

岡本初期値空間の代数幾何的研究

齋藤 政彦 & 竹部太郎
神戸大学理学部・自然科学研究科

1999 年 11 月 6 日

1 岡本-Painlevé 対とその分類

岡本氏による Painlevé 方程式の初期値空間の研究 [O] 以来、Painlevé 方程式と同値な Hamilton 系とその初期値空間の研究がなされてきた (cf. [O], [MMT]). そこで表れる初期値空間はある 2 次元コンパクト複素多様体 S から、ある因子 (Divisor) D を除いたもの $S - D$ であるが、代数幾何的にその性質を整理してみると次のような定義を与える事が出来る。

定義 1.1 2 次元コンパクト複素射影体 S とその上の正因子 $Y = \sum_{i=1}^r a_i Y_i$ の対 (S, Y) が次の性質を満たすとき、岡本-Painlevé 対 (Okamoto-Painlevé pair) と呼ぶ。

(i) S 上の有理 2 形式 ω で ω の定める因子 (ω) が $-Y$ となるものが存在する、すなわち ω の極因子は重複度をこめて Y であり、 $\text{supp } Y$ 以外にはゼロを持たない。

(ii) 各 i ($1 \leq i \leq r$) について、 $Y \cdot Y_i = \deg Y|_{Y_i} = 0$ 。

(iii) $D := Y_{\text{red}} = \sum_{i=1}^r Y_i$ を Y の被約成分とする。そのとき $S - D$ は \mathbf{C}^2 を Zariski 開集合として含む。

(iv) (iii) の開集合 \mathbf{C}^2 とするとき、補集合 $F = S - \mathbf{C}^2$ は被約正規交差因子である。

Remark 1.1 (i) 上の有理 2-形式 ω は、 $S - D$ 上の正則シンプレクテック構造を与える。

(ii) K_S を S 上の標準因子類とする。条件 (i) は $K_S = [-Y] - K_S = [Y]$ を意味する。ただし、ここで $[Y]$ は因子 Y の線型同値類を示す。

(iii) 条件 (iv) は Y の被約部分 $D = Y_{red}$ もまた 正規交差因子であることを意味する.

(iv) 岡本氏によって与えられた Painlevé 方程式の 初期値空間はすべて、上の意味である岡本-Painlevé 対 (S, Y) に対して $S - Y$ の形にかける. ([O], [ST] および [MMT]).

(v) 坂井氏 [Sak] は上の定義の中の条件 (i), (ii) を満たす有理曲面 S を、一般化された Halphen 曲面とよび、曲面の普遍族にはたらくクレモナ変換と差分 Painlevé 方程式を関係づけた.

次の定理は、岡本-Painlevé 対の分類に関する定理である. 証明の詳細は、[S-T1] を参照して欲しい.

定理 1.1 (S, Y) を、岡本-Painlevé 対とする時、次が成立する.

(i) S は、有理曲面である.

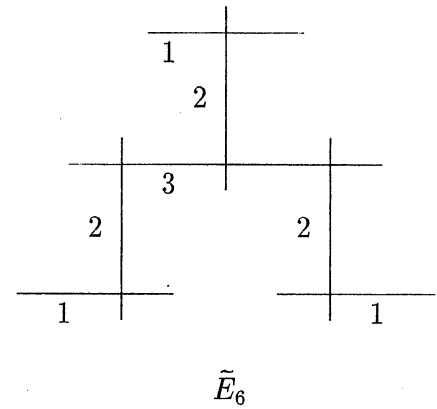
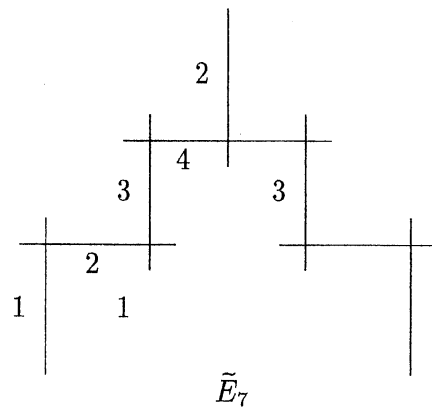
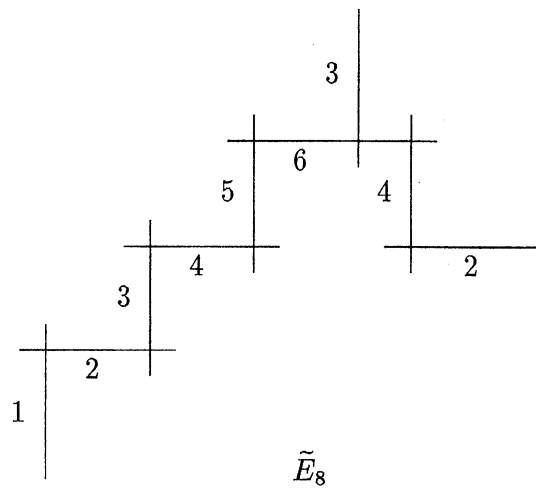
(ii) 因子 $Y = \sum_{i=1}^r m_i Y_i$ の configuration は、その重複度をこめて小平の楕円曲面の特異ファイバーのリスト [Kod1] の一つと一致し、次のリストのどれか一つになる.

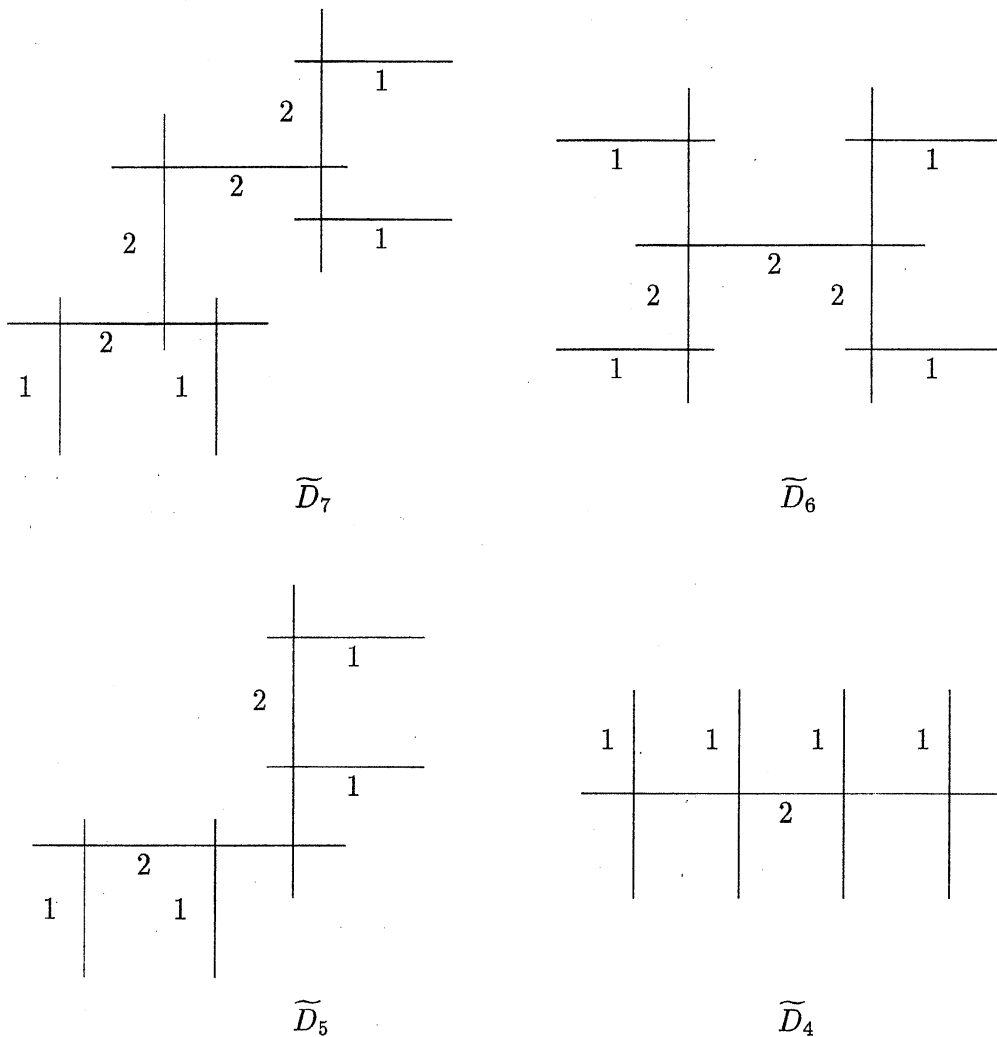
(iii) すべての岡本-Painlevé 対は、 H を \mathbf{P}^2 の直線とするととき、 $(\mathbf{P}^2, 3H)$ の境界 H の infinitely near な点もこめた点でのブローアップ、ブローダウンで得られる.

Y	\tilde{E}_8	\tilde{E}_7	\tilde{D}_7	\tilde{D}_6	\tilde{E}_6	\tilde{D}_5	\tilde{D}_4
<i>Kodaira's notation</i>	II^*	III^*	I_3^*	I_2^*	IV^*	I_1^*	I_0^*
<i>Painlevé equation</i>	P_I	P_{II}	P_{III}^*	P_{III}	P_{IV}	P_V	P_{VI}

図 1 正因子 Y の図

以下に、定理に表れる、それぞれの因子 Y の重複度をこめた configuration を示す. ここで、実直線は \mathbf{P}^1 を表し、それらの交わりは全て正規交差である. また、実直線の傍に記されている数字はその因子の Y 中の重複度を示す.





Remark 1.2 [S-T1] では、 $F = S - \mathbf{C}^2$ の分類も与えている. この事から岡本-Painlevé 対 (S, Y) については \mathbf{C}^2 if Y is not of type \widetilde{E}_8 . (Cf. [ST], [MMT]). また、岡本-Painlevé 対 (S, Y) の S 自体は \mathbf{P}^2 の 9 点 blow-up で得られる.

例 1.1 P_I 型の Painlevé 方程式の初期値空間を構成してみよう. これは岡本-Painlevé 対の \widetilde{E}_8 型に対応している. この構成では、 $S - D = S - Y_{red}$ は \mathbf{C}^2 を含むが、 \mathbf{C}^2 と同型なアフィン開集合で覆えない事がわかる. この事は、正則シンプレクテック形式が他のチャートでは極をゆるす事を意味する.

各 $t \in B_I = \mathbf{C}$, Hirzebruch 曲面 $\Sigma(t) := \Sigma_{(0)}^{(2)} = \mathbf{F}_2$ を考え、 $\Sigma(t)$ 上の曲線 $D_0(t) = \{y_0 = 0\} \cup \{y_2 = 0\}$ と $D'_0(t) = \{x_2 = 0\} \cup \{x_3 = 0\}$ をとる。 $\Sigma(t)$ の反標準束 $-K_{\Sigma(t)}$ に属する正因子として $2D_0(t) + 4D'_0(t) \in |-K_{\Sigma(t)}|$ をとる。(図 2 参照). $a_0(t) = \{(x_3, y_3) = (0, 0)\}$ を blow-up する.

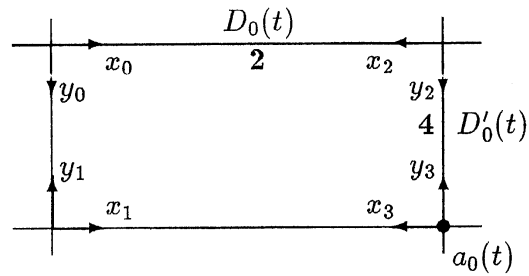


図 2.

$D_1(t)$ を例外曲線とし (z_1, W_1) と (Z_1, w_1) を $D_1(t)$ の近傍の局所座標で $D_1(t) = \{z_1 = 0\} \cup \{w_1 = 0\}$ と $Z_1 = W_1^{-1}$ をみたすものとしよう.

$$(z_1, W_1) = (x_3, x_3^{-1}y_3),$$

$$(Z_1, w_1) = (x_3y_3^{-1}, y_3).$$

である.

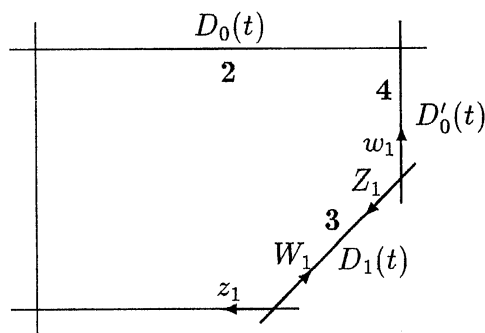


図 3

次に点 $a_1(t) = \{(Z_1, w_1) = (0, 0)\}$ を blow-up し、 $D_2(t)$ を例外曲線とし $D_2(t)$ に沿った局所座標 (z_2, W_2) , (Z_2, w_2) を $D_2(t) = \{z_2 = 0\} \cup \{w_2 = 0\}$ と $Z_2 = W_2^{-1}$ を満たすようにとる. 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} (z_2, W_2) &= (x_3 y_3^{-1}, x_3^{-1} y_3^2), \\ (Z_2, w_2) &= (x_3 y_3^{-2}, y_3). \end{aligned}$$

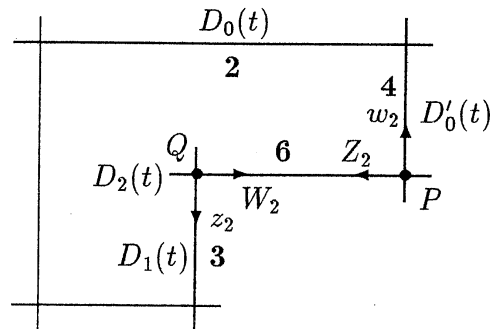


図 4

以下の図にあるように blow-up を繰り返す.

$$\begin{cases} z_3 = x_3 y_3^{-2} - 1/4, \\ W_3 = (x_3 y_3^{-2} - 1/4)^{-1} y_3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_3 = (x_3 y_3^{-2} - 1/4) y_3^{-1}, \\ w_3 = y_3. \end{cases}$$

局所座標 (z_i, W_i) , (Z_i, w_i) は $D_i(t) = \{z_i = 0\} \cup \{w_i = 0\}$ $Z_i = W_i^{-1}$ を満たすようにとる. ただし $D_i(t)$, $(i = 4, 5, 6, 7)$ に対応する blow-up の例外曲線. また各 blow-up の中心 $a_i(t)$ は次で与えられる. ([O].)

$$\begin{aligned} a_3(t) &= \{(Z_3, w_3) = (0, 0)\}, \\ a_4(t) &= \{(Z_4, w_4) = (0, 0)\}, \\ a_5(t) &= \{(Z_5, w_5) = (0, 0)\}, \\ a_6(t) &= \{(Z_6, w_6) = (t/2, 0)\}, \\ a_7(t) &= \{(Z_7, w_7) = (1/2, 0)\}. \end{aligned}$$

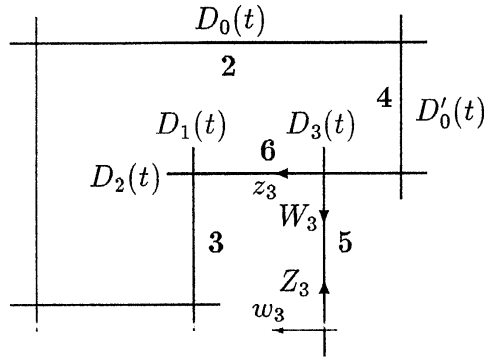


図 5

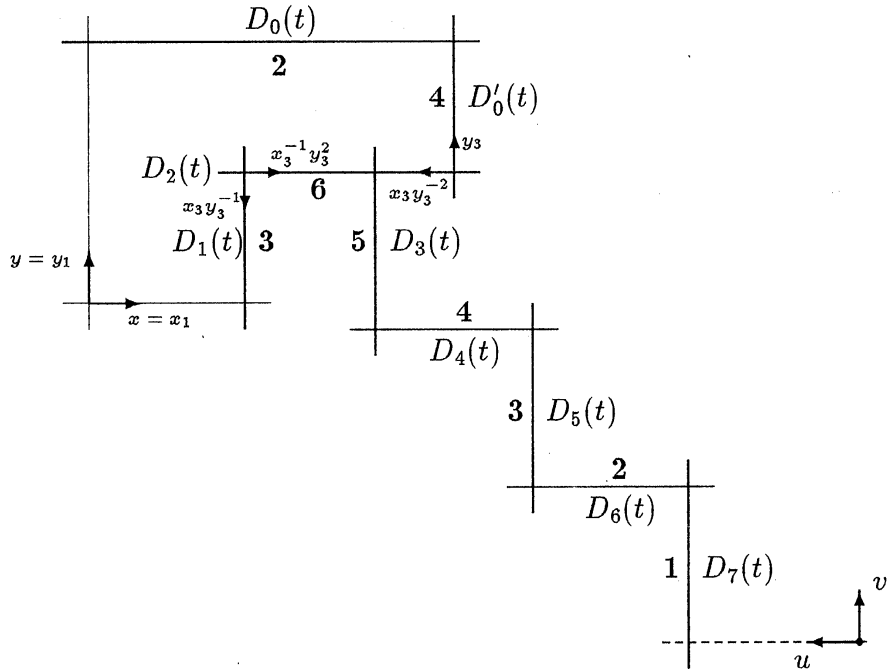


図 6

ここで $Y = 2D_0 + 4D'_0 + 3D_1 + 6D_2 + 5D_3 + 4D_4 + 3D_5 + 2D_6 + D_7$,
 $D = Y_{red}$ と置く. 簡単の為に (x_1, y_1) を (x, y) と置き $U = \text{Spec } \mathbf{C}[x, y]$
 とする. $(U; (x, y)) \subset S - D$. である. このとき曲線 D_8 を考え (u, v) を
 D_8 の無限遠点の近傍の局所座標とする. $U' = \text{Spec}[u, v] \cong \mathbf{C}^2$ と置く

と $D_8 \cap U' = \{u = 0\}$ である. 8回の blow-up による、座標変換により $(U; (x, y))$ と $(U'; (u, v))$ の変換は次で与えられることがわかる.

$$u = x^{15}y^{-8} - \frac{1}{4}x^{12}y^{-6} - \frac{t}{2}x^4y^{-2} + \frac{1}{2}x^2y^{-1}, \quad (1)$$

$$v = -x^{-2}y. \quad (2)$$

ここで (u, v) による 2 形式を書いてやると

$$du \wedge dv = x^{12}y^{-8} dx \wedge dy.$$

一方

$$x = A^{-1}v^{-2},$$

$$y = -A^{-2}v^{-3},$$

$$A = uv^6 + \frac{1}{2}v^5 + \frac{t}{2}v^4 + \frac{1}{4}.$$

と書けるので

$$x^{12}y^{-8} = A^4 = \left(uv^6 + \frac{1}{2}v^5 + \frac{t}{2}v^4 + \frac{1}{4}\right)^4.$$

よって

$$dx \wedge dy = \left(uv^6 + \frac{1}{2}v^5 + \frac{t}{2}v^4 + \frac{1}{4}\right)^{-4} du \wedge dv.$$

図 7 より 曲線 $C = \{uv^6 + (1/2)v^5 + (t/2)v^4 + (1/4) = 0\}$ の閉包は $D'_0(t)$ と一致する事がわかる. また $C = D'_0(t)$ の有理 2 形式 $dx_0 \wedge dy_0$ の極の位数は 4 であることがわかる. この \tilde{E}_8 型の岡本-Painlevé 対 (S, Y) については, $S - Y_{red}$ は 2 枚のアフィン開集合 $(U; (x_1, y_1)) \cong \mathbf{C}^2$ と $(U'; (u, v)) - C \cong \mathbf{C}^2 - C$ で覆われる事がわかる.

例 1.2 \tilde{D}_7 の構成

$\mathbf{F}_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ 上の反標準因子 $-K_{\mathbf{F}_0} = 2s_0 + 2f$ を次の様に blow-up して \tilde{D}_7 が型の岡本-Painlevé 対の例を得る. 次の図で実線の近くの二つの数字は対応する既約曲線の $-K_S$ に置ける重複度と自己交点数であり、また、破線は (-1) -曲線であり. Y には含まれないが、 $F = S - \mathbf{C}^2$ には含まれる.

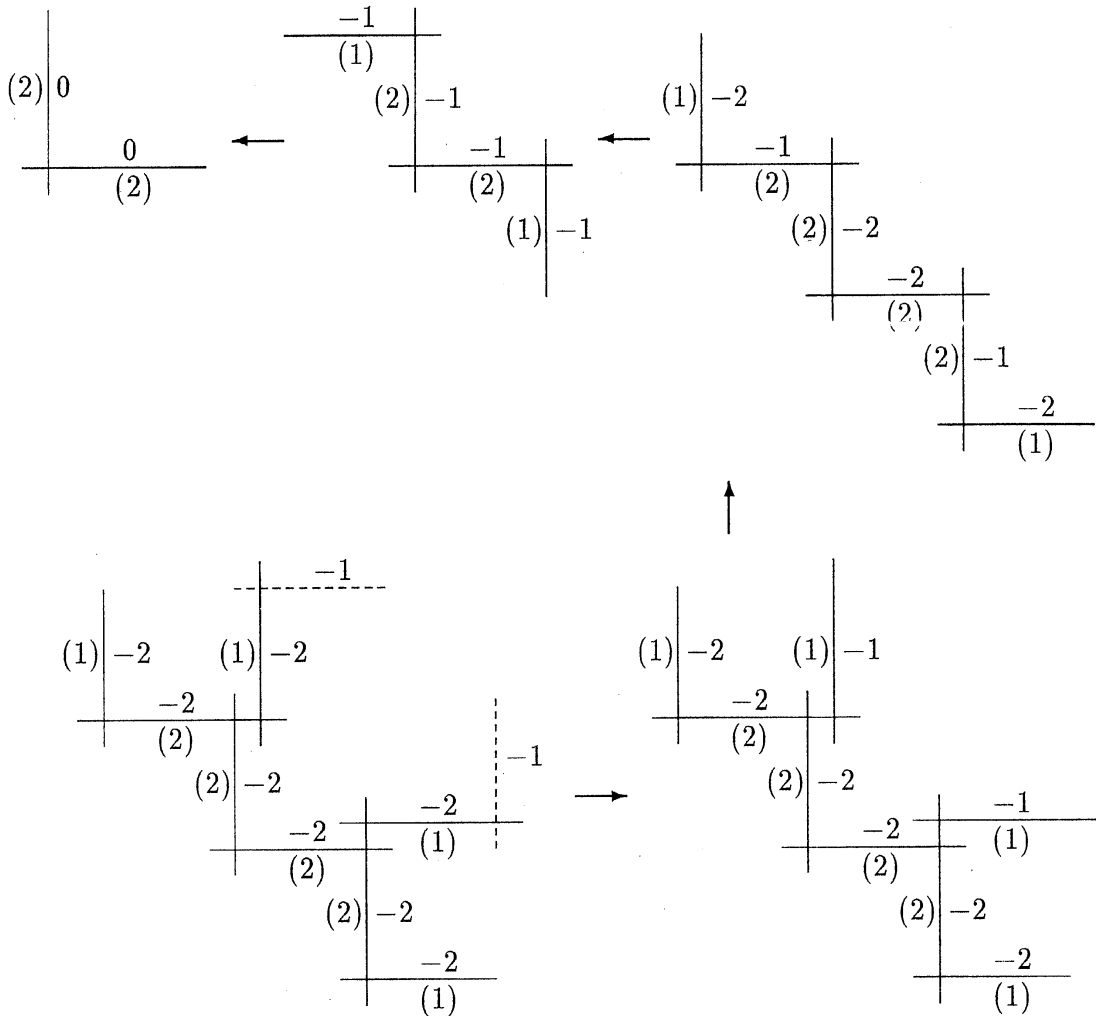


図 8

2 岡本-Painlevé 対の変形

対の複素構造の変形論

(X, H) を、コンパクト複素多様体 X とその上の被約正規交差因子 H の対とする. この対 (X, H) の複素構造の変形理論を川又 [Kaw] に従って復習しよう.

$\Omega_X^1(\log H)$ で高々 H で対数的極しかゆるさない有理 1 形式の芽のなす層とする. また次の様に置く.

$$\Theta_X(-\log H) := \underline{\text{Hom}}(\Omega_X^1(\log H), \mathcal{O}_X).$$

定義 2.1 対 (X, H) の変形とは、次の可換図式の事である。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{H} = \sum_{i=1}^r \mathcal{H}_i \\ \pi \downarrow & \swarrow \varphi & \\ B & & \end{array}$$

1. $\pi: \mathcal{X} \rightarrow B$ は複素多様体 \mathcal{X} から複素多様体 B への固有正則写像で \mathcal{X} の各点で maximal rank をもつもの。
2. $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^r \mathcal{H}_i$ は \mathcal{X} の因子で各既約因子 \mathcal{H}_i は B 上 smooth である。(すなわち、 π を \mathcal{H}_i に制限したものが固有な smooth 全射となっている。
3. ある点 $0 \in S$ に対して、 $\mathcal{X}_0 = \pi^{-1}(0)$, $\mathcal{H} \cap \mathcal{X}_0$ と置くと、同型 $(\mathcal{X}_0, \mathcal{H}_0) \simeq (X, H)$ が存在する。

上の (X, H) の変形に対して、小平-Spencer 写像

$$\rho: T_0(B) \rightarrow H^1(X, \Theta_X(-\log H)).$$

が X の変形論と同様に、標準的に定まる。

定理 2.1 対 (X, H) に対して、その変形の倉西空間 (複素空間の芽) $(B, 0)$ と、倉西族

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{H} = \sum_{i=1}^r \mathcal{H}_i \\ \pi \downarrow & \swarrow \varphi & \\ B & & \end{array}$$

が存在する。また、

$$H^2(X, \Theta_X(-\log H)) = \{0\},$$

ならば、 $(B, 0)$ は非特異で小平-Spencer 写像は線型空間の同型

$$T_0(B) \xrightarrow{\simeq} H^1(X, \Theta_X(-\log H)).$$

を誘導する。

補題 2.1 $(X, H = \sum_{i=1}^l H_i)$ を上の通りとする。すると、次の層の完全系列が存在する。

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_X^1(\log H) \xrightarrow{P.R.} \bigoplus_{i=1}^l \mathcal{O}_{H_i} \rightarrow 0 \quad (3)$$

$$0 \rightarrow \Theta_X(-\log H) \rightarrow \Theta_X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^l N_{H_i/X} \rightarrow 0 \quad (4)$$

写像 $P.R.: \Omega_X^1(\log H) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^l \mathcal{O}_{H_i}$ は、ポアンカレ留数写像によって誘導されたものであり、また $N_{H_i/X} = \mathcal{O}_X(H_i)/\mathcal{O}_X$ は各因子 H_i の法束である。

さて (S, Y) を岡本-Painlevé 対としよう. 正因子 $Y = \sum_{i=1}^r a_i Y_i$ は、反標準因子であることに注意し、また $D = Y_{red} = \sum_{i=1}^r Y_i$ と置くと、 D は S の被約正規交差因子である.

次のコホモロジーの完全系列がある.

$$H^1(S, \mathbf{C}) \longrightarrow H^1(S - D, \mathbf{C}) \longrightarrow H^0(\tilde{D}, \mathbf{C}) \longrightarrow H^2(S, \mathbf{C}) \longrightarrow \dots \quad (5)$$

ここで、 $\tilde{D} = \coprod_{i=1}^r D_i$ は D の正規化を表す.

補題 2.2 上の記号のもとで、Gysin 写像

$$H^0(\tilde{D}, \mathbf{C}) \longrightarrow H^2(S, \mathbf{C}).$$

は単射である,

系 2.1 岡本-Painlevé 対 (S, Y) に対して、は次が成り立つ.

1. $H^1(S - D, \mathbf{C}) = 0$.
2. $H^0(S, \Omega_S^1(\log D)) = 0$.
3. $H^2(S, \Theta_S(-\log D)) = 0$.
4. $H^2(S, \Theta_S) = 0$.

Proof. S は有理曲面であるから、 $H^1(S, \mathbf{C}) = 0$ である. この事および、完全列 (5) と補題 2.2 から 1 を得る. 混合ホッジ構造の理論より単射

$$H^0(S, \Omega_S^1(\log D)) \hookrightarrow H^1(S - D, \mathbf{C}),$$

が存在し、2 を得る. セールの双対定理より

$$H^2(S, \Theta_S(-\log D))^\vee \simeq H^0(S, \Omega_S^1(\log D) \otimes K_S)$$

であるが、 $K_S = \mathcal{O}_S(-Y)$ であるから包含写像

$$H^0(S, \Omega_S^1(\log D) \otimes K_S) \hookrightarrow H^0(S, \Omega_S^1(\log D)) = \{0\},$$

があり、3 が帰結される. 完全列 4 より、コホモロジー完全列

$$\longrightarrow H^2(S, \Theta_S(-\log D)) \longrightarrow H^2(S, \Theta_S) \longrightarrow H^2(D, N_{D_i/S}) \longrightarrow 0.$$

が存在し、 $\dim D = 1$ より $H^2(D, N_{D_i/S}) = 0$, であるから 3 と合わせて、4 が帰結される.

命題 2.1 岡本-Painlevé対 (S, Y) に対して, $\dim H^0(S, -K_S) = 1$ であれば, $S - D = S - Y_{red}$ 上の代数的関数は定数しか存在しない. すなわち, $H^0(S - D, \mathcal{O}^{alg}) \simeq \mathbf{C}$ である. このとき, 岡本-Painlevé対は *non-elliptic type* と呼ばれる.

$\dim H^0(S, -K_S) = 1$ と言うことは, Y が $-K_S$ に属する唯一の正因子と言うことである. もし $\dim H^0(S, -K_S) \geq 2$ とすると $h: S \rightarrow \mathbf{P}^1$ なる楕円曲線で $h^{-1}(\infty) = Y$ なる構造持つ事が示される.

命題 2.2 *non-elliptic type* の 岡本-Painlevé 対 (S, Y) に対しては次が成立する.

1. $H^0(S - D, \Theta_{S-D}^{alg}) \simeq 0$. ここで Θ_{S-D}^{alg} は代数的な正則ベクトル場の芽のなす層を表す.
2. $D = Y_{red}$ にサポートをもつ任意の因子 H について $H^0(S, \Theta_S(H)) = 0$.
3. $D = Y_{red}$ にサポートをもつ任意の因子 H について $H^0(S, \Theta_S(-\log D)(H)) = 0$.

命題 2.3 任意の岡本-Painlevé 対 (S, Y) に対しては次が成立する.

$$c_2(S) = \text{topological Euler characteristic} = 12, \quad (6)$$

$$b_2(S) = \text{rank } H^2(S, \mathbf{Z}) = 10, \quad (7)$$

$$\dim H^1(S, \Theta_S) = 10, \quad (8)$$

かつ

$$\dim H^1(S, \Theta_S(-\log D)) = 10 - r \quad (9)$$

ここで r は Y の既約成分の個数を現わす. これらの事から (S, D) の変形の倉西空間は非特異でかつ次元が $10 - r$.

岡本-Painlevé 対の変形に関する表

Y	\tilde{E}_8	\tilde{E}_7	\tilde{D}_7	\tilde{D}_6	\tilde{E}_6	\tilde{D}_5	\tilde{D}_4
Number of components of Y	9	8	8	7	7	6	5
$\dim H^1(S, \Theta_S(-\log D))$	1	2	2	3	3	4	5
Painlevé equation	P_I	P_{II}	P'_{III}	P_{III}	P_{IV}	P_V	P_{VI}

3 局所コホモロジー完全系列

(S, Y) を岡本-Painlevé 対として、以前と同じく $D = Y_{red}$ とおく。以下簡単の為に \mathcal{O}_S と \mathcal{O}_{S-D} 等で代数的正則関数の芽のなす層を表す事にする。また接続層は特に断らない限り代数的なカテゴリーで考える。次の局所コホモロジー完全系列を見て欲しい。

$$\begin{aligned} H^0(S, \Theta_S(-\log D)) &\rightarrow H^0(S-D, \Theta_S(-\log D)) \rightarrow H^1_D(\Theta_S(-\log D)) \rightarrow \\ H^1(S, \Theta_S(-\log D)) &\xrightarrow{\mu} H^1(S-D, \Theta_S(-\log D)) \end{aligned}$$

ここで、 (S, Y) を non-elliptic type とすると、上の命題より

$$H^0(S-D, \Theta_S(-\log D)) = H^0(S-D, \Theta_S) = \{0\}.$$

であるから、次の完全系列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & H^1_D(\Theta_S(-\log D)) & \rightarrow & H^1(S, \Theta_S(-\log D)) & \xrightarrow{\mu} & H^1(S-D, \Theta_S(-\log D)) & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow & H^1_D(\Theta_S) & \rightarrow & H^1(S, \Theta_S) & \xrightarrow{\mu'} & H^1(S-D, \Theta_S) & \end{array}$$

次の定理が成り立つ。証明の詳細は、[S-T2] を見て欲しい。

定理 3.1 すべての *non-elliptic type* の岡本-Painlevé 対 (S, Y) に対して

$$H_D^1(\Theta_S(-\log D)) = \mathbf{C}. \quad (10)$$

が成り立つ。

上記の完全系列より $H_D^1(\Theta_S(-\log D))$ は自然な制限写像 μ の核であることは用意にわかる。

$$\mu : H^1(S, \Theta_S(-\log D)) \longrightarrow H^1(S - D, \Theta_S(-\log D))$$

よって、 (S, Y) の変形のうち、 $S - D$ に制限したとき自明になる方向がちょうど次元ある事を示している。これはまさに Painlevé 方程式系の時間変数に対応する。また対応するコホモロジー類をチェックで書いたときの表示よりハミルトニアン系を変形理論から導入することが出来る。これらの事については [S-T2], [S-U] 等も参照の事。

参考文献

- [B-W] D. M. Burns, Jr. & J. M. Wahl, Local contributions to global deformations of surfaces, *Invent. Math.* **26** (1974), 67-88.
- [Gr] A. Grothendieck, *Local cohomology*, (noted by R. Hartshorne), *Lecture Notes in Math.* 41, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1967), 106 pp.
- [Kaw] Y. Kawamata, On deformations of compactifiable manifolds, *Math. Ann.*, **235**, (1978), 247-265.
- [Kod1] K. Kodaira, *On compact analytic surfaces II*, *Annals of Math.* **77** (1963), 563-626.
- [Kod2] —, *Holomorphic mappings of polydiscs into compact complex manifolds*, *J. Differential Geometry* **6** (1971), 33-46
- [MMT] T. Matano, A. Matsumiya, and K. Takano, *On some Hamiltonian structures of Painlevé systems, II*, to appear in *J. Math. Soc. Japan*.
- [O] K. Okamoto, *Sur les feuilletages associés aux équation du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé*, *Japan. J. Math.* **5** (1979), 1-79.

- [Ram] C. P. Ramanujam, *A topological characterization of the affine plane as an algebraic variety*, Ann. of Math. **94** (1971), 69–88.
- [S–T1] M.-H. Saito and T. Takebe, *Classification of Okamoto–Painlevé pair*, preprint (1999).
- [S–T2] M.-H. Saito and T. Takebe, *Deformation of Okamoto–Painlevé pairs*, preprint (1999).
- [S–U] M.-H. Saito and H. Umemrua, *Painlevé equations and Deformation of rational surfaces with rational double points*, preprint (1999).
- [Sak] H. Sakai, *Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations*, Kyoto-Math 99-10, preprint (1999).
- [ST] T. Shioda and K. Takano, *On some Hamiltonian structures of Painlevé systems, I*, Funkcial. Ekvac. **40** (1997), 271–291.
- [Tak] T. Takebe, *Classification of Okamoto–Painlevé pairs*, Master thesis, Kobe University (1999), February.