数理解析研究所講究録
1135 巻 2000 年 35-40

退化ヴォルテラ型積分方程式

追手門学院大学 経済学部 田辺 広城
(Hiroki Tanabe)

Banach 空間 X の中の次の積分方程式を考える.

$$Mu(t)+\int_0^t k(t-s)Lu(s)ds=f(t), \quad 0<t\leq T. \tag{1}$$

仮定 (i) M, L は $D(L)\subset D(M)$ を満たす X の中の線形作用素,

$$2\alpha+\beta>2, \quad 0<\beta\leq\alpha\leq 1 \tag{2}$$

を満足する数 α, β と正の数 c, C が存在して, すべての

$$\lambda\in\Sigma\equiv\{\lambda\in\mathbf{C};\ \mathrm{Re}\lambda\geq -c(|\mathrm{Im}\lambda|+1)^{\alpha}\}$$

に対して

$$\left\|M(\lambda M+L)^{-1}\right\|\leq\frac{C}{(|\lambda|+1)^{\beta}} \tag{3}$$

が成立する.

(ii)

$$k\in AC([0,T]), \quad k(0)>0, \quad \dot{k}\in BV([0,T]). \tag{4}$$

ただし $AC([0,T])$ は閉区間 $[0,T]$ で絶対連続な関数の全体, $BV([0,T])$ は $[0,T]$ で有界変分な関数の全体である.

例 $Lu=-\Delta u$, $(Mu)(x)=m(x)u(x)$, $0\leq m\in L^{\infty}(\Omega)$.
(i) $X=H^{-1}(\Omega)$, $D(L)=H_0^1(\Omega)$ の場合, $\alpha=\beta=1$.
(ii) $X=L^2(\Omega)$, $D(L)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ の場合, $\alpha=1$, $\beta=1/2$.

(1) を形式的に微分すると初期値問題

$$\frac{d}{dt}Mu(t)+k(0)Lu(t)+\int_0^t\dot{k}(t-s)Lu(s)ds=\dot{f}(t), \tag{5}$$

$$Mu(0)=f(0) \tag{6}$$

になる. 特に $k(t)\equiv 1$ ならば (5) は

$$\frac{d}{dt}Mu(t)+Lu(t)=\dot{f}(t)$$

となり, この種の方程式は A. Favini & A. Yagi [2] に詳しく論じられている.

r を積分方程式

$$\dot{k}+k(0)r+\dot{k}*r=0 \tag{7}$$

の解とする. ただし合成積 $a*b$ は

$$(a*b)(t)=\int_0^t a(t-s)b(s)ds$$

によって定義される．(7) は逐次近似によって解くことができて (4) により $r \in BV([0,T])$ である．M. G. Crandall and J. A. Nohel [1] に従って (5), (6) を次の問題に変換する．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Mu(t) + k(0)Lu(t) &= G(Mu)(t), \\ (Mu)(0) &= f(0). \end{aligned} \tag{8}$$

ここで

$$\begin{aligned} G(v)(t) &= \dot{f}(t) + (r * \dot{f})(t) + r(t)f(0) - r(0)v(t) - (v * \dot{r})(t), \\ (v * \dot{r})(t) &= \int_0^t v(t-s)dr(s) \end{aligned} \tag{9}$$

である．$v(t) = Mu(t)$ を新しい未知関数とすると v が満たす方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t) + Av(t) &\ni G(v)(t), \\ v(0) &= f(0) \end{aligned} \tag{10}$$

となる．ただし $A = k(0)LM^{-1}$ は一般に線形多価作用素である．Favini & Yagi [1] により $-A$ は解析的半群 e^{-tA} を生成し，

$$\|e^{-tA}\| \le Ct^{(\beta-1)/\alpha}, \qquad \left\|\frac{d}{dt}e^{-tA}\right\| \le Ct^{(\beta-2)/\alpha} \tag{11}$$

が成立する．(10) は更に

$$v(t) = e^{-tA}f(0) + \int_0^t e^{-(t-s)A}G(v)(s)ds \tag{12}$$

に変換される．

$$f(0) \in X_A^\theta \equiv \{u \in X;\ \sup_{\xi>0} \xi^\theta \|L(\xi M + L)^{-1}u\| < \infty\}, \quad \theta > 2 - \alpha - \beta \tag{13}$$

を仮定する． Favini & Yagi [1] により

$$\left\|e^{-tA}f(0) - f(0)\right\| \le C_\theta t^{(\alpha+\beta+\theta-2)/\alpha}\|f(0)\|_{X_A^\theta}$$

が成立する．従って $e^{-tA}f(0)$ は $t=0$ で連続，$\lim_{t\to 0} e^{-tA}f(0) = f(0)$ が成立する．(12) は次のように逐次近似によって解くことができる．

$$v_0(t) = e^{-tA}f(0), \quad v_{n+1}(t) = e^{-tA}v_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}G(v_n)(s)ds, \ \ n = 1, 2, \ldots$$

とおくと

$$\begin{aligned} v_{n+1}(t) - v_n(t) &= \int_0^t e^{-(t-s)A}\{G(v_n)(s) - G(v_{n-1})(s)\}\,ds \\ &= \int_0^t e^{-(t-s)A}\{-r(0)\,(v_n(s) - v_{n-1}(s)) - ((v_n - v_{n-1}) * \dot{r})\,(s)\}\,ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\|((v_n - v_{n-1}) * \dot{r})(s)\| \\ &\quad = \left\|\int_0^s (v_n(s-\sigma) - v_{n-1}(s-\sigma))dr(\sigma)\right\| \le \sup_{0\le\sigma\le s} \|v_n(\sigma) - v_{n-1}(\sigma)\| \cdot V(r; 0, s), \end{aligned}$$

ただし $V(r;0,s)$ は $[0,s]$ における r の全変分である．故に

$$\begin{aligned}
\|v_{n+1}(t)-v_n(t)\| &\le \int_0^t C(t-s)^{(\beta-1)/\alpha}\{|r(0)|\|v_n(s)-v_{n-1}(s)\| \\
&\quad + \sup_{0\le\sigma\le s}\|v_n(\sigma)-v_{n-1}(\sigma)\|\cdot V(r;0,s)\}ds \\
&\le C\int_0^t (t-s)^{(\beta-1)/\alpha}(|r(0)|+V(r;0,s))\sup_{0\le\sigma\le s}\|v_n(\sigma)-v_{n-1}(\sigma)\|ds \\
&\le C(|r(0)|+V(r;0,T))\int_0^t (t-s)^{(\beta-1)/\alpha}\sup_{0\le\sigma\le s}\|v_n(\sigma)-v_{n-1}(\sigma)\|ds \\
&\le C_0\int_0^t (t-s)^{-\gamma}\sup_{0\le\sigma\le s}\|v_n(\sigma)-v_{n-1}(\sigma)\|ds. \qquad (14)
\end{aligned}$$

ここで $C_0 = C(|r(0)|+V(r;0,T))$, $\gamma = (1-\beta)/\alpha$ である．(2) により $\alpha+\beta > 2-\alpha \ge 1$ であるから $0 \le \gamma < 1$ である．$X_n(t) = \|v_{n+1}(t)-v_n(t)\|$ とおくと (14) により

$$X_n(t) \le C_0\int_0^t (t-s)^{-\gamma}\sup_{0\le\sigma\le s}X_{n-1}(\sigma)ds \qquad (15)$$

が成立する．この (15) の右辺は次のようにして t の増加関数であることがわかる．$0 \le t < t'$ に対して

$$\int_0^{t'}(t'-s)^{-\gamma}\sup_{0\le\sigma\le s}X_{n-1}(\sigma)ds = \left(\int_{t'-t}^{t'} + \int_0^{t'-t}\right)(t'-s)^{-\gamma}\sup_{0\le\sigma\le s}X_{n-1}(\sigma)ds.$$

$(t'-t, t')$ での積分では変数変換 $s' = s-t'+t$ を，$(0, t'-t)$ における積分は除去すると

$$\ge \int_0^t (t-s')^{-\gamma}\sup_{0\le\sigma\le s'+t'-t}X_{n-1}(\sigma)ds' \ge \int_0^t (t-s)^{-\gamma}\sup_{0\le\sigma\le s}X_{n-1}(\sigma)ds.$$

これで (15) の右辺は増加関数であることがわかった．故に (15) から

$$\sup_{0\le\sigma\le t}X_n(\sigma) \le C_0\int_0^t (t-s)^{-\gamma}\sup_{0\le\sigma\le s}X_{n-1}(\sigma)ds.$$

従って $F_n(t) = \sup_{0\le\sigma\le t}X_n(\sigma)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&F_n(t) \le C_0\int_0^t (t-s)^{-\gamma}F_{n-1}(s)ds, \\
&F_0(t) = \sup_{0\le\sigma\le t}X_0(\sigma) = \sup_{0\le\sigma\le t}\|v_1(\sigma)-v_0(\sigma)\| = \sup_{0\le\sigma\le t}\left\|\int_0^\sigma e^{-(\sigma-s)A}G(v_0)(s)ds\right\|
\end{aligned}$$

となる．このことから帰納法により

$$F_n(t) \le \frac{(C_0\Gamma(1-\gamma))^n}{\Gamma(n(1-\gamma))}\int_0^t (t-s)^{n-1-n\gamma}F_0(s)ds \le \frac{(C_0\Gamma(1-\gamma))^n}{\Gamma(n(1-\gamma)+1)}t^{n(1-\gamma)}\sup_{0\le s\le t}F_0(s).$$

これで $\{v_n(\cdot)\}$ が一様に収束することがわかった．$v(t) = \lim_{n\to\infty}v_n(t)$ が (12) の解であることは容易にわかる．(12) の解の一意性も同様な議論で示すことができる．

次に (12) の右辺第 2 項が微分可能であることを示す．

$$G(v)(t) = \dot{f}(t) + (r*\dot{f})(t) + r(t)f(0) - r(0)v(t) - (v*\dot{r})(t)$$

の右辺の初めの 2 つの項 $\dot{f}$, $r * \dot{f}$ については Favini & Yagi [1] の Theorem 3.7 により $\dot{f} \in C^{\rho}([0,T];X)$, $\rho > (2-\alpha-\beta)/\alpha$ を仮定すればよい．第 3 項については $e^{-tA}f(0)$ が $[0,T]$ で連続であるから

$$\frac{d}{dt}\int_0^t e^{-(t-s)A}r(s)f(0)ds = r(0)e^{-tA}f(0) + \int_0^t e^{-(t-s)A}f(0)dr(s)$$

となる．第 4 項は (12) を用いて

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{-(t-s)A}r(0)v(s)ds \\
&\quad = r(0)\int_0^t e^{-(t-s)A}\left\{e^{-sA}f(0) + \int_0^s e^{-(s-\xi)A}G(v)(\xi)d\xi\right\}ds \\
&\quad = r(0)\int_0^t \left\{e^{-tA}f(0) + \int_0^s e^{-(t-\xi)A}G(v)(\xi)d\xi\right\}ds \\
&\quad = r(0)\left\{te^{-tA}f(0) + \int_0^t\int_0^s e^{-(t-\xi)A}G(v)(\xi)d\xi ds\right\} \\
&\quad = r(0)\left\{te^{-tA}f(0) + \int_0^t\int_\xi^t e^{-(t-\xi)A}G(v)(\xi)dsd\xi\right\} \\
&\quad = r(0)\left\{te^{-tA}f(0) + \int_0^t (t-\xi)e^{-(t-\xi)A}G(v)(\xi)d\xi\right\} \qquad (16)
\end{aligned}$$

となる．(11) により

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left\{(t-\xi)e^{-(t-\xi)A}\right\}\right\| \\
&\quad = \left\|e^{-(t-\xi)A} + (t-\xi)\frac{\partial}{\partial t}e^{-(t-\xi)A}\right\| \le Ct^{(\beta-1)/\alpha} + Ct^{(\alpha+\beta-2)/\alpha} \qquad (17)
\end{aligned}$$

であるが (2) により

$$\frac{\beta-1}{\alpha} \ge \frac{\alpha+\beta-2}{\alpha} > -1$$

であるから (17) の右辺は $(0,T)$ で積分可能である．このことと (16) により $\int_0^t e^{-(t-s)A}r(0)v(s)ds$ は微分可能である．

$G(v)(s)$ の最後の項については

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{-(t-s)A}(v * \dot{r})(s)ds = \int_0^t e^{-(t-s)A}\int_0^s v(s-\sigma)dr(\sigma)ds \\
&\quad = \int_0^t\int_\sigma^t e^{-(t-s)A}v(s-\sigma)dsdr(\sigma) \\
&\quad = \int_0^t\int_\sigma^t e^{-(t-s)A}\left\{e^{-(s-\sigma)A}f(0) + \int_0^{s-\sigma} e^{-(s-\sigma-\xi)A}G(v)(\xi)d\xi\right\}dsdr(\sigma) \\
&\quad = \int_0^t\int_\sigma^t e^{-(t-s)A}\left\{e^{-(s-\sigma)A}f(0) + \int_\sigma^s e^{-(s-\xi)A}G(v)(\xi-\sigma)d\xi\right\}dsdr(\sigma) \\
&\quad = \int_0^t\int_\sigma^t \left\{e^{-(t-\sigma)A}f(0) + \int_\sigma^s e^{-(t-\xi)A}G(v)(\xi-\sigma)d\xi\right\}dsdr(\sigma) \\
&\quad = \int_0^t \left\{(t-\sigma)e^{-(t-\sigma)A}f(0) + \int_\sigma^t\int_\xi^t e^{-(t-\xi)A}G(v)(\xi-\sigma)dsd\xi\right\}dr(\sigma)
\end{aligned}$$

$$= \int_0^t \left\{(t-\sigma)e^{-(t-\sigma)A}f(0) + \int_\sigma^t (t-\xi)e^{-(t-\xi)A}G(v)(\xi-\sigma)d\xi\right\} dr(\sigma)$$
$$= \int_0^t (t-\sigma)e^{-(t-\sigma)A}f(0)dr(\sigma)$$
$$+ \int_0^t \int_\sigma^t (t-\xi)e^{-(t-\xi)A}G(v)(\xi-\sigma)d\xi dr(\sigma). \tag{18}$$

仮定 $\theta > 2-\alpha-\beta$ により

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left\{(t-\sigma)e^{-(t-\sigma)A}f(0)\right\}\right\| = \left\|e^{-(t-\sigma)A}f(0) + (t-\sigma)\frac{\partial}{\partial t}e^{-(t-\sigma)A}f(0)\right\|$$
$$\leq \|e^{-(t-\sigma)A}f(0)\| + (t-\sigma)C(t-\sigma)^{(\beta+\theta-2)/\alpha}\|f(0)\|_{X_A^\theta}$$
$$= \|e^{-(t-\sigma)A}f(0)\| + C(t-\sigma)^{(\alpha+\beta+\theta-2)/\alpha}\|f(0)\|_{X_A^\theta}$$

は有界である．故に (18) の最後の辺の第 1 項は微分可能である．

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma^t (t-\xi)e^{-(t-\xi)A}G(v)(\xi-\sigma)d\xi\right\|$$
$$= \left\|\int_\sigma^t \frac{\partial}{\partial t}\left\{(t-\xi)e^{-(t-\xi)A}G(v)(\xi-\sigma)\right\}d\xi\right\|$$
$$= \left\|\int_\sigma^t e^{-(t-\xi)A}G(v)(\xi-\sigma) + (t-\xi)\frac{\partial}{\partial t}e^{-(t-\xi)A}G(v)(\xi-\sigma)d\xi\right\|$$
$$\leq C\int_\sigma^t \left\{(t-\xi)^{(\beta-1)/\alpha} + (t-\xi)^{(\alpha+\beta-2)/\alpha}\right\}\|G(v)(\xi-\sigma)\|d\xi$$
$$\leq C\left\{(t-\sigma)^{(\alpha+\beta-1)/\alpha} + (t-\sigma)^{(2\alpha+\beta-2)/\alpha}\right\}\sup_\xi \|G(v)(\xi)\|$$

は有界である．故に (18) の最後の辺の第 2 項も微分可能である．以上により (12) の解 v は t で微分可能であることがわかった．v が (10) を満足することは容易にわかる．Favini & Yagi [1] の Theorem 3.7 の証明より $dv(t)/dt$ は $(0,T)$ で Bochner 積分可能である．この v に対して

$$u(t) = \frac{1}{k(0)}L^{-1}\left(G(v)(t) - \frac{d}{dt}v(t)\right)$$

とおく．

$$k(0)Lu(t) = G(v)(t) - \frac{d}{dt}v(t) \in Av(t) = k(0)LM^{-1}v(t) \tag{19}$$

であるから $u(t) \in M^{-1}v(t)$，従って $Mu(t) = v(t)$．これと (19) の前半から

$$\frac{d}{dt}Mu(t) + k(0)Lu(t) = G(Mu)(t).$$

(1) から (8) を導いたのと逆の計算により u が (1) を満たすことがわかる．$Mu = v \in C([0,T]; X)$, $Lu \in L^1(0,T;\ X)$ である．(1) の解の一意性は (12) のそれに帰着させて示すことができる．即ち u_1, u_2 を $Mu_i \in C([0,T]; X)$, $Lu_i \in L^1(0,T;\ X)$, $i = 1,2$ であるような (1) の 2 つの解とする．$v_i = Mu_i$ は (12) の解であるから $v_1 = v_2$, 即ち $Mu_1 = Mu_2$. 従って $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$ とおくと

$$\int_0^t k(t-s)Lu(s)ds = 0.$$

両辺を微分して

$$k(0)Lu(t) + \int_0^t \dot{k}(t-s)Lu(s)ds = 0.$$

この両辺と r との合成積を計算して

$$-\int_0^t \dot{k}(t-s)Lu(s)ds = 0.$$

故に

$$k(0)Lu(t) = 0$$

即ち $u = 0$ となる.

参考文献

[1] M. G. Crandall and J. A. Nohel: *An abstract functional differential equation and a related nonlinear Volterra equation*, Israel J. Math. **29** (1978), 313-328 .

[2] A. Favini and A. Yagi: Degenerate Differential Equations in Banach Spaces, Marcel Dekker, 1998.