

### 有限型擬凸領域の境界上におけるベルグマン核の滑らかさについて

神本文 (JOE KAMIMOTO)

この記事では、有限型擬凸領域に関してベルグマン核の対角線集合以外の境界上における滑らかさについて考察する。特に、弱擬凸領域の場合において、ベルグマン核の実解析性に関する筆者の研究 [14] に関する解説を詳しく行う。

#### 1. 研究の背景と主結果

$\Omega$  を  $\mathbb{C}^n$  内の領域とする。 $H(\Omega)$  を、 $\Omega$  内で正則で  $L^2(\Omega)$  に属する関数全体とするとき、 $L^2(\Omega)$  内の閉部分空間になることはよく知られている。いま、 $L^2(\Omega)$  から  $H(\Omega)$  への直交射影子をベルグマン射影子と呼び  $P$  と書く。 $P$  は次のように積分核を用いて表すことができる。

$$P[f](z) = \int_{\Omega} B(z, w) f(w) dV(w) \quad \text{for } f \in L^2(\Omega).$$

ただし、 $dV$  はルベーグ測度。このとき、積分核  $B(z, w)$  を、領域  $\Omega$  のベルグマン核をよぶ。ベルグマン核は、上の定義から簡単にわかることとして、変数  $w$  を  $\Omega$  内に固定したときに、 $z$  の関数として  $H(\Omega)$  に属し、エルミート対称性 ( $B(z, w) = \overline{B(w, z)}$ ) を持つ。また、 $B(z, w)$  は  $H(\Omega)$  の関数に関する再生核と考えることもできる。ベルグマン核は、 $H(\Omega)$  の完全正規直交系  $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$  を使って次のように表示することができる。

$$B(z, w) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(z) \overline{\psi_j(w)}.$$

上の和は領域内で広義一様収束する。

重要なベルグマン核の例として、球  $\{z \in \mathbb{C}^n; \sum_{j=1}^n |z_j|^2 < 1\}$  の場合は、完全直交系として、単項式を選ぶことができ、正規化も実際にガンマ関数を使って行うことができる。この場合はさらにきれいに計算されて、次のように書くことができる。

$$B(z, w) = \frac{n!}{\pi^n} \frac{1}{[1 - \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j]^{n+1}}.$$

この表示からわかることを考えてみよう。対角線集合  $\{(z, w); z = w\}$  に制限したときに、ベルグマン核は境界で発散し、さらにその発散は境界からの距離の  $n+1$  乗の強さを持つ。対角線集合上のベルグマン核の特異性は、擬凸領域の場合に詳しく調べられており、特に強擬凸領域の場合においては、Hörmander, Diederich, C. Fefferman などにより、たいへん強い結果が得られている。また、対角線集合以外においては、上の表示から、例えば  $w$  を境界上にとめておいたとき、 $B(z, w)$  は、 $z$  の関数として境界上  $w$  を除いた部分まで、実解析的な意味で滑らかに拡張され

神本文 (JOE KAMIMOTO)

る。この事実は、後で詳しく述べるが、 $C^\infty$  な範疇では、かなり広いクラスで一般化されることが知られている。この記事では、この対角線集合以外において、ベルグマン核が境界までこめて滑らかに拡張されるかどうかを有限型擬凸領域に関して考える。

ベルグマン核の境界上の滑らかさに関する研究は、 $\bar{\partial}$ -ノイマン問題の多くの研究と深く関連している。1972年の Kerzman [19] による次の結果は、近代的な Kohn を初めとする  $\bar{\partial}$ -ノイマン問題の研究が、最初にベルグマン核の特異性の研究に応用されたものとして興味深い。 $\Omega$  を境界が  $C^\infty$ -級に滑らかな有界強擬凸領域とするとき、

$$(1.1) \quad B \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \setminus \Delta)$$

が成り立つ。ここで、 $\Delta = \{(z, z); z \in \partial\Omega\}$ 。彼の結果は、Kohn により得られた擬局所評価を用いている。後に劣楕円評価 (Subelliptic estimate) を満たすという意味で強擬凸領域の一般化である有限型擬凸領域の場合にも、結果 (1.1) が自然に拡張されることが、Kerzman の弟子である Bell [1] や Boas [3] により独立に示された。さて、この境界上の滑らかさに関する問題を、実解析的な範疇で考えてみよう。境界が実解析的に滑らかな有界強擬凸領域の場合には、

$$(1.2) \quad B \in C^\omega(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \setminus \Delta).$$

が成り立つ (Bell [2], Tartakoff [24],[25], Treve [26])。さて、実解析的な意味で、弱擬凸領域の場合を考えたとき、はたして (1.2) は常に成り立つであろうか？実際に、いくつかの場合に肯定的な結果が得られている ([16], etc.)。しかし、次の結果は予想を裏切る反例である。

**定理 1.1** (Christ-Geller [9]). 領域  $\Omega_{CG} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; \Im(z_2) > [\Re(z_1)]^{2m}\}$  ( $m = 2, 3, \dots$ ) に関して、(1.2) は成り立たない。すなわち、 $\partial\Omega_{CG} \times \partial\Omega_{CG} \setminus \Delta$  上ある点が存在して、その点の近くでは、ベルグマン核は実解析性を持たない。

[9] では、 $\partial\Omega_{CG}$  のセゲー核が対角線集合以外で実解析性を持たないこと、及び  $\partial\Omega_{CG}$  上の  $\bar{\partial}_b$  の実解析的な意味で準楕円性を持たないことも示されている。[9] における上の定理の証明では、ベルグマン核の斉次性による背理法が用いられている。証明が明解である分、直接その特異性の様子を知ることが難しいように思われる。さらに、斉次性は一般の領域の場合には、期待できないので、さらに広いクラスの領域の場合を研究する際、直接彼等の方法は適応できない。ここで、我々は次の問題について考える。

**問題 1.** 上の定理におけるベルグマン核の特異性を直接取り出そう。

**問題 2.**  $\Omega_{CG}$  の摂動で (1.2) が成り立たないような領域をたくさん見つけよう。

この記事の目的は、上の二つの問題を考察することである。最終的には、(1.2) が成立するための、領域に関する幾何学的な条件を与えることが大きな目標となる。問題 1 と問題 2 は密接に関係しており、第 3 節で問題 1 について考えるが、これが我々が現在与え得る問題 2 の部分的な解答の証明に本質的に役に立っている。先に問題 2 に関する我々の結果を述べたい。

**定理 1.2.** すべての実解析的に滑らかな境界を持つ 2 次元弱擬凸柱状領域に関して、(1.2) は成り立たない。

注意として、Christ-Geller の反例は、底が  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > x^{2m}\}$  ( $m = 2, 3, \dots$ ) の柱状領域と本質的に同じである。柱状という形を保ったままの摂動であれば、退化した点において、ベルグマン核の実解析性が必ず失われるというのが、この定理の主張である。これより大きな摂動に関しては、我々の方法を直接応用することは難しいと思われる。なぜなら、我々は次の節で述べる積分表示を使って議論を進めており、一般の領域に関して、そのタイプの表示は具体的に得られていないからである。

## 2. 柱状領域のベルグマン核の積分表示

柱状領域上の  $L^2$  空間に関しては、ペーリー・ウィナー型の定理が成り立ち、このことから、ベルグマン核が積分を用いて表示されることがわかる ([10] を参照)。我々の解析は、この表示を出発点として行う。

領域  $\omega \subset \mathbb{R}^n$  を底とする柱状領域

$$\Omega = \mathbb{R}^n + i\omega \subset \mathbb{C}^n$$

のベルグマン核は、次のように書くことができる。

$$(2.1) \quad \begin{aligned} B(z, w) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Lambda^*} e^{i(z-\bar{w}, t)} \frac{dt}{D(t)}, \\ D(t) &= \int_{\omega} e^{-2\langle t, y \rangle} dy, \\ \Lambda^* &= \{t \in \mathbb{R}^n; D(t) < \infty\}. \end{aligned}$$

我々は、今後 2 次元かつ境界が滑らかな場合について考える。我々がモデルの場合として考える領域  $\Omega_m = \mathbb{R}^2 + i\omega_m$  ( $\omega_m = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2; y_2 > y_1^{2m}\}$ ) の場合は、次のようにもう少し具体的に書くことができる。 $\zeta_j = (z_j - \bar{w}_j)/2i$  ( $j = 1, 2$ ),  $\hat{\tau} = \tau^{1/(2m)}$  とするとき、

$$(2.2) \quad \begin{aligned} B(z, w) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{-2\zeta_2 \tau} \tilde{F}(\zeta_1, \tau) \tau^{1+\frac{1}{m}} d\tau \\ \tilde{F}(\zeta_1, \tau) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-2\zeta_1 v \hat{\tau}} \frac{1}{\varphi_m(v)} dv \\ \varphi_m(v) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-2(w^{2m} + vw)} dw \end{aligned}$$

この場合は、前節で述べた Christ-Geller の反例と本質的に同じ領域である。この表示から直接境界上の滑らかさが壊れていることを見ることは、容易と思えない。次の節では、この場合について、特異性を直接的に取り出すことをこころみよう。

神本文 (JOE KAMIMOTO)

### 3. モデルの場合の解析

積分表示 (2.2) を基に、ベルグマン核の特異性をモデル領域  $\Omega_m$  ( $m = 2, 3, \dots$ ) の場合について解析する。この節の目標は、問題 1 に対するひとつの解答を与えることである。以下、 $m$  は特に断りがない限り 2 以上の自然数とする。

3.1. 準備.  $w = (0, 0)$  とし、さらに  $\partial\Omega_m$  上に座標  $(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  を次のように導入する:

$$\begin{cases} z_1 = z (= x + iy), \\ z_2 = t + iy^{2m}. \end{cases}$$

ここで、

$$K(z, t) := B((z, t + iy^{2m}); (0, 0))$$

とおくとき、(2.2) から次のように積分表示が得られる。

$$(3.1) \quad K(z, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{it\tau} e^{-y^{2m}\tau} F(z, \tau) \tau^{1+\frac{1}{m}} d\tau,$$

$$(3.2) \quad F(z, \tau) = \int_{-\infty}^\infty e^{izv\hat{\tau}} \frac{1}{\varphi_m(v)} dv$$

$\varphi_m(v)$  と  $\hat{\tau}$  の定義は前節を参照。さて、上の表示には 3 つの積分があるが、変数  $v$  を複素変数とみなし、その積分を留数計算を用いてある種の和の形に書き直す。

3.2.  $\varphi_m(v)$  の解析. 留数計算を実行するためには、 $\mathbb{C}$  上の関数  $\varphi_m(v)$  の性質を詳細に調べなくてはならない。 $\varphi_m(v)$  の性質としてすぐにわかるものを箇条書きでまとめておこう。

- $\varphi_m(v)$  は、整関数である。
- $\varphi_m(v)$  は、偶関数である (i.e.  $\varphi_m(-v) = \varphi_m(v)$ )。
- $\varphi_m(v)$  は、次の常微分方程式をみたす ( $c_m$  は、 $m$  にのみ依存する定数)。

$$(3.3) \quad \frac{d^{2m-1}}{dv^{2m-1}} \varphi_m(v) - c_m v \varphi_m(v) = 0$$

- $\varphi_m(v)$  は、虚軸上の関数として急減少の関数である。

以上は、すべての  $m \in \mathbb{N}$  について成立する事実である。さらに詳しい性質を示す以下の 2 つの補題は、留数計算を実行する際、必要となるものである。ひとつは、無限遠点での漸近挙動に関するものである。

補題 3.1 ([17]).

$$A(v) = c_1 v^{\frac{1-m}{2m-1}} e^{c_2 v^{\frac{2m}{2m-1}}}$$

( $c_1, c_2 > 0$ ) とするとき、以下が成り立つ。

- もし、 $-\frac{\pi}{2} < \arg v < \frac{\pi}{2}$  のとき、 $\varphi_m(v) = A(v) \{1 + O(|v|^{-\frac{2m}{2m-1}})\}$  as  $|v| \rightarrow \infty$
- もし、 $\frac{\pi}{2} < \arg v < \frac{3\pi}{2}$  のとき、 $\varphi_m(v) = A(v e^{-\pi i}) \{1 + O(|v|^{-\frac{2m}{2m-1}})\}$  as  $|v| \rightarrow \infty$

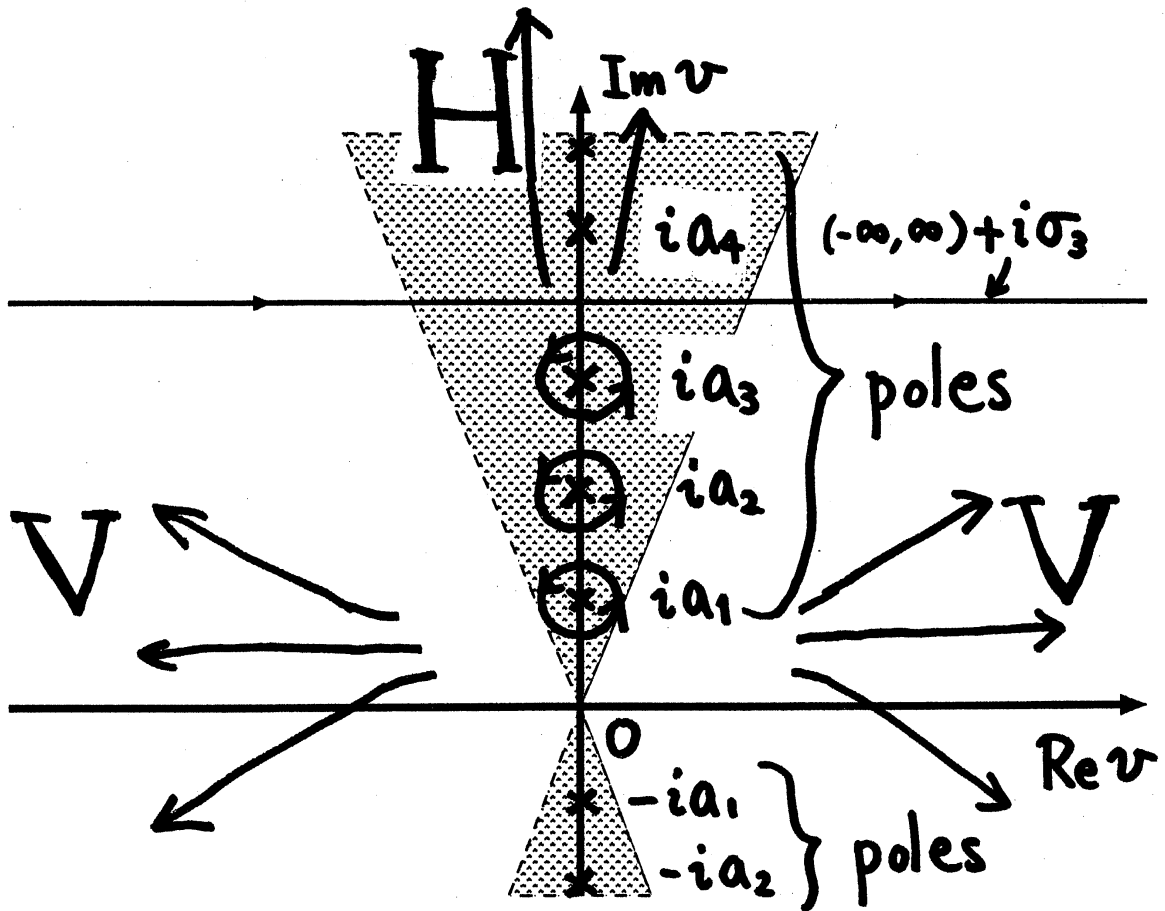


FIGURE 1.  $\frac{1}{\varphi_m(v)}$  の様子 ( $m = 2, 3, \dots$ )

この補題の示すだいたいの様子は、図を参照して頂きたい。図において、 $H$  は「丘 (Hill)」または、 $V$  は「谷 (Valley)」を表し、それぞれ  $|1/\varphi_m(v)|$  がその方向に大きく、または小さくなっていることを示している。もうひとつの補題は、零点の性質に関するものである。

補題 3.2 ([22],[18]).  $\varphi_m(v)$  のすべての零点は、虚軸上に存在し単純である。

ただし、 $f(x)$  の零点が単純であるとは、 $f(x)$  の零点  $a$  について  $f'(a) \neq 0$  となることである。

ここで、いくつかの注意を述べる。 $m = 1$  のとき、 $\varphi_m(v)$  は  $\sqrt{\pi/2}e^{v^2/2}$  となり、この関数は零点を持たない。 $m \geq 2$  の場合は、常微分方程式 (3.3) に関して、不確定特異点である無限遠点において、ストークス現象が  $\arg v = \pm\pi/2$  上おきて、これが零点を特異方向に生み出している。この相違が後の実解析性に関する議論において、決定的に重要となる。厳密にすべての零点が虚軸上にあるという事実は、自明なことではなく、Pólya [22] により証明されている。また、鞍点法から  $\varphi_m(v)$  は十分遠方では 0 位の変形ベッセル関数  $I_0$  を用いて近似することができ、Rouché の定

神本文 (JOE KAMIMOTO)

理より十分遠方では、零点が単純であることを示すことができる。すべての零点が単純であることも、自明な事実ではなく、最近筆者-Ki-Kim [18] により証明された。

3.3. 留数計算. (3.2) の積分を複素平面  $\mathbb{C}$  上の積分路とみなし、これを動かす。このとき、 $z$  の値により動かし方が変わる。まず、 $x = \Re(z) > 0$  のときを考える。補題 3.2 から、 $\varphi_m(v)$  の零点集合は、

$$\{\pm ia_j; 0 < a_j < a_{j+1}, (j \in \mathbb{N})\}$$

と書くことができる。 $\sigma_j := (a_j + a_{j+1})/2$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) とおき、 $N \in \mathbb{N}$  を任意に固定する。補題 3.1 より、積分路を  $(-\infty, \infty)$  から  $(-\infty, \infty) + i\sigma_N$  に動かすことができる。このとき、補題 3.2 より  $\{\pm ia_j\}$  が  $1/\varphi_m(v)$  の 1 位の極であるから、留数の定理より

$$(3.4) \quad F(z, \tau) = 2\pi i \sum_{j=1}^N \frac{1}{\varphi'_m(ia_j)} e^{-a_j z \hat{\tau}} + r_N(z, \tau)$$

が得られる。

$\Re(z) < 0$  の場合には、積分路を  $(-\infty, \infty) - i\sigma_N$  に動かす。

3.4. 漸近展開. 以下では、 $\Re(z) > 0$  の場合のみ考える。上で得た (3.4) を (3.1) に代入する。このとき、

$$(3.5) \quad K(z, t) = \frac{i}{\pi} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\varphi'_m(ia_j)} K_j(z, t) + R_N(z, t),$$

ここで、

$$(3.6) \quad K_j(z, t) = \int_0^\infty e^{it\tau} e^{-y^{2m}\tau} e^{-a_j z \hat{\tau}} \tau^{1+\frac{1}{m}} d\tau$$

が得られる。さて、各  $K_j(z, t)$  の性質を調べてみよう。変数  $t$  に関して  $k$  回微分して  $y = t = 0$  を代入したものは、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k}{\partial t^k} K_j(x + i0, 0) &= \int_0^\infty (i\tau)^k e^{-a_j x \hat{\tau}} \tau^{1+\frac{1}{m}} d\tau \\ &= 2mi^k \int_0^\infty e^{-a_j x s} s^{2mk+4m+1} ds \\ &= 2mi^k \frac{\Gamma(2mk+4m+2)}{(a_j x)^{2mk+4m+2}} \end{aligned}$$

となるが、これはコーシーの不等式を満たさないことを示している。すなわち、集合  $\{(x + i0, 0); x \neq 0\}$  上、 $K_j$  は  $C^\infty$ -級ではあるが実解析的ではない。さらに詳しく、Gevrey 類 ( $G^s$ ) の範疇からみれば、 $K_j$  は  $s \geq 2m$  のとき、 $G^s$  に属するが、それ以上にはよくなるということがわかる。

さて、(3.5) における  $R_N$  を除く和は、特異性の意味で単調に弱くなっている。なぜなら、上の計算式において、 $k$  を大きくしたとき、分母にある  $a_j$  の大きさが問題

になるからである。そのことから、次の命題を認めれば、(3.5) は特異性の強さに関する漸近展開とみなすことができる。

**命題 3.1.**

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} R_N(x + i0, 0) \right| \leq C_N \frac{\Gamma(2mk + 4m + 2)}{(\sigma_N x)^{2mk + 4m + 2}} \quad (C_N > 0 \text{ は定数}).$$

上の命題の証明は、[15],[14] を参照。命題 3.1 から、 $K$  の特異性の強さは  $K_1$  のそれと本質的に同じであり、このことから 定理 1.1 が導かれる。

**注意**  $N$  を無限に大きくしたとき、和 (3.5) は、どの  $(z, t)$  においても収束しない。それは、 $|1/\varphi'_m(ia_j)|$  が  $j$  が大きくなるにつれてたいへん早く大きくなるからである。しかし、この発散級数は、ボレル総和法を用いて収束させることができ、さらにラプラス変換を用いると、絶対収束した和による  $K(z, t)$  の表示が得られる。詳しくは、[15] を参照のこと。

#### 4. 定理 1.2 の証明の概略

定理 1.2 の証明は、前節で行った議論を 摂動に関してより慎重に行えばよい。完全な証明は、[14] を参照して頂くことにして、ステップのみを簡単に説明する。

4.1. 座標の導入。問題となる弱擬凸な点を原点に移し、さらに線形変換により、局所的に柱状領域の底が次のように表されるようにしておく。

$$\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2; y_2 > f(y_1)\}.$$

ここで、 $f(y_1)$  について  $f(y_1) = y_1^{2m} g(y_1)$  をみだし、 $m$  は 2 以上のある自然数、 $g(y_1)$  は、原点の近くで実解析的な滑らかでかつ  $g(0) > 0$  とする。このような操作は可能であり、さらに上の変換によりベルグマン核の特異性に関する性質は変わらないことを注意しておく。

4.2. 局所化。柱状領域のベルグマン核の特異性が局所的に決まるということを示す。さらに、(2.1) における双対錐  $\Lambda^*$  を重要な方向以外は細くしても、特異性には影響がないことも示すことができる。これらの議論から、パラメーター付きの次の関数  $K(z, t; \tau_0, \rho_0)$  ( $\tau_0 > 0, \rho_0 > 0$ ) が、元のベルグマン核と同じ特異性を持つことが示される。(i.e.  $K(\cdot, \cdot; \tau_0, \rho_0) - K(\cdot, \cdot) \in C^\omega(\{(0, 0)\})$ .)

$$(4.1) \quad K(z, t; \tau_0, \rho_0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\tau_0}^{\infty} e^{it\tau} e^{-f(y)\tau} F(z; \hat{\tau}, \rho_0) \tau^{1+\frac{1}{m}} d\tau,$$

$$(4.2) \quad F(z; \hat{\tau}, \rho_0) = \int_{-\rho_0 \hat{\tau}^{2m-1}}^{\rho_0 \hat{\tau}^{2m-1}} \frac{e^{iz\hat{\tau}v}}{\varphi(v; \hat{\tau})} dv$$

$$\varphi(v, \hat{\tau}) = \int_{-\delta_0 \hat{\tau}}^{\delta_0 \hat{\tau}} e^{-2g(w/\hat{\tau})w^{2m} - 2vw} dw.$$

ただし、 $\delta_0 > 0$  も一つのパラメーターであるが、十分小さく固定しておくことにする。この局所化可能性から、定理 1.2 は局所的な条件において成立することがわかる。

神本文 (JOE KAMIMOTO)

4.3.  $\varphi(v, \hat{\tau})$  の解析. 留数計算を行うために、 $\varphi(v, \hat{\tau})$  の解析を行う。十分  $\hat{\tau}$  が大きいときには、 $\varphi(v, \hat{\tau})$  は、 $\varphi(v)$  によりある意味で近似できることがわかる。特に重要なのは、任意の  $N \in \mathbb{N}$  に対して  $\hat{\tau}$  を十分大きくすれば、原点から近くの  $N$  個の零点が単純となることである。

4.4. 留数計算. (4.2) にある積分路を、§3.3 と同様な方向に変形し、(3.4) と類似する和を得ることができる。その際、 $\tau_0, \rho_0$  の値を適当に調整する必要がある。

4.5. 漸近展開. 上で得た和を (4.1) に代入して、(3.5) と類似する和が得られる。各項は、実解析性を失っているばかりでなく、 $s \geq 2m$  のとき  $G^s$  に属するが、それ以上はよくなることわかれる。また、剰余項に関しても、命題 と類似する不等式を導くことができる。このことから、定理 1.2 が導かれる。

## 5. コメント

この記事の最後に、いくつかの注意を述べると同時に、今後考えたら面白いと思われる問題をいくつかあげたい。実はもうすでに、よくわかっていることもあるかもしれないが、なにかコメントがあれば、是非筆者宛に連絡をして頂ければとても嬉しい。

1. 3.3 節における議論において、 $m = 1$  を代入した場合、 $K(z, t)$  は、集合  $\{(x + i0, 0); x \neq 0\}$  上  $G^2$  には属するが、それ以上はよくなり、コーシーの不等式をみたさない。実際は、 $m = 1$  の場合は  $\Omega_m$  は強擬凸領域となり、その集合上  $K(z, t)$  は実解析的に滑らかである。このように、 $m \geq 2$  に関する議論が、 $m = 1$  にまで一般化されないことがわかるが、この現象は、整関数  $\varphi_m(v)$  の零点の存在の有無により引き起こされていることがわかる。この現象をどのように解釈したらよいかは、現在のところ筆者にはよくわからない。

2. 1 節にも述べたように、この実解析性の問題は、 $\bar{\partial}, \bar{\partial}_b$  作用素の準楕円性の問題と深く関係している。より具体的な形で述べると、以下の 3 つの事柄は、互いに深く関連しているはずである (同値な条件?)。

- (i)  $\square_b$  が、局所的な意味での解析的準楕円性を持つ。
- (ii) ベルグマン射影子が、局所的な意味で境界まで込めて実解析性を保つ。
- (iii) ベルグマン核が、対角線集合上実解析的に滑らかに境界まで拡張される。

Bell [2] は、有界な擬凸領域に関しては、(i) から (iii) が従うことを示している。

3. 1 節にも述べたように、我々の解析は、完全に 2 節にある積分表示を基に行っているため、4 節に行った議論をさらに一般化することは、容易でないように思われる。そのためには、新たに同様な表示を模索するか、または別のアプローチが必要となる。

4. 有限型 CR 多様体上の  $\bar{\partial}_b$  に関する問題と同様に、有限型 2 階退化楕円型作用素の実解析的準楕円性についての研究は現在も盛んに行われている。しかし、一般にはまだ正確な成立条件が得られるには、程遠い状態であると言ってよい。例え



ば、Christ, Hanges, Himonas 等による最近の研究は、実解析性が成り立たない作用素に関するものとして非常に興味深い。

## REFERENCES

- [1] S. R. Bell, *Differentiability of the Bergman kernel and pseudolocal estimates*, Math. Z. **192** (1986), 467–472.
- [2] ———, *Extendibility of the Bergman kernel function*, Complex analysis, II (College Park, Md., 1985–86), 33–41, Lecture Notes in Math., **1276**, Springer, Berlin-New York, 1987.
- [3] H. P. Boas, *Extension of Kerzman's theorem on differentiability of the Bergman kernel function*, Indiana Univ. Math. J. **36** (1987), 495–499.
- [4] M. Christ, *Analytic hypoellipticity breaks down for weakly pseudoconvex Reinhardt domains*, International Math. Research Notices **1** (1991), 31–40.
- [5] ———, *Remarks on the breakdown of analyticity for  $\bar{\partial}_b$  and Szegő kernels*, Proceedings of 1990 Sendai conference on harmonic analysis (S. Igari, ed.), Lecture Notes in Math. Springer, 61–78.
- [6] ———, *Remarks on analytic hypoellipticity of  $\bar{\partial}_b$* , Modern method in complex analysis, Princeton Univ. Press, 41–62.
- [7] ———, *Certain sums of squares of vector fields fail to be analytic hypoelliptic*, Comm. P. D. E., **10** (1991), 1695–1707.
- [8] ———, *A class of hypoelliptic PDE admitting nonanalytic solutions*, Contemporary Math., AMS **137** (1992), 155–167.
- [9] M. Christ and D. Geller, *Counterexamples to analytic hypoellipticity for domains of finite type*, Ann. of Math. **235** (1992), 551–566.
- [10] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on symmetric cones*, Oxford Univ. Press, New York (1994).
- [11] N. Hanges and A. Himonas, *Singular solutions for sums of squares of vector fields*, Comm. P. D. E. **16** (1991), 1503–1511.
- [12] ———, *Non-analytic hypoellipticity in the presence of symplecticity*, Proc. of Amer. Math. Soc., **126** (1998), 405–409.
- [13] F. Haslinger, *Szegő kernels of certain unbounded domains in  $\mathbb{C}^2$* , Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **39** (1994), 939–950.
- [14] J. Kamimoto, *Non-analytic Bergman and Szegő kernels for weakly pseudoconvex tube domains in  $\mathbb{C}^2$* , to appear in Math. Z.
- [15] ———, *On the singularities of non-analytic Szegő kernels*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **6** (1999), 13–39.
- [16] ———, *Singularities of the Bergman kernel for certain weakly pseudoconvex domains*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **5** (1998), 99–117.
- [17] ———, *On an integral of Hardy and Littlewood*, Kyushu J. of Math. **52**, (1998) 249–263.
- [18] J. Kamimoto, H. Ki and Y. O. Kim, *On the multiplicities of the zeros of Laguerre–Pólya functions*, to appear in Proc. of Amer. Math. Soc.
- [19] N. Kerzman, *The Bergman kernel function. Differentiability at the boundary*, Math. Ann. **195** (1972), 149–158.
- [20] A. Nagel, *Vector fields and nonisotropic metrics*, Beijing Lectures in Harmonic Analysis, (E. M. Stein, ed.), Princeton University Press, Princeton, NXJ, (1986), 241–306.
- [21] A. Nagel, J. P. Rosay, E. M. Stein and S. Wainger, *Estimates for the Bergman and Szegő kernels in  $\mathbb{C}^2$* , Ann. of Math. **129** (1989), 113–150.
- [22] G. Pólya, *Über trigonometrische Integrale mit nur reelen Nullstellen*, J. Reine Angew. Math. **58** (1927), 6–18.

神本文 (JOE KAMIMOTO)

- [23] S. Saitoh, *Integral transforms, reproducing kernels and their applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series **369**, Addison Wesley Longman, UK (1997).
- [24] D. Tartakoff, *Local analytic hypoellipticity for  $\square_b$  on non-degenerate Cauchy-Riemann manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **75** (1978), 3027-3028.
- [25] ———, *The local real analyticity of solutions to  $\square_b$  and the  $\bar{\partial}$ -Neumann problem*, Acta Math., **145** (1980), 177-204.
- [26] F. Trèves, *Analytic hypoellipticity of a class of pseudodifferential operators*, Comm. in P.D.E., **3** (1978), 475-642.

熊本大学 大学院自然科学研究科

*E-mail address:* joe@sci.kumamoto-u.ac.jp