数理解析研究所講究録
1135 巻 2000 年 129-139

Sublinear term をもつ放物型方程式の解の一意性

早稲田大学 理工学部　　山田義雄 (Yoshio Yamada)

1 問題

Ω は $\mathbf{R}^N$ の有界領域、その境界 $\partial\Omega$ は十分に滑らかとする。次のような半線形放物型方程式に関する初期値境界値問題を考える：

$$
\text{(P)}\qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + \lambda |u|^{q-1}u + g(u) & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in} \quad \Omega. \end{cases}
$$

ここで λ, q は $\lambda \in \mathbf{R}, 0 < q < 1$ をみたす実数、g に次の仮定をおく：

(A)　　　g は $g(0) = 0, g(u) \geq 0 (u \geq 0)$ をみたす C^1級の凸関数.

仮定 (A) をみたす代表的な関数は $g(u) = |u|^{p-1}u$ $(p > 1)$ である。上の初期値境界値問題 (P) について、後述するように（局所）解の存在については示すことができる。しかし、(P) の解の一意性については $\lambda > 0$ ならば、一般には成立しないことが知られている (Fujita-Watanabe [4])。実際、$f(u) = \lambda|u|^{q-1}u + g(u)$ とおいたとき、ある正定数 M に対して f が $[0, M]$ 上で単調非減少かつ凹関数で

$$
\int_0^M \frac{1}{f(u)} du < \infty
$$

をみたすならば、$u_0 = 0$ としたとき、(P) に関して $u(x,t) \equiv 0$ に加え、$u(x,t) > 0$ for $(x,t) \in \Omega \times (0, t_0)$ となる解を構成することができる ([4, Theorem 1.5])。

上の Fujita-Watanabe の結果から sublinear term が存在することにより解の一意性が保証されなくことがわかる。この事情は、常微分方程式に対する初期値問題 $u_t = \lambda u^q$ $(0 < q < 1, \lambda > 0), u(0) = 0$ の解が一意でなくなることと同じである。しかし、(P) において初期関数 u_0 が非負かつ恒等的にゼロでなければどうであろうか？そこで、我々は初期関数 u_0 に

$$
u_0 \geq 0, \quad u_0 \not\equiv 0 \qquad \text{in} \quad \Omega
$$

を仮定し、(P) の非負解の一意性定理、より一般に比較定理を確立することをめざす。主要定理を述べるために以下の準備をする。固有値問題

$$
\begin{cases} -\Delta w = \mu w & \text{in} \quad \Omega, \\ w = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}
$$

の最小固有値を μ_1、 対応する固有関数を φ_1 とする。以後 φ_1 は

$$\varphi_1 > 0 \qquad \text{in} \quad \Omega, \qquad \sup_{x\in\Omega} \varphi_1(x) = 1$$

をみたすように正規化しておく。主要定理の一つとして次の比較定理が示される。

定理 $\lambda > 0, 1 - \frac{2}{N} < q < 1$ および初期関数 u_0, v_0 は

$$u_0 \geq v_0, \qquad u_0 \geq c_0\varphi_1 \qquad \text{in} \quad \Omega$$

(c_0 は正数) をみたすとする。このとき u_0, v_0 に対する (P) の非負解 を u, v が $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$ で存在すれば

$$u(x,t) \geq v(x,t) \qquad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty)$$

が成立する。

この比較定理によって (P) の非負解の一意性が示されるほか、非負定常解の安定性や不安定性を議論することができる。(P) に対応する定常問題は

$$\text{(SP)} \qquad \begin{cases} \Delta u + \lambda|u|^{q-1}u + g(u) = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

で与えられ, その正値解については Ambrosetti-Brezis-Cerami [2] らにより、十分小さな $\lambda > 0$ に対する最小正値解の存在が示されて以来、解集合の構造についていろいろな結果が得られている (e.g., [7])。とくに $N = 1$ のときには Kuto [6] によって正値解のみならず、解集合の様相は完全に決定されている。我々は比較定理の応用として非負定常解の安定性を調べる。

2 非定常問題と比較定理

非定常問題 (P) において $f(u) = \lambda|u|^{q-1}u + g(u)$ とおくと $u \to f(u)$ は $\mathbf{R}$ 上で局所 Lipschitz 連続ではないが、その可解性については半線形発展方程式に対する一般論を適用して議論することができる。実数 r を $r > \max\{1, N/2\}$ をみたすようにとり、 (P) を関数空間 $L^r(\Omega)$ における積分方程式として考える。$L^r(\Omega)$ における閉作用素 A を

$$Au = -\Delta u \qquad \text{for} \quad u \in D(A) := W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$$

によって定義し、$-A$ が生成する解析半群を $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ とする。このとき (P) は積分方程式

$$u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(u(s))ds \tag{2.1}$$

の形となる。そこで、実数 $\alpha \in (0,1)$ を $\alpha > N/2r$ をみたすようにとれば、$X := D(A^\alpha) \subset C(\overline{\Omega})$ と成ることに注意する ([5])。初期関数 u_0 は適当な滑らかさをもつと考え、

$$u_0 \in X, \qquad u_0 \geq 0, \qquad u_0 \not\equiv 0 \tag{2.2}$$

と仮定する。次に m を $m > \| A^\alpha u_0 \|$ をみたすようにとり、

$$K := \{v \in C([0,T];X); v \geq 0, \sup_{leqt \leq T} \| A^\alpha v(t) \| \leq m\}$$

と定義する。ここで $T > 0$ は後ほど決める正定数である。$v \in K$ に対して (2.1) の右辺を Φv とおけば、(P) の解を見つけることは Φ の不動点を探すことに帰着される。半群 e^{-tA} の解析性とコンパクト性を利用すると、T を十分に小さく取れば Φ は K から K 内への連続かつコンパクトな写像となることが示される (Henry [5], Pazy [8] を参照せよ) 。これより、Schauder の不動点定理によって Φ は K 内に不動点をもつことがわかり、(2.1) の局所解が求まる。この解が正則性をもち、(P) をみたすことも発展方程式の一般論から導かれる。このあたりの議論は Pazy の本 ([8, Chapter 6]) に詳しい。以上の結果をまとめると次の存在定理になる。

定理 2.1 u_0 は (2.2) をみたすと仮定する。このときある正定数 T が存在して $u \in C([0,T];X) \cap C((0,T];D(A)) \cap C^1((0,T];L^r(\Omega))$ および

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(u), & 0 < t < T, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

をみたす非負関数 u が存在する。

この定理 2.1 より (P) の非負解の存在が示されたから、次に比較定理（あるいは一意性定理）について調べよう。まず λ が正のケースから始める。

A. $\lambda > 0$ のケース

(P) をみたす非負解の性質を調べるために、次の結果に注意する。

命題 2.1 u_0 は (2.2) および $u_0(x) \geq c_0\varphi_1(x)$ $(x \in \Omega)$、ただし $c_0 \geq 0$、 をみたし、定理 2.1 と同じ正則性をもつ非負関数 $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbf{R}$ は

$$\begin{cases} u_t \geq \Delta u + \lambda |u|^{q-1}u + g(u) & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in} \quad \Omega. \end{cases}$$

をみたすとする。このとき

$$u(x,t) \geq [c_0 + \{(1-q)\lambda t\}^{1/(1-q)}]e^{-\mu_1 t}\varphi(x) \qquad \text{in} \quad \Omega \times [0,T]$$

が成立する。

注意 2.1 命題2.1に現われる関数 $y(t) := \{(1-q)\lambda t\}^{1/(1-q)}$ は常微分方程式に対する初期値問題 $y_t = \lambda y^q, y(0) = 0$ の特別解である。

証明 仮定 (A) より、非負関数 u は

$$u(t) \geq e^{-tA}u_0 + \lambda \int_0^t e^{-(t-s)A}u(s)^q ds \tag{2.3}$$

をみたす。 最初に $c_0 > 0$ のケースで証明する。

$$e^{-tA}\varphi_1 = e^{-\mu_1 t}\varphi_1 \tag{2.4}$$

であるから、u_0 の仮定より

$$e^{-tA}u_0 \geq c_0 e^{-\mu_1 t}\varphi_1 \tag{2.5}$$

となり、これを (2.3) に代入すれば

$$u(t) \geq c_0 e^{-\mu_1 t}\varphi_1. \tag{2.6}$$

これより

$$u(s)^q \geq c_0^q e^{-q\mu_1 s}\varphi_1^q \geq c_0^q e^{-q\mu_1 s}\varphi_1$$

となるから、(2.4) を利用して

$$e^{-(t-s)A}u(s)^q \geq c_0^q e^{-q\mu_1 s}e^{-\mu_1(t-s)}\varphi_1 \geq c_0^q e^{-\mu_1 t}\varphi_1$$

となる。この不等式を (2.3) の右辺の積分項に代入すれば,

$$\lambda \int_0^t e^{-(t-s)A}u(s)^q ds \geq \lambda c_0^q t e^{-\mu_1 t}\varphi_1$$

となり

$$u(t) \geq \lambda c_0^q t e^{-\mu_1 t}\varphi_1 \tag{2.7}$$

が成立する。次に (2.6) の代わりに (2.7) を利用する議論を繰り返す。したがって帰納的にすべての $k = 1, 2, \cdots$ に対して

$$u(t) \geq c_0^{q^k} D_k \lambda^{1+q+q^2+\cdots+q^{k-1}} t^{1+q+q^2+\cdots+q^{k-1}} e^{-\mu_1 t}\varphi_1 \tag{2.8}$$

を示すことができる。ただし $\{D_k\}$ は $D_0 = 1$ および漸化式

$$D_{k+1} = \frac{D_k^q}{1+q+\cdots+q^k}$$

から決まる。これよりすべての k について $D_k \geq (1-q)^{1/(1-q)}$ が成立するから、(2.8) において $k \to \infty$ とすれば、$0 < q < 1$ であるから

$$u(t) \geq (1-q)^{1/(1-q)}(\lambda t)^{1/(1-q)}e^{-\mu_1 t}\varphi_1, \qquad (t,x) \in \Omega \times [0,T] \tag{2.9}$$

となり、再び (2.9) を (2.3) に代入して命題の主張が示される。ここで重要なことは (2.9) が c_0 と無関係な不等式となることである。

最後に $c_0 = 0$ のケースを証明する。このとき $u_0 \not\equiv 0$ であるから、任意の $\epsilon \in (0,T]$ に対して放物型方程式の強最大値原理 ([9]) より

$$u(\epsilon) \geq c_\epsilon \varphi_1$$

をみたす正数 c_ϵ が存在する。よって $t = \epsilon$ における $u(\epsilon)$ を初期値と考えれば (2.9) より

$$u(t) \geq (1-q)^{1/(1-q)}\{\lambda(t-\epsilon)\}^{1/(1-q)} e^{-\mu_1(t-\epsilon)}\varphi_1, \qquad (t,x) \in \Omega \times [\epsilon, T]$$

が成立する。ここで $\epsilon \downarrow 0$ とすれば (2.9) が示され、命題 2.1 の主張が得られる。

注意 2.2 Cuachy 問題に対しても同様な結果は Aguirre-Escobedo [1, Lemma 2.2] によって示されている。

注意 2.3 命題 2.1 において u がみたすべき境界条件を $u \geq 0$ に置き換えても同様な結果が成立する。

補題 2.1 任意の $\rho < 1$ に対して

$$\int_\Omega \varphi_1(x)^{-\rho} dx < \infty$$

が成立する。

証明は省略する。この補題と Aguirre-Escobedo [1] のアイデアを利用して次の比較定理を示そう。この定理 2.2 の特別な場合が第 1 節の定理である。

定理 2.2 $1 > q > 1 - 2/N$ とする。$u, v : \Omega \times [0,T] \to \mathbf{R}^+$ が定理 2.1 と同じ正則性をみたし

$$\begin{cases} u_t \geq \Delta u + \lambda |u|^{q-1}u + g(u) & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in} \quad \Omega. \end{cases}$$

および

$$\begin{cases} v_t \leq \Delta v + \lambda |v|^{q-1}v + g(v) & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ v = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ v(\cdot,0) = v_0 & \text{in} \quad \Omega. \end{cases}$$

をみたすと仮定する。(2.2) をみたす初期関数 u_0, v_0 が $u_0 \geq v_0$ および $u_0 \geq c_0\varphi_1$ $(c_0 > 0)$ をみたせば

$$u(\cdot,t) \geq v(\cdot,t) \qquad \text{in} \quad \Omega \times (0,T]$$

が成立する。

証明 議論を簡単にするために $g \equiv 0$ として証明する（$g \not\equiv 0$ のケースも以下の議論を少し修正すればよい）。$w = v - u$ とおくと

$$
\begin{aligned}
w(t) &\le e^{-tA}w(0) + \lambda \int_0^t e^{-(t-s)A}\{v(s)^q - u(s)^q\}ds \\
&\le \lambda \int_0^t e^{-(t-s)A}\{v(s)^q - u(s)^q\}ds \qquad (2.10)\\
&\le \lambda \int_0^t e^{-(t-s)A}\{v(s)^q - u(s)^q\}^+ds
\end{aligned}
$$

となる。ここで $u^+ = \max\{u, 0\}$ である。$v(s) \ge u(s)$ が成立している s で考える。命題 2.1 より $u(s) \ge c_0 e^{-\mu_1 s}\varphi_1$ となることに注意すると

$$
\begin{aligned}
v(s)^q - u(s)^q &= q\int_0^1 \{\tau v(s) + (1-\tau)u(s)\}^{q-1}d\tau \cdot w(s) \\
&\le m\varphi_1^{-(1-q)}w^+(s), \qquad 0 \le s \le T
\end{aligned}
$$

をみたす正数 m が存在する。上の不等式を (2.10) に代入すると

$$
w^+(t) \le \lambda m \int_0^t e^{-(t-s)A}\{\varphi_1^{-(1-q)}w^+(s)\}ds. \tag{2.11}
$$

ここで $r > \max\{1, N/2\}$ を $r < 1/(1-q)$ をみたすようにとり、次に p を

$$
1 - q < \frac{1}{r} - \frac{1}{p} < \frac{2}{N}
$$

をみたすように十分大きく選ぶ。 e^{-tA} に対する評価

$$
\| e^{-tA}v \|_p \le M(p,r)t^{-\theta} \| v \|_r, \qquad \theta = \frac{N}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right), \tag{2.12}
$$

ただし $\| \cdot \|_p$ は $L^p(\Omega)$− ノルム、を利用する ([5])。(2.12) において $\theta < 1$ であるから、(2.11) と (2.12) より

$$
\| w^+(t) \|_p \le \lambda m M(p,r) \int_0^t (t-s)^{-\theta} \| \varphi_1^{-(1-q)}w^+(s) \|_r \, ds \tag{2.13}
$$

ここで Hölder の不等式より

$$
\begin{aligned}
\| \varphi_1^{-(1-q)}w^+(s) \|_r &\le \| w \|_p \left(\int_\Omega \varphi_1^{-N(1-q)/2\theta}dx\right)^{2\theta/N} \qquad (2.14)\\
&\le C \| w \|_p \, .
\end{aligned}
$$

最後の不等式において $N(1-q)/2\theta < 1$ であるから、補題 2.1 を利用した。したがって (2.13), (2.14) より

$$
\| w^+(t) \|_p \le \lambda m C M(p,r) \int_0^t (t-s)^{-\theta} \| w^+(s) \|_p \, ds.
$$

ここで $\theta < 1$ であるから、[5, Lemma 7.1.1] の結果を用いて $w^+(t) \equiv 0$ が導かれ、$u(t) \geq v(t)$ が示される。

注意 2.4 定理 2.2 における条件 $u_0 \geq c_0\varphi_1$ において $c_0 > 0$ という仮定は不要と思われるが、残念ながら現在のところ除去できない。

定理 2.2 より解の一意性は容易に示される。

定理 2.3 $1 > q > 1 - 2/N, u_0 \geq C_0\varphi_1 \quad (c_0 > 0) \quad \text{in} \quad \Omega$ とする。このとき (P) の非負解は一意である。

B. $\lambda \leq 0$ のケース

$\lambda \leq 0$ の場合、比較定理の証明は容易であり、結果のみを述べる。

定理 2.4 $\lambda \leq 0$ のとき u, v は定理 2.2 の仮定をみたすとする。このとき $u_0 \geq v_0$ ならば、$u(\cdot, t) \geq v(\cdot, t) \quad \text{in} \quad \Omega \times [0, T]$ が成立する。

このように定理 2.4 は定理 2.2 と異なり、指数や初期関数の正値性に関する条件なしで成立する。この状況は、一意性定理についても同様である。

3 定常解の安定性と漸近挙動

まず用語の準備から始める。

定義 $u \geq 0 (\not\equiv 0)$ が (SP) の supersolution (resp. subsolution) であるとは

$$\text{(SP)} \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda |u|^{q-1}u + g(u) \leq 0 \quad (\text{resp. } \Delta u + \lambda |u|^{q-1}u + g(u) \geq 0) & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

をみたすことをいう。

注意 3.1 $\lambda > 0$ とする。$u \geq 0 \ (\not\equiv 0)$ が (SP) の supersolution ならば $-\Delta u \geq 0 \quad \text{in} \quad \Omega$ かつ $u|_{\partial\Omega} = 0$ であることより、最大値原理 (Protter-Weinberger [9, pp. 64-65]) によって

$$u > 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} < 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega,$$

ただし $\partial/\partial n$ は外向き法線方向の微分、が成立する。これより (SP) の supersolution u について

$$u > c_0\varphi_1 \quad \text{in} \quad \Omega$$

をみたす $c_0 > 0$ が存在することがわかる。

以後 $u_0 \geq 0 (\not\equiv 0)$ を初期関数とする (P) の解を $u(t; u_0)$ と表すことにする。さらに $\lambda > 0$ のときは $q > 1 - \frac{2}{N}$ を仮定する。Sattinger [10] の議論を用いて次の定理を示す。

定理 3.1 ϕ を (SP) の supersolution とする。このとき (P) の解 $u(t;\phi)$ について

$$u(x,t;\phi) \leq \phi(x) \qquad \text{for} \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty),$$

かつ各 $x \in \Omega$ において $t \to u(x,t;\phi)$ は単調減少で

$$\lim_{t\to\infty} u(\cdot,t;\phi) = \phi^* \qquad \text{uniformly} \quad \text{in} \quad \Omega$$

をみたす。ここで ϕ^* は (SP) の非負解である。

証明 ϕ は (SP) の supersolution であるから、注意 3.1 より $\phi \geq c_0\varphi_1$ となる c_0 が存在する。したがって定理 2.2（あるいは定理 2.4）より任意の $(x,t) \in \Omega \times (0,\infty)$ において

$$\phi(x) \geq u(x,t;\phi)$$

が成立する。次に $t \to u(x,t;\phi)$ の単調性については任意の $h > 0$ に対して定理 2.2（定理 2.4）を $u_0 = \phi, v_0 = u(h;\phi), u(t) = u(t;\phi), v(t) = u(t+h;\phi)$ として適用すると

$$u(x,t;\phi) \geq u(x,t+h;\phi) \qquad \text{for} \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty)$$

が成立し、単調減少性がわかる。これよりある有界関数 ϕ^* に対して

$$\lim_{t\to\infty} u(\cdot,t;\phi) = \phi^* \qquad \text{各点収束} \tag{3.1}$$

となる。さらに $L^r(\Omega)$ 空間における発展方程式理論により $\{A^\beta u(t)\}_{t>0}$ は任意の $\beta \in (0,1)$ について $L^r(\Omega)$ 内で相対コンパクト集合となる。これより (3.1) の収束は一様収束（さらに $C^1(\Omega)$ での一様収束）となることがわかる。また、力学系の理論を用いて

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega |u(x)|^{q+1} dx - \int_\Omega G(u(x))dx$$

（ただし $G(u) = \int_0^u g(v)dv$）と定義すれば、$E(u(t;\phi))$ は t について単調減少である。したがって解軌道 $\{u(t;\phi)\}_{t\geq 0}$ に対応する ω 極限集合 $\omega(\phi)$ は (SP) の解集合に含まれ、ϕ^* は (SP) の解となる。詳しくは Henry [5] を参照してほしい。

同様に subsolution について次の結果を証明することができる。

定理 3.2 ψ は (SP) の subsolution で、ある正定数 c_0 について $\psi \geq c_0\varphi_1$ とする。このとき (P) の解 $u(t;\psi)$ について

$$u(x,t;\psi) \geq \psi(x) \qquad \text{for} \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty),$$

かつ各 $x \in \Omega$ において $t \to u(x,t;\phi)$ は単調増加で、(SP) の解 ϕ_* に対して

$$\lim_{t\to\infty} u(\cdot,t;\psi) = \phi_* \qquad \text{uniformlyin} \quad \Omega$$

となるか、またはある $T > 0$ に対して $\lim_{t\to\infty} \| u(t;\psi) \|_\infty = +\infty$ となる。ここで $\| \cdot \|_\infty$ は supremum-ノルムである。

定理 3.1, 3.2 を (SP) の解の安定性の考察に適用しよう。g は条件 (A) のほか $g'(0)=0$ をみたすと仮定する。このとき $w=\epsilon\varphi_1$ は

$$\Delta w+\lambda w^q+g(w)=\epsilon^q\varphi_1^q\{\lambda-\mu_1\epsilon^{1-q}\varphi_1^{1-q}+o(1)\}$$

をみたす。よって $\epsilon>0$ が十分小ならば

$$\begin{cases} \lambda>0 \text{ のとき } \epsilon\varphi_1 \text{ は (SP) の subsolution} \\ \lambda\leq 0 \text{ のとき } \epsilon\varphi_1 \text{ は (SP) の supersolution} \end{cases}$$

となることがわかる。よって $\lambda>0$ のとき $u(t;\epsilon\varphi_1)$ は定理 3.2 より t について単調増加となり、(SP) の自明解 $u\equiv 0$ は不安定となることがわかる。一方 $\lambda\leq 0$ のとき $u(t;\epsilon\varphi_1)$ は定理 3.1 より t について単調減少となり、(SP) の自明解 $u\equiv 0$ は漸近安定となることがわかる。このとき、実は有限の T において $u(T;\epsilon\varphi_1)=0$ となることも示すことができる (Friedman-Herrero [3])。

(SP) の非自明解について考えよう。以後はパラメータ λ への依存性をはっきりさせるため、下付き添字 (たとえば $(\mathrm{SP})_\lambda$) を使う。$g(u)=u^p, 1<p\leq(N+2)/(N-2)$ とおくと、正値解について Ambrosetti-Brezis-Cerami [2], Ouyang-Shi [7] の結果をまとめると次の定理が知られている。

定理　正数 Λ が存在して次が成立する：

(i) $\lambda>\Lambda$ に対しては $(\mathrm{SP})_\lambda$ は非自明解をもたない。

(ii) $0<\lambda<\Lambda$ に対して $(\mathrm{SP})_\lambda$ は最小正値解 u_λ をもち、この u_λ は λ について単調増加である。

(iii) $0<\lambda<\Lambda$ に対して $(\mathrm{SP})_\lambda$ は最小正値解と異なる正値解 v_λ をもつ。とくに Ω が球、かつ $p\leq N/(N-2)$ ならば $(\mathrm{SP})_\lambda$ の正値解はちょうど 2 つである。

そこで $\lambda>0$ のとき最小正値解 u_λ の安定性を調べる。$(\mathrm{SP})_\mu$ の解 u_μ を用いると

$$\Delta u_\mu+\lambda u_\mu^q+g(u_\mu)=(\lambda-\mu)u_\mu^q \tag{3.2}$$

であるから、$\mu>\lambda$ のとき u_μ は $(\mathrm{SP})_\lambda$ の supersolution となる。よって、定理 3.1 から $t\to\infty$ のとき単調減少に $u(t;u_\mu)\to u_\lambda$ (Ω で一様収束) となることが示される。逆に (3.2) より $\mu<\lambda$ のとき u_μ は $(\mathrm{SP})_\lambda$ の subsolution となる。よって、前の結果と定理 3.2 から $t\to\infty$ のとき単調増加に $u(t;u_\mu)\to u_\lambda$ (Ω で一様収束) となることがわかる。とくに Ouyang-Shi の条件がみたされているならば、次の結果を示すことができる。

定理 3.3　Ω は球で $p\leq N/(N-2)$ をみたすとする。任意の $\lambda\in(0,\Lambda)$ に対して $(\mathrm{SP})_\lambda$ はちょうど *2* つの正値解 $u_\lambda, v_\lambda(u_\lambda<v_\lambda)$ をもち、$u_0\geq 0(\not\equiv 0)$ が $\mu>\lambda$ をみたす μ に対して $u_0\leq v_\mu$ であれば $(\mathrm{P})_\lambda$ の解 $u(t;u_0)$ について

$$\lim_{t\to\infty}u(t;u_0)=u_\lambda \qquad (\Omega\text{で一様収束})$$

となる。

$\lambda \leq 0$ のケースを考える。$(\mathrm{SP})_\lambda$ の非負解を任意にとり、v_λ とする。$K > 0$ に対して $w = Kv_\lambda$ とおくと

$$\Delta w + \lambda w^q + w^p = K(K^{p-1} - 1)v_\lambda^p - \lambda K^q v_\lambda^q (K^{1-q} - 1)$$

であるから

$$\Delta w + \lambda w^q + w^p > 0 \ \ (\text{resp.} < 0) \qquad \text{if} \qquad K > 1 \ \ (\text{resp.}\ \ K < 1).$$

これより

$$\begin{cases} K < 1 \text{ のとき } Kv_\lambda \text{は } (\mathrm{SP})_\lambda \text{の supersolution} \\ K > 1 \text{ のとき } Kv_\lambda \text{は } (\mathrm{SP})_\lambda \text{の subsolution} \end{cases}$$

となる。したがって定理 3.1 より次の意味で v_λ は不安定となる。

定理 3.4 $u_0 \geq 0$ が任意の $K < 1$ に対して $u_0 \leq Kv_\lambda$ ならば、$(\mathrm{P})_\lambda$ の $u(t; u_0)$ について

$$\lim_{t\to\infty} u(t; u_0) = 0 \qquad (\Omega\text{で一様収束}).$$

さらに有限の $T > 0$ について $u(T; u_0) = 0$ となる。

特に $N = 1$ のときは Kuto [6] によって非負値定常解のつくる集合は完全に解明されている。とりわけ、$\lambda < 0$ がある一定の負の数よりも小さくなると、正値解の存在と一意性が失われ、vanishing zone をもつ非負解が作る連続体集合が出現する。これらの解の安定性の解析についても定理 3.1, 3.2 は有効である。

参考文献

[1] J. Aguirre and M. Escobedo, *A Cauchy problem for* $u_t - \Delta u = u^p$ *with* $0 < p < 1$. *Asymptotic behaviour of solutions*, Ann. Fac. Sci. Toulouse **8**(1986-1987), 175-203.

[2] A. Ambrosetti, H. Brézis and G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Functional Anal. **122**(1994), 519-543.

[3] A. Friedman and M. A. Herrero, *Extinction properties of semilinear heat equations with strong absorption*, J. Math. Anal. Appl. **124** (1987), 530-546.

[4] H. Fujita and S. Watanabe, *On the uniqueness and non-uniqueness of solutions of initial value problems for some quasilinear parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **21**(1968), 631-652.

[5] D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics **840**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1981.

[6] K. Kuto, *On the structure of solutions of one-dimensional elliptic equations with concave and convex nonlinearities*, preprint.

[7] T. Ouyang and J. Shi, *Exact multiplicity of solutions and global bifurcation of* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Proceedings of the US-Chinese Conference : Differential Equations and Applications held in Hangzhou, 1996, edited by P.W.Bates, S-N.Chow, K.Lu and X.Pan, International Press, 1997.

[8] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences **44**, Springer-Verlag, New York, 1983.

[9] M. H. Protter and H. F. Weinberger, Maximum Principles in Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1984.

[10] D. H. Sattinger, *Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J. **21** (1972), 979-1000.