にたいして、同時横断的とは

$$\sum_{\nu=1}^{d} | < \chi^\nu, x >_g | \neq 0, \quad \forall x,\ \|x\|_g = 1.$$

が成立することである。

Λ^ν ($\nu = 1, \ldots, d$) をχ^νの線形部分の行列とし、ξ^ν_j ($j = 1, \ldots, n$) をその固有値の**実部**とする。

$$\xi_j := (\xi^1_j, \ldots, \xi^d_j)$$

とおき、

$$\Gamma_\chi := \{\sum_{j=1}^{n} c_j\xi_j \in \mathbf{R}^d; c_j \geq 0, c_1^2 + \cdots + c_n^2 \neq 0\}$$

でΓ_χ を定義する。

定義　$0 \neq \Gamma_\chi$ の時、χは同時ポアンカレ条件を満たすという。

例 単独の複素ベクトル場χを考える。$z_j = x_j + iy_j$ $(j=1,\dots,n)$として、実の座標を導入する。ベクトル場を実部と虚部にわける。$\chi = \chi_1 + i\chi_2$. χ の固有値を$\lambda_j = 2(\xi_j - i\eta_j)$ $(j=1,\dots,n)$とあらわす。その時、χ_1とχ_2の線形部分の固有値の実部はそれぞれξ_j, $-\eta_j$である。実際、

$$\begin{aligned}
\lambda_j z_j \partial_{z_j} &= \xi_j - i\eta_j)(x_j + iy_j)(\partial_{x_j} - i\partial_{y_j}) \\
&= (\xi_j x_j + \eta_j y_j)\partial_{x_j} + (y_j\xi_j - \eta_j x_j)\partial_{y_j} \\
&+ i\left(y_j\xi_j - \eta_j x_j)\partial_{x_j} - (\xi_j x_j + \eta_j y_j)\partial_{y_j}\right).
\end{aligned}$$

従って、対応する行列は

$$\begin{pmatrix} \xi_j & -\eta_j \\ \eta_j & \xi_j \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\eta_j & -\xi_j \\ \xi_j & -\eta_j \end{pmatrix}$$

そこで最初の行列の固有値は$(\lambda - \xi_j)^2 + \eta_j^2 = 0$より$\lambda = \xi_j \pm i\eta_j$, 同様にして、2番めの行列の固有値は$-\eta_j \pm i\xi_j$.

ポアンカレ条件は"あるθが存在して$\Re e^{i\theta}\lambda_j > 0$ $(j=1,\dots,n)$ である" と述べられるので

$$\xi_j \cos(-\theta) - \eta_j \sin(-\theta) > 0.$$

すなわち、$\xi_j = (\xi_j, -\eta_j)$ $(j=1,\dots,n)$とおくとき、Γ_χ のdual cone が空でない。従って、$\Gamma_\chi \neq \emptyset$.

ここでΓ_χ のdual coneは

$$\{(c_1,\dots,c_d) \in \mathbf{R}^d; \sum_j c_j t_j > 0, \forall (t_1,\dots,t_d) \in \Gamma_\chi\}.$$

従って、

複素ベクトル場χがポアンカレ条件を満たすための必要十分条件はそれを実の可換なベクトル場であらわしたとき、それらが同時ポアンカレ条件を満たすことである。

同時横断性条件とポアンカレ条件の同値性

まずχはsemi-simpleとする。そこで実の正則な行列Pが存在して

$$\Lambda^\nu = PD^\nu P^{-1}, \qquad \nu = 1,\dots,d$$

とする。ここでD^νは実対角行列である。リーマン計量を$g := (P^t P)^{-1}$で定義する。この時次が成立する。

定理 χはsemi-simpleな線形場の系とする。この時、χが原点において同時ポアンカレ条件を満たすための必要十分条件はχの線形部分がが単位球面に同時横断的であることである。

注意 かならずしもsemi-simpleでないときにも**同時横断性条件からポアンカレ条件は従う**。ただし、逆が成立するかどうかはわからない。

Poincaré 代表元の存在

同時ポアンカレ場を理解する上で役に立つ概念を導入する。複素ベクトル場の例からわかるように複素ベクトル場の実部と虚部の適当な一次結合はポアンカレ型のベクトル場を生成する。このような状況は一般的に成立する。すなわち次が成立する。

> **定理** χが原点において同時ポアンカレ条件を満たすための必要十分条件はある$c_\nu \in \mathbf{R}$ $(\nu = 1, \dots, d)$が存在して、$\chi_0 := \sum_{\nu=1}^{d} c_\nu \chi_\nu$がポアンカレ場となることである。

このような元の存在はCamachoによって予想された。

共鳴 Resonances について

今、$\chi = \{\chi^\mu\}$は簡単のため可換な線形場であるとし、それらの線形部分を$x\Lambda^\mu$とする。これらは可換性より一般性を失うことなく実Jordan 標準形であるとしてよい。すなわち、Λ^μはJordan標準形であって、そのJordan 細胞は

$$\Lambda^\mu = (\Lambda_1^\mu, \dots, \Lambda_k^\mu),$$

$$\Lambda_j^\mu = \begin{pmatrix} J_j^\mu & & * \\ & \ddots & \\ & & J_j^\mu \end{pmatrix} \qquad J_j^\mu = \begin{pmatrix} \xi_j^\mu & -\eta_j^\mu \\ \eta_j^\mu & \xi_j^\mu \end{pmatrix}.$$

ここで、$\lambda^\mu := (\lambda_1^\mu, \lambda_2^\mu, \dots, \lambda_{2n}^\mu)$, $\lambda_{2j-1}^\mu := \xi_j^\mu + i\eta_j^\mu$, $\lambda_{2j}^\mu := \xi_j^\mu - i\eta_j^\mu$ $(j = 1, \dots, n)$ ただし、同じ物が現れたときは重複度も込めて書くことにする。(ここで空間次元が偶数である場合を述べたが奇数の場合も記号を修正して述べることができる) とおくとき、非共鳴条件は次のように述べられる。ここでdはベクトル場の個数である。

$$\boxed{\sum_{\mu=1}^{d} | < \lambda^\mu, \alpha > - \lambda_j^\mu | \neq 0 \quad \forall 1 \leq j \leq 2n, \forall \alpha \in \mathbf{Z}_+^{2n}.}$$

Resonances の存在は線形化への障害である。 これを見るために簡単な例をとる。すなわち、単独のベクトル場に付随したHomology方程式を解く。

$$\mathcal{L}v = R(x+v), \quad v = \sum_{|\alpha| \geq 2} v_\alpha x^\alpha$$

でRは2次以上の項よりなるとする。このとき、v_αに対し、$\mathcal{L}$は掛け算作用素としてはたらくのでこの方程式を未定係数法で解ける。すなわち、$R(x+v)$では$x+v$の2次以上の積としてあらわれるのでこれからv_α, $|\alpha| = s$を含む項はxの少なくとも$s+1$次以上である。よって、xのs次の項を比較すれば、右辺からはv_α, $|\alpha| < s$しかあらわれない。これより、形式解は非共鳴条件のもとで一意に決まる。

この事より、共鳴条件がなりたつと線形化はできない。次の定理を注意しておく。

同時ポアンカレ条件を満足する系のポアンカレ代表元のresonanceは同時resonancesと一致するようにとることができる。

例 複素ベクトル場ではその実部と虚部のベクトル場のresonanceはもとの複素ベクトル場のresonanceと一致する。

Seifert予想への応用

S^3 を3次元球面とするとき S^3上の消えないベクトル場は常にclosed nonsingular leavesをもつか。

これに対するaffirmativeな答えはSeifert予想といわれる。Kuperberger, Acta. Math. (1996)の結果によればこのconjectureには反例が知られている。 他方、伊藤(数理研講究録)の結果によれば

横断性条件をみたす複素ベクトル場でconjectureは成立する例が存在し、さらに摂動をしても、横断性条件が変わらない限りclosed nonsingular leafが存在する。

複素ベクトル場は2つの可換なベクトル場と同値であるのでここではSeifert conjectureを可換なベクトル場の立場から考える。

今χを可換なベクトル場の系とし、S^{2n-1}でのSeifert予想の成立を考える。

仮定 χの線形部分はS^{2n-1}に同時横断的であって非共鳴的であるとする。

この条件下で同時ポアンカレ条件が成立し、可換な系にたいする拡張されたPoincaré -Dulacの定理によって同時線形化できる。前の記号をそのまま用いることにし、固有値からξ_j, η_jを

$$\xi_j := (\xi_j^1, \ldots, \xi_j^d),\ \eta_j := (\eta_j^1, \ldots, \eta_j^d),\ j = 1, \ldots, k.$$

によって、決める。 このとき、次が成立する。

$\exists\nu$, $1 \le \nu \le k$ に対して、ξ_νとη_νが一次独立ならばnonsingular 1次元closed leaves が少なくともk個 S^{2n-1}上に存在する。

Homology 方程式系の可解性の証明の概略

ポアンカレ条件が成立しない場合にHomology方程式系を解く。これはrapidly convergent iteration methodを改良したものである。考える方程式はoverdetermined systemであるので近似逆の構成を工夫する必要がある。これはapproximate weight functionを用いて行う。

rapidly convergent methodの有用性の例 次の簡単な例を考える。$f(x) = 0$の根を求めるとき、$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$は$(x_0, f(x_0))$を通る直線の方程式である。この直線と$x$軸の交点は$f(x) = 0$の根の近似を与える。その近似は$x_1 = x_0 - f'(x_0)^{-1}f(x_0)$ である。これを繰り返していわゆるNewton法による近似がえられる。すなわち

$$x_{n+1} = x_n - f'(x_n)^{-1} f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

これに対して、Picardの意味での近似列は次によって構成される。

$$x_{n+1} = x_n - f'(x_0)^{-1} f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

これらの収束の速さがどのくらい異なるかを$f(x) = x^2$で見てみる。求める零点は$x = 0$である。Newton法では$x_{n+1} = x_n - x_n^2/2x_n = x_n/2, x_0 = 1$であるので近似列は指数的に収束する。

Picard近似では$x_{n+1} = x_n - x_n^2/2x_0 = x_n - x_n^2/2$. 従って、この式を繰り返し用いて、$x_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^n x_k^2/2 > 0$. 従って、$\sum x_n^2 < \infty$である。 特に、$x_n \to 0$. これより、近似列は指数的には収束しない。なぜなら、$x_{n+1} = x_n(1 - x_n/2)$. よって、$x_{n+1} = \prod_k (1 - x_k/2)$. $x_n \to 0$であるのでこの右辺がr^n $0 < r < 1$より小さくなることはないからである。 □

必要な補題を準備する。$T = (T_1, \ldots, T_n), T_j > 0$に対し、$D_T \subset \mathbf{C}^{2n}$を多重円板$D_T = \{|z_1| < T_1\} \times \cdots \times \{|z_n| < T_n\} \times \{|w_1| < T_1\} \times \cdots \times \{|w_n| < T_n\}$とする。$\mathcal{A}(D_T)$を$D_T$で正則であって$\{(z, w) \in D_T; w_j = \bar{z}_j, j = 1, \ldots, n\}$の上で実数値をとる関数の全体とする。

$$H(T) = \{u(z, w) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_+^n, |\alpha + \beta| \geq 2} u_{\alpha, \beta} z^\alpha w^\beta \in \mathcal{A}(D_T);$$

$$|\!|u|\!|_T = \sum_{\alpha, \beta} |u_{\alpha, \beta}| T^{\alpha + \beta} < \infty\}.$$

と定義する。uをD_Tで正則かつその閉包まで連続とし、$|u|_{T, \infty} := \sup_{D_T} |u(z, w)|$と定義する。$T' = (T_1', \ldots, T_n')$と$T = (T_1, \ldots, T_n)$に対し、 すべての$j$にたいして$T_j' < T_j$の時、$T' < T$とかく。この時、次の補題が成立する。

定数$C > 0$が存在してすべての$0 < T' < T$に対し、

$$\begin{aligned} |\!|D_z^\gamma D_{\bar{z}}^\delta u|\!|_{T'} &\leq C(T - T')^{-\gamma - \delta} |\!|u|\!|_T, \quad u \in H(T). \\ |u|_{T', \infty} \leq |\!|u|\!|_{T'} &\leq C(T - T')^{-2n} |u|_{T, \infty}, \quad u \in H(T). \end{aligned}$$

が成立する。

$$Mf = \sum_{\mu=1}^d \mathcal{L}_\mu {}^t\mathcal{L}_\mu f, \quad f \in (H(T))^{2n}.$$

と定義するとき次が成立する。

作用素 M, $\mathcal{L}_\mu$, $\mathcal{L}_\nu$ and ${}^t\mathcal{L}_\nu$ $(\mu, \nu = 1, \ldots, d)$ はお互いに可換である。 もしM^{-1}が存在すればこれらの元とM^{-1}も可換である。

M^{-1}が存在するとき、approximate weight function $\mathcal{P}(D)$ をつぎで定義する。

$$\mathcal{P}(D)\vec{f} := \sum_{j=1}^{d} {}^t\mathcal{L}_j M^{-1} f_j, \quad \vec{f} = (f_1, \ldots, f_d) \in H(T)^{2dn}.$$

この時次が成立する。

> $T^0 = (T_1^0, \ldots, T_n^0) > 0$ を与えられたとして、次のBruno型条件を仮定する。
> ある$c >$が存在して、
>
> $$\sum_{\nu=1}^{d} | <\lambda^\nu, \alpha> - \lambda_j^\nu|^2 \geq c\exp\left(-\frac{|\alpha|}{(ln\,(2+|\alpha|))^{1+\tau}}\right),$$
> $$\forall\alpha \in \mathbf{Z}_+^{2n}, |\alpha| \geq 2, \ 1 \leq \forall j \leq 2n.$$
>
> その時、すべての$0 < T' < T < T_0$に対し、逆 $M^{-1} : (H(T))^{2n} \longrightarrow (H(T'))^{2n}$ と T と T'に独立な定数$c_0 > 0$が存在して、次の評価が成り立つ。$T_0 < \forall T' < \forall T < 2T_0$に対し、
>
> $$\|M^{-1}\|_{(H(T))^{2n} \to (H(T'))^{2n}} \leq \exp\left(\exp(c_0(T - T')^{-1/(1+\tau)})\right),$$
>
> ここで、$(T - T')^{-1/(1+\tau)} = \sum_j (T_j - T_j')^{-1/(1+\tau)}$. さらに, $\mathcal{P}$ は定数 c_0を取り替えれば同じ評価を満たす。

Homology 方程式系の可解性の証明

可解性の証明 簡単のため Ωは多重円板、すなわち半径$T >$ の単位円板の直積とする。$\mathcal{A}(\Omega)$をΩで正則であって$\{(z,w) \in \Omega; w_j = \bar{z}_j, j = 1, \ldots, n\}$ のうえで実数値の関数の全体とする。

$$H(\Omega) := \{u \in \mathcal{A}(\Omega); \sup_\Omega |u|_T < \infty\}$$

と定義する。 また$\|u\|_{\Omega,\infty} := \sup_\Omega |u(x)|$ と定義する。

いま変換$x \mapsto u(x) = x + v(x)$がベクトル場を線形化したとすると$v(x)$はHomology方程式系の解である。 すなわち

$$\mathcal{L}_\mu v(x) = R^\mu(x + v(x)), \qquad 1 \leq \mu \leq d.$$

$T^* > 0$を小さな正数とし、$p > 1$ と $q > 0$ は$1 > q > p/(1+\tau)$を満たすとする。 γ を$\gamma\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} = T^*$ で決める。 $T_0 = T$とおき、次の数列を定義する。

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= T_k - \gamma k^{-p}\mathbf{e}, T_{k+1}''' = T_k - \gamma k^{-p}\mathbf{e}/4, \\ T_{k+1}'' &= T_k - 2\gamma k^{-p}\mathbf{e}/4, T_{k+1}' = T_k - 3\gamma k^{-p}\mathbf{e}/4, \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \ldots$, ここで $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)$. 半径$T_k$の単位円板の直積である多重円板を$\Omega_k$と書く。以下では$\varepsilon > 0$を十分小さな数として、

$$\|R^\mu\|_T \leq \varepsilon, \qquad \mu = 1, \ldots, d,$$

の時、Homology 方程式を解く。

変数変換 $x \mapsto u_k(x) = x + v_k(x)$, $v_k(x) \in H(\Omega_k)$, $k \in \mathbf{Z}_+$ の近似列を次で定義する。

$$v_0(x) = \sum_{\nu=1}^{d} {}^t\mathcal{L}_\nu M^{-1} R_0^\nu(x), \qquad R_0^\nu(x) = R^\nu(x).$$

既に述べた補題により、, v_0 は実数値解析的である。

今実数値関数列 $v_0(x), \ldots, v_{k-1}(x)$ が定義され、変換 $(1+v_0) \circ \cdots \circ (1+v_{k-1})(x)$ によって

$$\begin{aligned} X^{\mu,k}(x) &= X^{\mu,k-1}(x + v_{k-1}(x))(1 + \partial_x v_{k-1})^{-1} \\ &= X^\mu((1+v_0) \circ \cdots \circ (1+v_{k-1})(x))(1+\partial_x v_0)^{-1} \cdots (1+\partial_x v_{k-1})^{-1}, \end{aligned}$$

$\mu = 1, \ldots, d$ となったとする。ここで、$X^{\mu,0} = X^\mu$. この時、R_k^μ と v_k をつぎで定義する。

$$\begin{aligned} X^{\mu,k}(x) &= x\Lambda^\mu + R_k^\mu(x), \quad \mu = 1, \ldots, d, \\ v_k(x) &= \sum_{\nu=1}^{d} {}^t\mathcal{L}_\nu M^{-1} R_k^\nu(x). \end{aligned}$$

これによって、v_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ が定義できる。

$\varepsilon > 0$ が十分小であるとして、つぎをしめす。

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} u_0 \circ \ldots \circ u_{k-1} \circ u_k = u \quad &\text{in} \quad H(\Omega_\infty), \qquad \mu = 1, \ldots, d, \\ \lim_{k\to\infty} R_k^\mu = 0 \quad &\text{in} \quad H(\Omega_\infty), \qquad \mu = 1, \ldots, d, \end{aligned}$$

この時、$X^{\mu,k} \to x\Lambda^\mu$ であるので

$$X^{\mu,k-1}(x + v_{k-1}(x))(1 + \partial v_{k-1})^{-1} \longrightarrow X^\mu(u(x))\partial u^{-1} = x\Lambda^\mu.$$

であることが示せる。この近似列のよい点は収束がきわめて早いことである。これを可能にしているのは誤差が前の step の 2 乗で小さくなることである。これはベクトル場の可換性よりわかる。

References

[1] V. I. Arnold, *Small divisors, I. Mappings from circle onto itself*, Izv. Akad. Nauk USSR, Ser. Mat., **25**:1 (1961), 21-87.

[2] V. I. Arnold, "Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations", Springer, New York - Heidelberg - Berlin, 1983.

[3] A.D. Bruno, "Local Methods in Nonlinear Differential Equations", Springer, Berlin - Heidelberg, 1989.

[4] A.D. Bruno and S. Walcher, *Symmetries and convergence of normalizing transformations*, J. Math. Anal. Appl. **183** (1994), 571-576.

[5] D. DeLatte, *On normal forms in Hamiltonian dynamics, a new approach to some convergence questions*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **15** (1995), 49-66.

[6] D. DeLatte, *Diophantine conditions for the linearization of commuting holomorphic functions*, Discr. and Cont. Dynam. Sys., **3**:3 (1997), 317-332.

[7] T. Gramchev and M. Yoshino, *Rapidly convergent iteration method for simultaneous normal forms of commuting maps*, Math. Z. **231** (1999), 745-770.

[8] M. Herman, *Sur la conjugaison différentiels des diffeomorphismes de cercle à des rotations*, Publ. IHES, **49** (1979), 5-233.

[9] M. Herman, *Recent results and some open questions on Siegel's linearization theorem of germs of complex analytic diffeomorphisms of* $\mathbf{C}^n$ *near a fixed point*, Proc. VIII-th Conf. on Math. Physics, (1988), 138-184.

[10] Y. Il'yashenko, *Divergence of series reducing an analytic differential equation to linear form at a singular point*, Funct. Anal. and Appl., **13** (1979), 227-229.

[11] B. Kra, *The conjugating map for commuting groups of circle diffeomorphisms*, Israel Jour. Math., (1996), 303-316.

[12] J. Moser, *A rapidly convergent iteration method and non-linear differential equations, II*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), **20** (1966), 499-535.

[13] J. Moser, *On commuting circle mappings and simultaneous Diophantine approximations*, Math. Z., **205** (1990), 105-121.

[14] M. Pérez Marco, *Non linearizable holomorphic dynamics having an uncountable number of symmetries*, Inv. Math., **119**:1 (1995), 67-127.

[15] J.Pöschel, *Small divisors with spatial structures in infinite dimensional hamiltonian systems*, Comm. in Math. Physics, **127** (1990), 351-393.

[16] J.Pöschel, *On invariant manifolds of complex analytic mappings near fixed points*, Exp. Math., **4** (1986), 97-99.

[17] H. Rüssmann, *On the frequencies of quasi-periodic solutions of analytic nearly integrable Hamiltonian systems*, "Semin. Dyn. Systems St. Petersbourg, 1991, Progress in Nonl. Differential Equations and Appl.", **12** Birkhäuser, Basel, 1994, 160-183.

[18] C. L. Siegel, *Iteration of analytic functions*, Ann. Math., **43** (1942), 607-614.

[19] S. Sternberg, *Infinite Lie groups and formal aspects of the dynamical systems*, J. of Math. and Mech., **10** (1961), 451-474.

[20] L. Stolovitch, *Classification analytique de champs de vecteures 1-résonnants de* $(\mathbf{C}^n, 0)$, Asymptotic Analysis, **12**, 91-143, 1996.

[21] L. Stolovitch, *Complète intégrabilité singulière*, C. R. Acad. Sci. Paris Sè. I. Math, **326:6** (1998), 733-736.

[22] J. Vay, *Algèbres commutatives de champs de vecteurs isochores*, Bull. Soc. Math. France, **107**, 423-432, 1978.

[23] S. Walcher, *On differential equations in normal form*, Math. Ann., **291**, 293-314, 1991.

[24] J.-C. Yoccoz, *Conjugaison différentiable des diffeomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition Diophantine*, Ann. Sci. Ec. Norm. Supér., IV Sér., **17** (1984), 333-359.

[25] J.-C Yoccoz, *Recent development in dynamics*, "Proc. of the International Congress of Mathematicians, Zürich, Switzerland, August 1994", Birkhäuser, 1995, 246-265.

[26] E. Zehnder, *A simple proof of a generalization of a Theorem by C. L. Siegel*, Lect. Notes in Math., **597** (1977), 855-866.

[27] E. Zehnder, *Moser's implicit function theorem in the framework of analytic smoothing*, Math. Anal., (1976), 105-121.

[28] E. Zehnder, *C.L. Siegel's linearization theorem in infinite dimensions*, Manuscripta Math., **23**, (1978), 363-371.

Department of Mathematics, Chuo University,
742-1, Higashinakano, Hachioji-shi, Tokyo 192-0393, Japan
e-mail: yoshinom@tamacc.chuo-u.ac.jp