数理解析研究所講究録
1134 巻 2000 年 81-88

2次元 $O(N)$ Spin Model の 繰り込み群による扱い

伊東恵一 (Keiichi R. Ito) [1]
寝屋川市 池田中町 摂南大学 工学部 数物教室
田村博志 (Hiroshi Tamura) [2]
金沢市 角間 金沢大学 理学部 数学教室

Abstract: Critical temperature of the classical $O(N)$ spin model in two dimensions is investigated. After overviewing the authors recent works, it is discussed how to apply the Block Spin Transformation into the present model.

1 Introduction

四次元の格子ゲージ理論や2次元の Non-Abelian シグマ模型では相転移は起こらないというのが現代物理の前提のシナリオであるがその証明は いまだ我々の手中には無い.

我々は 最近 $O(N)$ Spin Model を self-avoiding walk で表現し, かなり正確な系の臨界逆温度 β_c の評価を得た.

$$\frac{\beta_c}{N} \geq \frac{\mu_\nu}{\mu_\nu^2 - 1}, \text{ as } N \to \infty \tag{1}$$

ここで $\mu_\nu \in (\nu, 2\nu - 1)$ は self-avoiding walk の connective constant といわれるもので, 自分と交差しない self-avoiding random walk の 数の増加の割合を示す数である ($\mu_2 = 2.653\cdots$). 我々はさらにこの結果を標準的な ポリマー展開と結合することにより, 2 次元で臨界温度の改良を試み, 2D $O(N)$ Spin Model の臨界逆温度 $\beta(N)$ は十分大きな N に対して

$$\beta_c(N) > CN \log N. \tag{2}$$

となることを示した (ただし $C > 0$ は正定数). これについては最近の論文をみよ. 実は2次元では $N > 2$ ならば, $\beta_c = \infty$ が期待されているのでこれらは全く不満足なものである. これを打破するため多段の繰り込み変換を利用することを提案し、途中経過を紹介したい.

さて良く知られてはいるがモデルを説明しよう. ν 次元 $O(N)$ spin model は以下の Gibbs の期待値で決まる:

$$< f > \equiv \frac{1}{Z_\Lambda(\beta)} \int f(\phi) \exp[-H_\Lambda(\phi)] \prod_x \delta(\phi(x)^2 - 1) d\phi(x). \tag{3}$$

ここに $\Lambda \subset \mathbf{Z}^\nu$ は原点中心の巨大な正方形で $\phi(x) = (\phi(x)^{(1)}, \cdots, \phi(x)^{(N)})$ は $x \in \Lambda$, に位置する ベクトル値スピンで Z_Λ は 分配関数と呼ばれ今の場合 $< 1 >= 1$ で決まる定数である. さらに H_Λ は系のハミルトニアンであり

$$H_\Lambda \equiv -\frac{\beta(N)}{2} \sum_{|x-y|=1} \phi(x)\phi(y) \tag{4}$$

で与えられる. ただし $|x| = (\sum_{i=1}^\nu x_i^2)^{1/2}$ とし $\beta(N)$ が逆温度である. [8] に従い N^{-1} 展開を利用したいので

$$\beta(N) = N\beta. \tag{5}$$

とおいておこう

---

[1] Electric Address : ito@kurims.kyoto-u.ac.jp
[2] Electric Address:tamura@kappa.s.kanazawa-u.ac.jp

2 Determinant Representation

始めるにあたり, 恒等式 (Poisson 積分式) $\delta(\phi^2-1)=\int \exp[-ia(\phi^2-1)]da/2\pi$ を eq.(3) に代入する. ただし [9] $\mathrm{Im} a_i < -\nu N\beta$ を要求しておく.

$$\mathrm{Im}\, a_i = -N\beta(\nu+m^2/2),\ \mathrm{Re}\, a_i = \sqrt{N}\beta\psi_i. \tag{6}$$

これから

$$\begin{aligned} Z_\Lambda &= c^{|\Lambda|}\int \exp[-\frac{\beta N}{2} < \phi,(m^2-\Delta+\frac{2i}{\sqrt{N}}\psi)\phi > + \sum_j i\sqrt{N}\beta\psi_j]\prod \frac{d\phi_j d\psi_j}{2\pi} \\ &= c^{|\Lambda|}\det(m^2-\Delta)^{-N/2}\int F(\psi)\prod\frac{d\psi_j}{2\pi}, \qquad (7) \\ F(\psi) &= \det(1+\frac{2iG}{\sqrt{N}}\psi)^{-N/2}\exp[i\sqrt{N}\beta\sum_j \psi_j] \qquad (8) \end{aligned}$$

ここで c's は行毎に違いうる正定数で, $\Delta_{xy} = -2\nu\delta_{xy}+\delta_{|x-y|,1}$ は格子空間上の lattice Laplacian で $G=(m^2-\Delta)^{-1}$ はおなじみの格子空間上の伝播関数または Green 関数である. 同様に 2 点関数は

$$< \phi_0\phi_x > \ = \ \frac{1}{\tilde{Z}}\int (m^2-\Delta+2i\sqrt{N}\psi)^{-1}_{0x}F(\psi)\prod\frac{d\psi_j}{2\pi} \tag{9}$$

となるが $\tilde{Z}=c^{|\Lambda|}Z_\Lambda$ は再び前後から明らかな規格化定数である

さて質量定数 m は正であれば何でも言い訳だが $m\geq 0$ を $G(0)=\beta$ が成立するよう選ぶと都合がよい:

$$G(x) = \int e^{ipx}\frac{1}{m^2+2\sum(1-\cos p_i)}\prod_{i=1}^{\nu}\frac{dp_i}{2\pi}. \tag{10}$$

これは次元が 2 以下ならどんな β に対しても可能であって $G(0)$ が第一種完全楕円 積分で表されることから 2 次元では $m^2\sim 32e^{-4\pi\beta}$ $(\beta\to\infty)$ が出てくる. 摩訶不思議なことにこれは繰り込み群の計算と完全に一致する [11]. 3 次元以上ではかような m は $\beta\leq G_0(0)\equiv G(0)|_{m=0}$ の時のみ存在することはすぐに分かるが. $\beta > G_0(0)$ であれば系が自発磁化を示すことはすでに知られている [?]. 従って $N\mu_\nu/(\mu_\nu^2-1)<\beta_c(N)<NG_0(0)$ for $\nu\geq 3$. つまり次元が 2 以下の時だけそしてその時だけ全ての β について

$$F(\psi) = \det{}_3(1+\frac{2iG}{\sqrt{N}}\psi)^{-N/2}\exp[-\mathrm{Tr}(G\psi)^2] \tag{11}$$

と書けるのである. ただし $\det_k(1-A)=\det[(1-A)\exp[\sum_1^{k-1}A^\ell/\ell]$. とおいた.

このような $m\geq 0$ が存在するときには系は近似的に以下のガウス測度(自由系)で記述される: $\exp[-\sum_{x,y}\psi(x)G^{\otimes 2}(x,y)\psi(y)]\prod d\psi$ ここで $G^{\otimes 2}(x,y)\equiv G(x,y)^2$ は G と G の Hadamard 積といわれるものでボソン 2 個の伝播関数で正の演算子である. 積分は遂行されて行列式 $\det_3(1+2iG\psi/\sqrt{N})^{-N/2}$ が択られこれをガウス系に対する小さい摂動とみなそう. つまり $\det_2(1+2iG\psi/\sqrt{N})^{-N/2}$ は厳密に正である関数 $|F(\psi)|=\det(1+4G\psi G\psi/N)^{-N/4}$ のように振る舞うと仮定できよう. もしこの仮定が正当化できれば $N>2$ のとき系は相転移を示さずつねに massive である. 実際に

$$\begin{aligned} < \phi_0\phi_x > &\sim \frac{N}{\tilde{Z}}\int (m^2-\Delta+\frac{2i}{\sqrt{N}}\psi)^{-1}_{0x}|F(\psi)|\prod\frac{d\psi_j}{2\pi} \\ &\leq N|\sup_\psi (m^2-\Delta+\frac{2i}{\sqrt{N}}\psi)^{-1}_{0x}| \\ &\leq N(m^2-\Delta)^{-1}_{0x}\leq c_1\exp(-c_2 m|x|) \end{aligned}$$

ただし $c_i>0$ は適当な定数である. (収束性から $N>2$ が必要).

3 Block Spin Transformation

実際には $\psi(x)$ は積分変数で無限大の値をとりうるので前の議論はキチンと正当化されねばならない. これを示すため我々は非局所相互作用を局所的な相互作用に分解し (polymer expansion [?, ?, ?, ?]) 再び加えあわせる. しかし今まで出てきた kernels はきわめて non-local で $|\psi(x)|$ が大きくなって行列式の展開が成立しない領域がモザイクのように散らばって分布している. しかしこのようなモザイク領域の出現する割合は確率的に小さい. このことを利用して 自由エネルギー $\log Z$ を解析関数の絶対収束級数で表す方法をポリマー展開という.

ここで β が大きければ G は $G(x,x) \sim -\log m \sim \beta$) なので行列式の展開は殆どの ψ に対しておぼつかない. そこで行列式を ϕ を多くの distance scale からなる 独立なガウス型確率変数の和として分解, 段階的に積分, 行列式を多くの行列式の積に分解する. このため, $\Lambda \subset Z^2$ をサイズが $L \times L$ の ブロック Δ_i に別け次のプロセスを繰り返す :

(1) ϕ_n のブロック平均を ϕ_{n+1} に保ちつつ,ϕ_n で積分, ただし $\phi_0 = \phi$,
(2) ψ_n のブロック和を ψ_{n+1} に保ちつつ,ψ_n で積分, ただし $\psi_0 = \psi$,
最初 $G(0) = \beta$ に留意して

$$W_0(\phi,\psi) = \frac{1}{2} < \phi, G_0^{-1}\phi > -i < J_0, \psi >, \tag{12}$$

$$J_0(x) = -\frac{1}{\sqrt{N}} : \phi^2(x) :_{G_0} = \sqrt{N}\beta - \frac{1}{\sqrt{N}}\phi^2(x), \tag{13}$$

とおく, ここで $:A:_{G_0}$ は A の mean zero, covariance G_0^{-1} のガウス確率速度 $d\mu_0(\phi)$ に関する Wick 積で $< f, g >= \sum_x f(x) \cdot g(x)$.

さて我々は $\phi(x) \equiv \phi_0(x)$ と $\psi(x) \equiv \psi_0(x)$ をブロックスピン $\phi_1(x) = (C\phi_0)(x)$ と $\psi_1(x) = (C'\psi_0)(x)$, $\phi(x)$ と $\psi(x)$ の 揺動場 (fluctuations) $\xi_0(\zeta)$ と $\tilde{\psi}_0(\zeta)$ で表すここで $x \in \Lambda_1$, $\Lambda_n \equiv Z^2 \cap L^{-n}\Lambda$ かつ $\zeta \in \Lambda - L\Lambda_1$. C は $\phi(x)$ のブロック上の算術平均を, C' はブロック上の算術和をとり, 両者ともひき続いて座標を L^{-1} だけスケール変換する

$$(C\phi)(x) = L^{-2}\sum_{\zeta\in\square}\phi(Lx+\zeta), \tag{14}$$

$$(C'\psi)(x) = \sum_{\zeta\in\square}\psi(Lx+\zeta) \tag{15}$$

ここで $x \in \Lambda_1$ で $\square(x)$ はサイズ $L \times L$, 中心 x ($\square = \square(0)$) の正方形. この風変わりなスケール変換は ϕ は relevant field として扱われるが, ψ は marginal field として扱われることを示す. 従って $\psi(x)$ と $\phi_0(x)$ との積, 例えば $\psi(x)\phi_0^2(x)$ なども marginal になる. この理由については eq.(46) を見られよ.

block spin $\phi_1(x)$ は covariance

$$G_1(x,y) = CGC^+(x,y) = L^{-4}\sum_{\zeta_1,\zeta_2\in\square} G_0(Lx+\zeta_1, Ly+\zeta_2). \tag{16}$$

を有し同様に ϕ_n の covariance G_n と変換行列 A_n と $\mathcal{A}_n$ を導入する.

$$G_n(x,y) = CG_{n-1}C^+(x,y) = L^{-4}\sum_{\zeta_1,\zeta_2\in\square} G_{n-1}(Lx+\zeta_1, Ly+\zeta_2), \tag{17}$$

$$A_n(x,y) = G_{n-1}C^+G_n^{-1}(x,y) = \sum_{\zeta} G_{n-1}(x,\zeta)C^+G_n^{-1}(\zeta,y), \tag{18}$$

$$\mathcal{A}_n = A_1 \cdots A_n = G_0(C^+)^n G_n^{-1}. \tag{19}$$

(この記法は [12].) 以下の幾つかの写像を導入する. $Q : R^{\Lambda\backslash L\Lambda_1} \to R^{\Lambda}$ and its adjoint $Q^+ : R^{\Lambda} \to R^{\Lambda\backslash L\Lambda_1}$:

$$
\begin{aligned}
(Q\xi)(x) &= \begin{cases} \xi(x) & \text{if } x \notin LZ^2 \\ -\sum_{y\in\square(x)}\xi(y) & \text{if } x \in LZ^2 \end{cases} && (20) \\
(Q^+f)(x) &= f(x) - f(x_0) && (21)
\end{aligned}
$$

ここでe $x_0 \in L\Lambda_1$ は x からの最近接点. つまり Q^+ は微分作要素.

揺動場による積分 (fluctuation integral) で起きることを見てみる:

$$
\exp[-W_1(\phi_1,\psi_1)] = \int \exp[-W_0(A_1\phi_1 + Q\xi_0, \tilde{A}_1\psi_1 + Q\tilde{\psi})] \prod d\xi_0(x) \prod d\tilde{\psi}(x) \tag{22}
$$

ここで $\tilde{A}_1$ は (22) を ξ_0 で積分して後決定することとして, 係数を除いて次式を得る:

$$
\begin{aligned}
&\int \exp[-\frac{1}{2}\{<\phi_1, G_1^{-1}\phi_1> + <\xi_0, Q^+G_0^{-1}Q\xi_0>\} + i\sqrt{N}\beta\sum_x \psi_x \\
&-\frac{i}{\sqrt{N}}\sum_x[(A_1\phi_1)_x^2 + 2(A_1\phi_1)_x(Q\xi_0)_x + (Q\xi_0)_x^2]\psi_x] \prod d\xi_{0,x} \\
&= \exp[-\frac{1}{2}<\phi_1, G_1^{-1}\phi_1> + i\sqrt{N}\sum_x(\beta - \frac{1}{N}(\varphi_1)_x^2)\psi_x] \\
&\quad \times \exp[-\frac{2}{N}<Q^+(\varphi_1\cdot\psi), \frac{1}{K}Q^+(\varphi_1\cdot\psi)>] \det{}^{-N/2}(1 + \frac{2i}{\sqrt{N}}\Gamma_0Q^+\psi Q) \qquad (23)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= (A_1\phi_1)(x),\ x \in \Lambda, && (24) \\
\Gamma_0 &\equiv [Q^+(-\Delta + m^2)Q]^{-1}, && (25) \\
K &\equiv Q^+(-\Delta + m^2 + \frac{2i}{\sqrt{N}}\psi)Q. && (26)
\end{aligned}
$$

m^2 が如何に小さくても, Γ_0 は $(m^2 + L^{-2})^{1/2}$ [12] 程の質量を持ち, 行列式は例え $m = 0$ でも locality を持つ. K^{-1} も又 ψ ($K^{-1} \sim \Gamma_0$, see [4]) に一様に指数関数的 decay をもつ.

さて

$$
\begin{aligned}
\det{}^{-N/2}(1 + \frac{2i}{\sqrt{N}}\Gamma_0Q^+\psi Q) &= \exp\left[\mathrm{Tr}\left(-i\sqrt{N}\Gamma_0Q^+\psi Q - (\Gamma_0Q^+\psi Q)^2\right)\right]\eta(\psi), \\
\eta(\psi) &\equiv \det{}_3^{-N/2}(1 + \frac{2i}{\sqrt{N}}\Gamma_0Q^+\psi Q),
\end{aligned}
$$

として, 我々の integrand は

$$
\exp\left[-\frac{1}{2}<\phi_1, G_1^{-1}\phi_1> - <\psi, \hat{H}_0^{-1}\psi> + i<J_1,\psi>\right]\eta(\psi) \tag{27}
$$

と表される, ここで

$$
\begin{aligned}
\hat{H}_0^{-1} &= (Q\Gamma_0Q^+)^{\circ 2} + \frac{2}{N}[(Q\frac{1}{K}Q^+)\circ(\varphi_1\cdot\varphi_1)], && (28) \\
J_1(x) &= \sqrt{N}\beta - \sqrt{N}(Q\Gamma_0Q^+)(x,x) - \frac{1}{\sqrt{N}}(\varphi_1)_x^2 \\
&= -\frac{1}{\sqrt{N}} :\varphi_1^2(x):_{G_1} && (29)
\end{aligned}
$$

で：$:_{G_1}$ は Gauss 測度 $d\mu_{G_1}$ についての Wick 積：

$$:\varphi_i(x)\varphi_j(y):_{G_1} \equiv \varphi_i(x)\varphi_j(y) - \delta_{ij}(A_1 G_1 A_1^+)(x,y)$$

ここで $Q\Gamma_0 Q^+ = G_0 - G_0 C^+ G_1^{-1} C G_0$ と $A_1 = G_0 C^+ G_1^{-1}$ を使った．ここで行列 A と B に対し，その Hadamard 積を，$(A \circ B)(x,y) \equiv A(x,y)B(x,y)$ で以下導入する．

この展開は注意深くおこなう．まず $\psi(x)$ の "Small Fields" を

$$|\frac{2}{\sqrt{N}}\Gamma_0 Q^+ \psi Q| < N^{-\varepsilon} \tag{30}$$

で定める．Γ_1 は有界作要素なのでこの条件は $|Q^+\psi Q| < N^{\delta}$ に同値である ($\delta < \frac{1}{2}$)．このように ψ で積分するには，我々は $Q^+\psi Q$ は小さい，つまり，$||\Gamma_0 Q^+\psi Q|| < O(N^{\delta})$, $0 < \delta < 1/2$ と仮定する．さらに N は大きいと仮定しなければならない．もし あるブロック Δ_i があってそこで ψ が行列展開出来ない大きな値を取るならば，そのような large field regions を抜きだし直接的に評価する．small field region は行列式展開が絶対収束するようなブロックの和集合である．

ψ で積分するため，Wick 積を取って主要項を $\hat{H}_0^{-1}$ より取り出す：

$$\begin{aligned} \hat{H}_0^{-1} &\equiv \tilde{H}_0^{-1} + \delta\tilde{H}_0^{-1}, & (31)\\ \tilde{H}_0^{-1} &\equiv \mathcal{T}_0^{\circ 2} + 2\mathcal{T}_0 \circ \mathcal{G}_1, & (32)\\ \delta\tilde{H}_0^{-1} &= \frac{2}{N}[\mathcal{T}_0 \circ :\varphi_1 \cdot \varphi_1 :_{G_1}] + \frac{2}{N}[(Q(\frac{1}{K} - \Gamma_0)Q^+) \circ (\varphi_1 \cdot \varphi_1)], & (33) \end{aligned}$$

ここで $\mathcal{T}_0 \equiv Q\Gamma_0 Q^+$ かつ $\mathcal{G}_1 \equiv A_1 G_1 A_1^+$．さて $\tilde{H}_0^{-1}$ は strictly positive で、zero-average fields $QR^{\Lambda\backslash L\Lambda_1}$ に制限すれば $\tilde{H}_0^{-1} \geq O(\beta)$．また $\delta\tilde{H}^{-1}$ は $\tilde{H}_0^{-1}$ に比して小さい $(= O(\beta/N))$．と言うわけで $\tilde{H}_0 \delta\tilde{H}_0^{-1} = O(N^{-1})$ と $\tilde{H}_0\delta\tilde{H}_0^{-1}$ は大きな N に対して β に関係なく摂動で扱える．

すなわち我々は

$$\tilde{A}_1 = \tilde{H}_0 (C')^+ H_1^{-1},\ H_1 = C'\tilde{H}_0(C')^+, \tag{34}$$

と置いて

$$\begin{aligned} <\psi, \hat{H}_0^{-1}\psi> &= <\psi, \tilde{H}_0^{-1}\psi> + <\psi, \delta\tilde{H}_0^{-1}\psi>, & (35)\\ <\psi, \tilde{H}_0^{-1}\psi> + i\sum J_0(x)\psi(x) &= <\psi_1, H_1^{-1}\psi_1> + i <J_1, \tilde{A}_1\psi_1> \\ &\quad + <\tilde{\psi}, Q^+\tilde{H}_0^{-1}Q\tilde{\psi}> + i <Q^+J_1, \tilde{\psi}>. & (36) \end{aligned}$$

を得る．$\mathcal{K}_1(X)$ を $\{\phi_1(x) \in R^N; x \in \Lambda_1\}$ の以下の条件を満たす極大集合とする

1. $||\varphi_1(x)| - (N\mathcal{G}_1(x,x))^{1/2}| < (N\mathcal{G}_1(x,x))^{\alpha}$,
2. $|\varphi_1(x) - \varphi_1(x+1)| < (N)^{1/2+\alpha}$

ここですべての $x \in X$ に渡り $0 < \alpha < 1/2$ は小さくとる．$\mathcal{K}_n$ も又同様に定義され "small-smooth" といわれる．遥動場上の積分を繰り返すには，集合 $\mathcal{K}_n$ が配位空間 $\{\phi_n(x) \in R^N; x \in \Lambda_n\}$ で dominant に存在しなくてはいけない。$\phi_1 \in \mathcal{K}_1$ ならば $||[Q\tilde{H}_0^{-1}Q^+]^{-1}Q^+J(x)| << N^{\delta}$ なので $\tilde{\psi}$ に関する積分が遂行できて次式が得られる．

$$\det{}^{-1/2}(Q^+\tilde{H}_0^{-1}Q)\exp[-\frac{1}{4} <Q^+J_1, (Q^+\tilde{H}_0^{-1}Q)^{-1}Q^+J_1>].$$

$\mathcal{T}_0 = Q\Gamma_0 Q^+$ は $R^{\Lambda\backslash L\Lambda_1}$ (遥動場 (fluctuations)) の上では strictly positive で short range なので $\mathcal{T}_0 \circ \mathcal{G}_1 \sim \beta\mathcal{T}_0 > O(\beta)$ も然りである．これから $\tilde{H}_0^{-1}$ 及び $Q^+\tilde{H}_0^{-1}Q > O(\beta)$ も短距離相関を持つ正値演

算子で補助場 ψ の主要な寄与は $|\tilde{\psi}(x)| < \mathrm{const}.\beta^{-1/2}$ から来る. $Q^+\tilde{H}_0^{-1}Q$ は下から const.β で押さえられるので ($R^{\Lambda\backslash L\Lambda_1}$ の上で),

$$\int < Q^+J_1, (Q^+\tilde{H}_0^{-1}Q)^{-1}Q^+J_1 > d\mu_{G_1} = O(1). \tag{37}$$

つまり $\tilde{\psi}$ に関する積分は ψ_1 と ϕ_1 の小さな補正項を生ずるだけで, これは $\mathcal{K}_1(X)$ が配位空間の中で十分に大きいことをいう.

従って次の被積分関数は

$$\begin{aligned}\exp[-W_1(\phi_1,\psi_1)] &= \exp\Big[-\frac{1}{2} < \phi_1, G_1^{-1}\phi_1 > - < \psi_1, H_1^{-1}\psi_1 > + i < J_1, \tilde{A}_1\psi_1 > \\ &\quad -\frac{1}{4} < Q^+J_1, (Q^+\tilde{H}_0^{-1}Q)^{-1}Q^+J_1 > + \delta W_1\Big] \end{aligned} \tag{38}$$

ここで δW_1 は小さなおつりである. これを W_0, eq.(12), と比較すると近似的な流れは次の式で与えられることがわかる

$$J_0 = -\frac{1}{\sqrt{N}} : \phi_0^2(x) :_{G_0} \quad \to \quad J_1 = -\frac{1}{\sqrt{N}} : \varphi_1^2(x) :_{G_1},$$
$$H_0^{-1} = 0 \quad \to \quad H_1^{-1} = (C'\tilde{H}_0 C'^+)^{-1}$$

またはもっと単純に: $\beta_1 = \beta - \mathcal{T}_0(x,x)$.

4. 近似的繰り込み群の流れ

もし $\delta\tilde{H}_n^{-1}$ や, 行列式からくる項及び

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{4} < Q^+\tilde{\mathcal{A}}_{n-1}^+J_n, (Q^+\tilde{H}_{n-1}^{-1}Q)^{-1}Q^+\tilde{\mathcal{A}}_{n-1}^+J_n > \tag{39}$$

($\tilde{A}_n = \tilde{A}_1\cdots\tilde{A}_n$) を無視するならば前述の積分変換は何回でも遂行していける. 実際 $\mathcal{F}_n$ は繰り込み群の意味で marginal であり常に単位ブロックあたり $O(N^{-1})$ の大きさである. 従って, $\mathcal{F}_n$ は単位ブロックあたり $O(N^{-1})$ の大きさで遥動場 (fluctuation fields $\{Q\xi_n\}$) とそれに基づく効果は制御可能である. (ただしそれらから生ずる項は marginal とは限らない. またこれらの有る部分は繰り込みによって吸収される.)

さて $\{z_n = \mathcal{A}_nQ\xi_n\}$ の covariance は

$$\mathcal{T}_n = \mathcal{A}_nQ\Gamma_nQ^+\mathcal{A}_n^+, \tag{40}$$

なので, 繰り込み群の近似的流れは

$$W_n(\phi_n,\psi_n) = \frac{1}{2} < \phi_n, G_n^{-1}\phi_n > + < \psi_n, H_n^{-1}\psi_n > -i < J_n, \tilde{A}_n\psi_n >, \tag{41}$$

$$J_n(\phi_n) = J_{n-1}(A_n\phi_n) - \sqrt{N}\mathcal{T}_{n-1} = \sqrt{N}(\beta - \sum_0^{n-1}\mathcal{T}_i - \frac{1}{N}\varphi_n^2), \tag{42}$$

$$\tilde{H}_{n-1}^{-1} = H_{n-1}^{-1} + \tilde{\mathcal{A}}_{n-1}^+[\mathcal{T}_{n-1}\circ(\mathcal{T}_{n-1} + 2\mathcal{A}_nG_n\mathcal{A}_n^+)]\tilde{\mathcal{A}}_{n-1}, \tag{43}$$

$$H_n = C'\tilde{H}_{n-1}(C')^+, \tag{44}$$

$$\tilde{A}_n = \tilde{H}_{n-1}(C')^+H_n^{-1}, \tag{45}$$

で与えられる, ただし我々は全ての marginal terms を無視した, 又 $H_0^{-1} = 0$, $G_0 = (-\Delta + m^2)^{-1}$ である.

さて $\tilde{H}_{n-1}$ と $\mathcal{F}_n$ の性質を見るために

$$\mathcal{A}_n(x,y) \sim \delta_{[\frac{x}{L^n}],y}, \quad \tilde{\mathcal{A}}_n(x,y) \sim L^{-2n}\delta_{[\frac{x}{L^n}],y} \tag{46}$$

に着目する, ただし $x \in \Lambda$, $y \in \Lambda_n$ であり $[x/L^n]$ は x/L^n からの最近接点. (46) の性質は $C^n\mathcal{A}_n = (C')^n\tilde{\mathcal{A}}_n = 1$ と $\mathcal{A}_n(x,y)$ と $\tilde{\mathcal{A}}_n(x,y)$ の 指数減少性から導かれる. また $Q\Gamma_n Q^+ = G_n - G_n C^+ G_{n+1}^{-1} C G_n$ なので我々は J_n があらわに求められる:

$$J_n(x) = \sqrt{N}\left(\mathcal{G}_n(x,x) - \frac{\varphi_n^2(x)}{N}\right) = -\frac{1}{\sqrt{N}} : \varphi_n^2(x) :_{\mathcal{G}_n} \tag{47}$$

ここで $\mathcal{G}_n(x,y) = (G_0(C^+)^n G_n^{-1} C^n G_0)(x,y)$. さらに $|x| << m^{-1}$ で $G_0(x) \sim \beta - c_1 \log(1+|x|)$, $|x| > m^{-1}$ で $G_0(x) \sim c_2 \exp[-m|x|]$ ($c_i = \text{const} > 0$). なので

1. $G_n(x,y) \sim \beta - c_1 \log L^n(1+|x-y|)$, if $L^n|x-y| < m^{-1}$,

2. $G_n(x,y) \sim L^{-2n} m^{-2} \delta_{xy}$, if $L^n m > 1$.

すなわち既に多くの発見的議論で指摘されているように $mL^n << 1$ で $\beta_n \equiv G_n(x,x) \sim \beta - cn\log L$ $L^n m > 1$ で $\beta_n \sim m^{-2}L^{-2n}$ となる.

$O(N)$ spin model の effective interactions の典型的形は (46) を $\mathcal{G}_n \equiv \mathcal{A}_n^+ G_n \mathcal{A}_n$ と $\mathcal{T}_n = \mathcal{A}_n Q\Gamma_n Q^+ \mathcal{A}_n^+$ に代入して得られる:

$$(\tilde{\mathcal{A}}_n[\mathcal{T}_{n-1} \circ (\mathcal{G}_n + \mathcal{G}_{n+1})]\tilde{\mathcal{A}}_n^+)(x,y) \sim \text{const.}(1+\beta_n QQ^+)_{x,y}, \quad x,y \in \Lambda_n. \tag{48}$$

これと Q^+ の性質 (21) より $\mathcal{F}_n$ が marginal であること, 又

$$H_n^{-1} \sim \text{const.}(1-\beta_n\Delta), \tag{49}$$

$$< J_n, \tilde{\mathcal{A}}_n\psi_n > \sim -\frac{1}{\sqrt{N}} <: \phi_n^2 :_{\mathcal{G}_n}, \psi_n > . \tag{50}$$

であることが出て来る. かくして ψ_n で積分すれば以下の形をした double-well potential が得られる

$$\frac{N}{\beta_n}\left(\frac{\phi_n^2}{N} - \beta_n\right)^2 \tag{51}$$

この相互作用は実は, Gallavotti [3] によって昔提唱された hierarchical model の流れに近い.

この概説ではどのように繰り込み補正項を採り入れるか, large-small field の難解な部分は意図的に省かれた。これらについては [7] を見よ.

Acknowledgements. この研究は文部省科学研究補助 No.09640304 および No. 11640220 の補助によっている.

参考文献

[1] A.Polyakov, Phys. Lett. **59B**, 79 (1975).; K. Wilson, Phys. Rev. D **10**, 2455 (1974).

[2] K.R.Ito, Phys. Rev. Letters **55**, 558 (1985).; Commun. Math.Phys. **110**, 46 (1987).; Commun. Math.Phys. **137**, 45 (1991).

[3] G. Gallavotti, Mem. Accad. Lincei, **14**, 23 (1978).; K.Gawedzki and A. Kupiainen, Commun. Math. Phys., **106**, 533 (1986).

[4] K.R.Ito, and H. Tamura, Lett. Math. Phys., **44** ,339 (1998); K. R. Ito, and H. Tamura, N dependence of Upper Bounds of Critical Temperatures of 2D $O(N)$ Spin Models, Commun. Math. Phys. **202**, 127 (1999).

[5] C. Kopper, Commun. Math. Phys. **202**, 89 (1999).

[6] K.Wilson and J.Kogut, Phys. Rep. **12C**, 75 (1974).; K. Wilson, Rev. Mod. Phys., **55**,583 (1983).

[7] K. R. Ito, Paper to be published.

[8] S. K. Ma, The $1/n$ expansion, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, **6**, 249-292, ed. by C. Domb and M. S. Green (Academic Press, London, 1976).

[9] D. Brydges, J. Fröhlich and T. Spencer, Comm. Math. Phys. **83**, 123 (1982).

[10] D. Brydges, J. Fröhlich and A. Sokal, Comm. Math. Phys. **91**, 117 (1985).

[11] S. Caracciolo, R. Edwards, A. Plisetto and A. Sokal, Phys. Rev. Letters **74**, 2969 (1995). : **75**, 1891 (1996).

[12] K.Gawedzki and A.Kupiainen, Commun. Math. Phys. **99**, 197 (1985).