数理解析研究所講究録
1134 巻 2000 年 70-80

Hierarchical model and triviality of ϕ_4^4

東工大 理学部　原 隆 (Takashi Hara)
名大 多元数理　服部哲弥 (Tetsuya Hattori)
日本医大 基礎科学　渡辺 浩 (Hiroshi Watanabe)

abstract

Hierarchical Ising model のくりこみ群軌道を, characteristic function を用いて調べることにより, 4 次元以上において, 連続極限は Gauss であることを示す approach を紹介する.

1 Hierarchical model

4 次元 ϕ^4 理論の triviality を論ずるには, 強結合領域におけるくりこみ群の trajectory を追跡しなければならない. そこで, ϕ^4 model の強結合極限である Ising model の hierarchical 近似 [1, 2, 3, 4, 5] に対し, 強結合領域のくりこみ群解析を考える.

1.1 Hierarchical model の定義

よく知られているように, 1 次元の最隣接相互作用 Ising model は相転移しない. しかし spin が long range interaction を持つときは相転移し得る. Dyson [1] は, 今日 hierarchical model と呼ばれる特殊な spin 系を導入して, この事実を示した. Hierarchical model は, くりこみ群変換が単純になるように Gaussian measure の部分を改変した model であり, 言わば, くりこみ群解析の練習台である.

2^N 個の spin 変数

$$\phi_\theta = \phi_{\theta_N,\dots,\theta_1}, \quad \theta=(\theta_N,\dots,\theta_1)\in\{0,1\}^N \tag{1.1}$$

を考え, Hamiltonian

$$H_N(\phi) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{c}{4}\right)^n \sum_{\theta_N,\dots,\theta_{n+1}}\left(\sum_{\theta_n,\dots,\theta_1}\phi_{\theta_N,\dots,\theta_1}\right)^2 \tag{1.2}$$

および single spin distribution $h(\phi_\theta)$ が定める統計力学系を

$$< F >_{N,h} = \frac{1}{Z_{N,h}}\int d\phi F(\phi)\exp(-\beta H_N(\phi))\prod_\theta h(\phi_\theta) \tag{1.3}$$

$$Z_{N,h} = \int d\phi \exp(-\beta H_N(\phi))\prod_\theta h(\phi_\theta) \tag{1.4}$$

で定義する．ただし，

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)dx = 1 \tag{1.5}$$

とする．これを 階層模型 (**hierarchical model**) という．

特に，大きさ s の Ising spin measure

$$h_{\text{Ising}}(x) \;=\; \frac{1}{2}(\delta(x-s)+\delta(x+s)) \tag{1.6}$$

は，ϕ^4 形 single spin measure

$$h_{\mu\lambda}(x) \;=\; \text{const.}\exp(-\mu x^2 - \lambda x^4) \tag{1.7}$$

の強結合極限

$$\mu = -2\lambda s^2, \quad \lambda \;\to\; \infty \tag{1.8}$$

と考えられるので，くりこみ群の強結合問題の例として hierarchical Ising model を考察する．

Hiercarchial Ising model は，条件

$$0 < c < 2 \tag{1.9}$$

のもとで infinite volume limit が存在し，条件

$$1 < c < 2 \tag{1.10}$$

のもとで，相転移がある [1]．また spin 変数 ϕ を定数倍することにより，$\beta > 0$ を任意の正数にすることができるので，以下

$$\beta = \frac{1}{c} - \frac{1}{2} \tag{1.11}$$

とおくことにする．

1.2 Block spin くりこみ群

Block spin ϕ' を

$$\phi'_\tau \;=\; \frac{\sqrt{c}}{2}\sum_{\theta_1=0,1}\phi_{\tau\theta_1},\ \tau=(\tau_{N-1},\ldots,\tau_1) \tag{1.12}$$

で定義すると，

$$\sum_{\theta_n,\ldots,\theta_1}\phi_{\theta_N,\ldots,\theta_1} \;=\; \sum_{\theta_n,\ldots,\theta_2}\frac{\sqrt{c}}{2}\phi'_{\theta_N,\ldots,\theta_2} \tag{1.13}$$

よって

$$H_N(\phi) = H_{N-1}(\phi') - \frac{1}{2}\sum_{\tau} {\phi'_\tau}^2 \tag{1.14}$$

となり, $F(\phi)$ が block spin の関数

$$F(\phi) = F'(\phi') \tag{1.15}$$

のとき,

$$< F >_{N,h} = < F' >_{N-1,\mathcal{R}h} \tag{1.16}$$

$$\mathcal{R}h(x) = \text{const.}\exp(\frac{\beta}{2}x^2)\int_{\mathbb{R}} dy h(\frac{x}{\sqrt{c}}+y)h(\frac{x}{\sqrt{c}}-y)\ , x\in\mathbb{R} \tag{1.17}$$

が成立する. 即ち, くりこみ群変換は h の非線形変換 $\mathcal{R}$ として実現される. そこで, 様々の初期値 h_0 に対して, $\mathcal{R}$ の trajectory

$$h_n = \mathcal{R}^n h_0\ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.18}$$

を調べることが必要になる.

1.3 Gaussian trajectory

Single spin measure を Gauss

$$h_0(x) = \text{const.}\exp(-\frac{\alpha_0}{2}x^2) \tag{1.19}$$

にとると, くりこみ群の trajectory は

$$\mathcal{R}^n h_0(x) = \text{const.}\exp(-\frac{\alpha_n}{2}x^2) \tag{1.20}$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{2}{c}\alpha_n - \beta \tag{1.21}$$

となる. 従って, (1.11) のもとでは

$$\alpha_n = (\frac{2}{c})^n(\alpha_0 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \tag{1.22}$$

となる. 従って, 系は

$$\alpha_N > 0 \tag{1.23}$$

のときに well-defined となり,

$$\alpha_0 > \frac{1}{2} \tag{1.24}$$

のとき infinite volume limit を持つ. 特に $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ のとき,

$$h_G(x) = \text{const.}\exp(-\frac{1}{4}x^2) \tag{1.25}$$

は $\mathcal{R}$ の fixed point となり, massless Gaussian measure を定める.

1.4 Dimensionality

$m = 1, 2, ..., N$ に対し,

$$M_m(\phi) = \sum_{\theta_m,...,\theta_1} \phi_{\theta_N,...,\theta_1} \tag{1.26}$$

$$\chi_{m,N,h} = \frac{1}{2^m} < M_m(\phi) >_{N,h} \tag{1.27}$$

とおく. $\chi_{N,N,h}$ は spin 系の susceptibility

$$\chi_\Lambda = \sum_{x\in\Lambda} < \phi(0)\phi(x) > \tag{1.28}$$

に相当する.

Block spin を用いると,

$$\chi_{m,N,h} = \frac{2}{c}\chi_{m-1,N-1,\Re h} \tag{1.29}$$

を得る. 特に $h = h_G$ とし, infinite volume limit $N \to \infty$ をとると,

$$\chi_{m,\infty,h_G} = \text{const.}(\frac{2}{c})^m \tag{1.30}$$

となる.

これを $\mathbb{Z}^d(d > 2)$ 上の massless Gaussian model の correlation decay

$$< \phi(x)\phi(y) > \sim \text{const.}|x-y|^{-d+2}, \quad |x-y| \to \infty \tag{1.31}$$

から得られる評価

$$\sum_{|x|<r} < \phi(0)\phi(x) > \sim \text{const.}r^2 \tag{1.32}$$

と等置すると

$$(\frac{2}{c})^m = r^2 \tag{1.33}$$

となり, さらに spin 数の関係 $2^m \sim r^d$ を用いると

$$c = 2^{1-2/d} \tag{1.34}$$

$$\beta = \frac{1}{2}(2^{2/d} - 1) \tag{1.35}$$

を得る. c が (1.34) を満たすとき, d 次元 hierarchical model と言うことにする.

1.5 Fixed points

(1.25) は自明な (Gaussian) fixed point であるが, 自明でない (non-Gaussian) fixed point の存在に関しては, 次のことが知られている.[2, 3, 4]

- $d \geq 4$ では, φ_G の "近く" に non-Gaussian fixed point は存在しない.
- $d < 4$ で d が十分 4 に近いとき, φ_G の "近く" に non-Gaussian fixed point が存在する.

さらに,

- $d \geq 4$ では, φ_G の "近く" から出発する trajectory を用いて構成される連続極限は, trivial である

とも分かっている.

しかし, Ising や強結合 ϕ^4 model の triviality を論ずるには, Ising や強結合 ϕ^4 model (これらは Gauss 近傍にはない) から出発する trajectory を調べなければならない. しかし, [2, 4] で導入された Gauss 近傍の定義が複雑であるために, この領域に trajectory が届いているかどうかを確かめることは難しい.

この難点を解決するのが, characteristic function である.

2 Characteristic function

Single spin distribution h_n の characteristic function

$$\varphi_n(\xi) = \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\xi x} h_n(x) \tag{2.1}$$

に対するくりこみ群変換は

$$\varphi_{n+1} = \mathcal{R}\varphi_n \tag{2.2}$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{T}\mathcal{S} \tag{2.3}$$

$$\mathcal{S}g(\xi) = g(\frac{\sqrt{c}}{2}\xi)^2 \tag{2.4}$$

$$\mathcal{T}g(\xi) = \exp(-\frac{\beta}{2}\triangle)g(\xi) \tag{2.5}$$

となる.

特に Ising spin

$$h_0(x) = \frac{1}{2}(\delta(x-s) + \delta(x+s)) \tag{2.6}$$

の場合, 初期値は

$$\varphi_0(\xi) = \cos(s\xi) \tag{2.7}$$

である.

2.1 $d=\infty$ の場合

$c=2,\beta=0$ とすると, recursion は

$$\varphi_{n+1}(\xi) \quad = \quad \varphi_n(\frac{\xi}{\sqrt{2}})^2 \tag{2.8}$$

となる. 特に Ising spin の場合

$$\varphi_n(\xi) \quad = \quad \cos^{2^n}(\frac{s\xi}{2^{n/2}}) \tag{2.9}$$

$$\to \quad \exp(-\frac{s^2}{2}\xi^2)\ , \quad n\to\infty \tag{2.10}$$

従って, この trajectory を用いて構成された連続極限は Gauss (trivial) である. (これは実質的に中心極限定理である.)

(2.10) について若干の注意を付け加えると,

- $|\xi|<2^{n/2}\frac{\pi}{2s}$ を満たす ξ に対して

$$\varphi_n(\xi) \quad = \quad \exp(-V_n(\xi)) \tag{2.11}$$

$$V_n(\xi) \quad = \quad \sum_{j=1}^{\infty}\mu_{2j}^{(n)}\xi^{2j} \tag{2.12}$$

  と書き, V_n を dual potential と呼ぶことにする. このとき V_n の係数は, recursion

$$\mu_{2j}^{(n)} \quad = \quad 2^{1-j}\mu_{2j}^{(n-1)}\ , \quad j=1,2,3,\ldots \tag{2.13}$$

  に従う. 即ち, ξ^2 の項は marginal であり, 4 次以上の項は irrelevant である.

- "Dual potential" $V_n(\xi)$ の定義域は

$$|\xi| \quad < \quad 2^{n/2}\frac{\pi}{2s} \tag{2.14}$$

  であるが, その continuum limit

$$\lim_{n\to\infty}V_n(\xi) \quad = \quad \frac{s^2}{2}\xi^2 \tag{2.15}$$

  は, 各点収束極限として $\mathbb{R}$ 全体で定義される. 即ち, continuum limit に必要な情報は, 初期的 characteristic function の $\xi=0$ の無限小近傍だけである. これは, characteristic function を用いたくりこみ群解析に, large field problem が現れないことを意味する.

- Ising spin (2.6) の場合, "dual potential" の初期値

$$V_0(\xi) \quad = \quad \frac{s^2}{2}\xi^2+\frac{s^4}{12}\xi^4+\frac{s^6}{45}\xi^6+\frac{17s^8}{2560}\xi^8+\cdots \tag{2.16}$$

  は正係数をもつ. そして, (2.13) から, この性質は ($d=\infty$ の) くりこみ群変換によって保存されることが分かる.

2.2 $d < \infty$ の場合

$d < \infty(\beta > 0)$ においては, (2.5) の operator $\mathcal{T}$ が働くので, 上記の dual potential の描像は定量的にも定性的にも変化する.

例えば, relevant/irrelevant terms の分類は次のようになる.

- $d > 4$ では, ξ^2 は relevant, ξ^4 以上は irrelevant となる.
- $d = 4$ では, ξ^2 は relevant, ξ^4 は marginal, ξ^6 以上は irrelevant となる.
- $d < 4$ では, ξ^2, ξ^4 は relevant, そして d の低下に伴って, relevant part が増えて行く.

この描像は, 前述の non-Gaussian fixed point の存在問題に深く関係する. そこで, くりこみ群の trajectory を数値的に調べ, この描像が正しいことを直観的に確かめておく. ["摂動的" な計算によって示すことももちろんできる.]

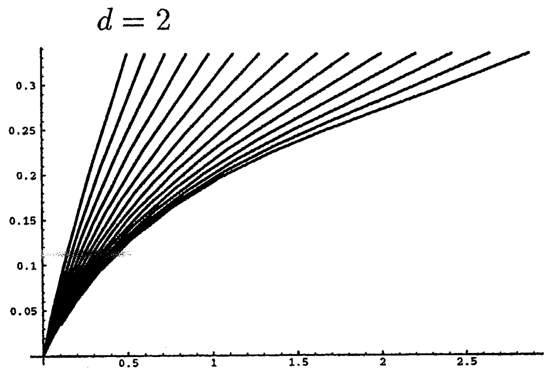
2.3 数値計算

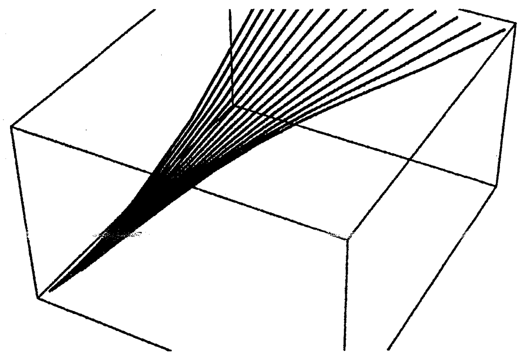
Dual potential の係数を無次元化する.

$$\tilde{\mu}_{2j}^{(n)} = \frac{\mu_{2j}^{(n)}}{(\mu_2^{(n)})^j}, \quad j = 2, 3, \ldots \tag{2.17}$$

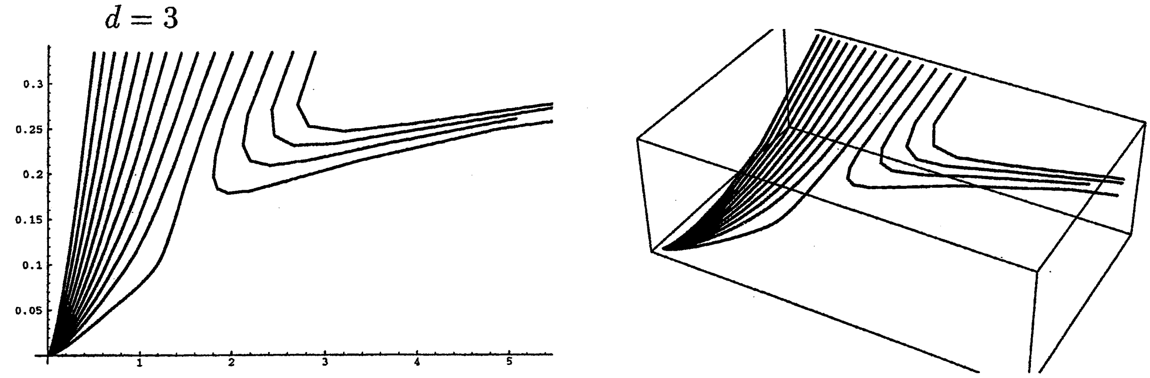
以下の図は, Ising から出発する trajectory を数値的に追跡して, dual potential の係数 $\tilde{\mu}_{2j}^{(n)}$ を plot したものである.

左 : $(\mu_2, \tilde{\mu}_4)$　　　右 : $(\mu_2, \tilde{\mu}_4, \tilde{\mu}_6)$

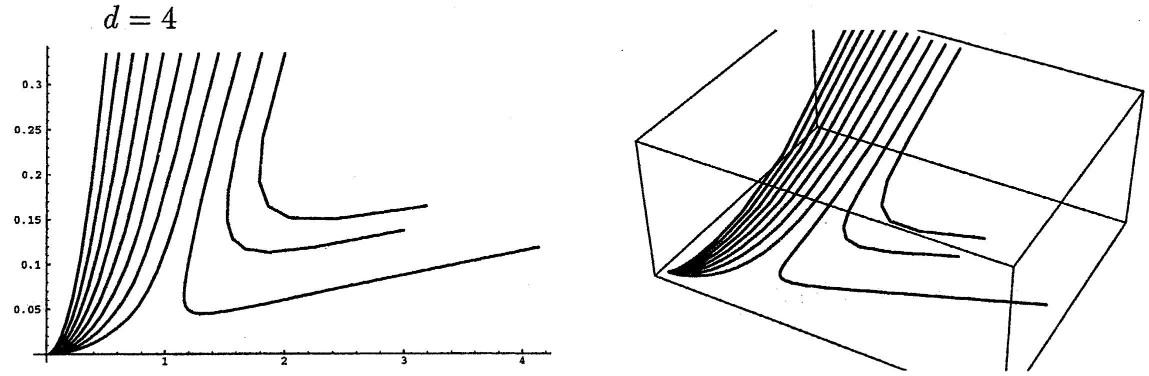




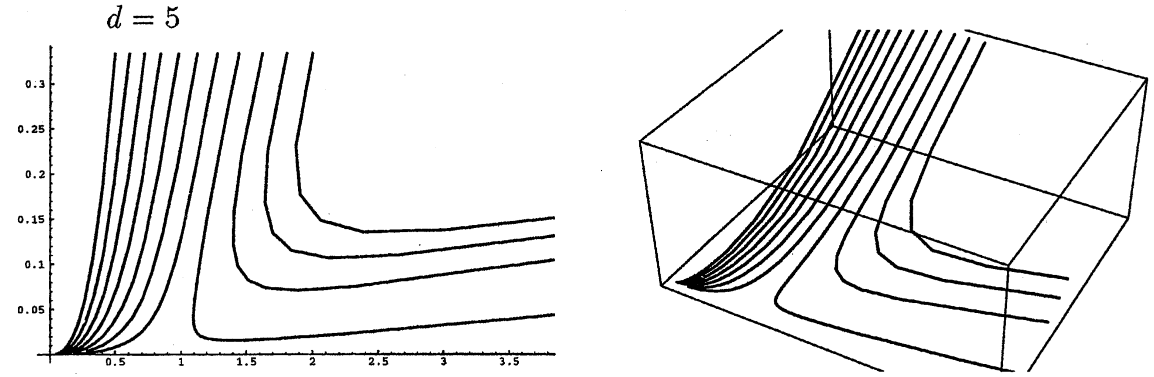
$d = 3$



$d = 4$



$d = 5$



- 各 trajectory の s 値は, 左から順に $s = 1.0, 1.1, 1.2, \ldots$ であり, 初期値は,

$$\mu_2^{(0)} = s^2/2 \tag{2.18}$$

$$\tilde{\mu}_4^{(0)} = 1/3 \tag{2.19}$$

$$\tilde{\mu}_6^{(0)} = 8/45 \tag{2.20}$$

  である.

- Gaussian fixed point (1.25) の特性関数

$$\varphi_G(\xi) = \exp(-\xi^2) \tag{2.21}$$

  は (2.2) の自明な fixed point であり, 上の図においては, 点 (1,0) (or (1,0,0)) に対応する.

さて上図から, $d > 2$ では相転移があり,

- $\mu_2^{(0)}$ が小さいとき, trajectory は $(0,0)$ に近付く (高温相).
- $\mu_2^{(0)}$ が大きいとき, trajectory は無限遠方に飛ぶ (低温相)
- $\mu_2^{(0)}$ がある特定の値 (critical point) をとるとき, trajectory は $(0,0)$ 以外のある点に収束する (critical trajectory).

ことが分かる. さらに (non-)triviality に関係するつぎのような重要な事実が示唆される.

- $d < 4$ では, critical trajectory は non-Gaussian fixed point に収束する. [この trajectory を用いると, nontrivial continuum limit を構成することができる.]
- $d \geq 4$ のとき, critical trajectory は Gaussian fixed point に収束する (triviality)

3 Triviality

Characteristic function によるくりこみ群解析の概略を, [7] に基づいて紹介する. $d \geq 4$ hierarchical Ising model の triviality を厳密に示すための基本的な idea は次のとおりである.

(1) Characteristic function を用いて "Gauss 近傍" の概念を定式化し, くりこみ群の振舞いを分析する.

(2) Ising から出発する critical trajectory が, 有限回のくりこみ群変換によって "Gauss 近傍" に入ることを, computer を用いて数値的に確かめる.

3.1 Characteristic function の利点

Ising を初期値とする dual potential 列は次の著しい性質を持つ.

- Dual potential の全ての **Taylor** 係数は非負 である :

$$\mu_{2j}^{(n)} \ \geq \ 0 \ , \quad j \geq 1 \tag{3.1}$$

- Dual potential の高次の Taylor 係数は, 4 次の係数で bound される [**Newman's bound**] :

$$\mu_{2j}^{(n)} \ \leq \ \frac{1}{j}(2\mu_4^{(n)})^{j/2} \ , \quad j \geq 3 \tag{3.2}$$

どちらも,

- Characteristic function の零点は実数である [強磁性 spin 系の **Lee-Yang property**]

をもとにして証明される [6].

3.2 Newman's bound の応用

(3.2) から

- V_n の Taylor 展開の収束域が評価され, $n \to \infty$ で $\mu_4^{(n)} \to 0$ となるなら, 定義域は実数全体に拡大する.
- $\mu_4^{(n)}$ が 0 に収束することを示せば, それ以上の全ての係数が 0 に収束すること, 即ち triviality が得られる.
- "Gauss 近傍" の概念を有限個の μ_{2j} を用いて定式化することができる. 従って, critical trajectory が Gauss 近傍に届いたかどうかを, computer を用いて検証する道が開ける

ことが分かる.

3.3 Taylor 係数の非負性の応用

(3.1) は, operator $\mathcal{T}$ を調べるときに本質的に重要な役割を果たす.
(2.5) を

$$g_t(\xi) = \exp(-t\triangle)g(\xi) \tag{3.3}$$
$$\mathcal{T}g = g_{\beta/2} \tag{3.4}$$

と書く. g_t は微分方程式

$$\frac{d}{dt}g_t(\xi) = -\triangle g_t(\xi) \tag{3.5}$$
$$g_0(\xi) = g(\xi) \tag{3.6}$$

の解である. そこで

$$g_t(\xi) = \exp(-V_t(\xi)) \tag{3.7}$$

とおくと, V_t は

$$\frac{d}{dt}V_t = (\nabla V_t)^2 - \triangle V_t \tag{3.8}$$

を満たす. ここで

- V_t の Taylor 係数がすべて非負である

ことを使うと, (3.8) の右辺の第 2 項を無視することにより, Taylor 係数の upper bound が得られる. [この upper bound を使うと, (3.8) から lower bound が得られる.]

このようにして, $d \geq 4$ hierarchical Ising model の triviality に対する computer assisted proof を実現し得る [7].

References

[1] F. J. Dyson, Exisitence of a Phase–Transision in a One–Dimensional Ising Ferromagnet, Commun. Math. Phys., **12**, 1969, 91–107.

[2] Ya. G. Sinai, Theory of Phase Transition: Rigorous Results, Pergamon Press, 1982.

[3] P. Collet, J.-P. Eckmann, A Renormalization Group Analysis of the Hierarchical Model in Statistical Mechanics, Springer Lecture Note in Physics 74

[4] K. Gawedzki, A. Kupiainen, Non-Gaussian Fixed Point of the Block Spin Transformation. Hierarchical Model Approximation, Commun. Math. Phys., **89**, 1983, 191–220.

[5] H.Koch, P.Wittwer, A Non-Gaussian Renormalization Group Fixed Point for Hierarchical Scalar Lattice Field Theories, Commun. Math. Phys., **106**, 1986, 495–532.

[6] C.M.Newman Inequalities for Ising medels and field theories which obey the Lee–Yang theorem, Commun. Math. Phys., **41**, 1975, 1-9.

[7] T.Hara, T.Hattori, H.Watanabe, in preparation.